# الإقتصاد القياسي التحليلي

## بين النظرية والتطبيق

f(d)

+ve ? $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ $\hat{\sigma}_u^2$ ? -ve

$\acute{R}^2$

$\hat{z}$ $\hat{t}$ $\hat{F}$

dl du 4-dl 4-du d


الدكتور
وليد اسماعيل السيفو

الدكتور
أحمد محمد مشعل




# الاقتصاد القياسي التحليلي بين النظرية والتطبيق

**تأليف**

الدكتور وليد اسماعيل السيفو
**دكتوراه في الاقتصاد القياسي**
**جامعة ويلز - بريطانيا**

الدكتور أحمد محمد مشعل
**دكتوراه في التحليل الاقتصادي**
**جامعة الليبنوي-الولايات المتحدة الأمريكية**



**عمان - الأردن**

**الطبعة الأولى**

**١٤٢٤ هـ - ٢٠٠٣ م**

رقم الإجازة المتسلسل لدى دائرة المطبوعات والنشر (١٩٣٥ / ٩ / ٢٠٠٣)
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (١٨٨٢ / ٩ / ٢٠٠٣ )

٣٣٠.١٢

السيفو، وليد

الاقتصاد القياسي التحليلي بين النظرية والتطبيق / وليد السيفو، أحمد مشعل . ـ عمان: دار مجدلاوي ، ٢٠٠٣

ر. إ. : ١٨٨٢ / ٩ / ٢٠٠٣

**الواصفات** : / الاقتصاد القياسي // التحليل الرياضي // الاقتصاد المالي /

* - تم اعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

**ISBN 9957 - 02 - 129 - x (ردمك)**

دار مجدلاوي للنشر والتوزيع
**عمان - الرمز البريدي: ١١١١٨ - الأردن**
**ص.ب: ١٨٤٢٥٧**
**تلفاكس: ٤٦١١٦٠٦-٤٦٢٢٨٨٤**



**Dar Majdalawi Pub. & Dis**
Amman 11118 - Jordan
P.O.Box: 184257
Tel & Fax: 4611606-4622884

***WWW.majdalawibooks.com***
***E-mail: customer@ majdalawibooks.com***

# الإهـــــداء

إلى شهداء هذه الأمة......

تحية إجلال وإكبار

## محتويات الكتاب

## تقديم

أصبح الاقتصاد القياسي التحليلي من العلوم البالغة الأهمية في الوقت الحاضر؛ باعتباره الأداة الأساسية التي تقدر مكونات النظرية الاقتصادية وغيرها من العلوم بإعطائها تقديرات عددية تقربها إلى الواقع؛ لتكون أكثر منطقية وقبولا. ويحاول هذا العلم الجمع بين النظرية الاقتصادية والأساليب الرياضية والطرق الإحصائية، للحصول على تقديرات كمية يمكن استخدامها للمساعدة في التنبؤ واتخاذ القرار، ودراسة التغيرات الهيكلية، فالاقتصاد القياسي التحليلي أصبح بمثابة مختبر النظرية الاقتصادية (Economic theory labortary) .

لقد حاولنا قدر استطاعتنا في هذا الكتاب ، أن نقدم الأسس التي يقوم عليها هذا العلم ، مع إعطاء تطبيقات وأمثلة توضيحية اقتصادية وإحصائية تفيد دارسي الاقتصاد والإحصاء والعلوم المالية والمصرفية بصورة عامة، وكذلك العاملين في مجال البحوث الإدارية والاقتصادية التطبيقية، لذا فإن هذا الكتاب جاء لسد فراغ ملموس في مكتبتنا العربية.

كان المفروض بهذا الكتاب أن يستهل الفصول بفصل تمهيدي في أساسيات جبر المصفوفات، التفاضل ، التوزيع الطبيعي، واختبار الفرضيات ، ولكننا أرتأينا ذكرها في الملاحق المذكورة في نهاية الكتاب؛ لكي لا تؤثر في التسلسل العلمي لمكونات علم الاقتصاد القياسي التحليلي.

لقد خط الكتاب لنفسه مسارا تناول فيه المنهاج النظري الخاص بهذا العلم ، مشتملا بذلك على عرض مركز لنظرية الاقتصاد القياسي التحليلي وقد وقع في إطار الجزء الأول ،وابتداء من الفصل الأول وحتى الفصل السابع ، متناولين فيه طبيعة هذا العلم ومفهومه مع التطرق إلى النموذج الاقتصادي ذي المتغيرين وطريقة اشتقاق معلماته وتقديرها ،ثم التوسع في عناصر النموذج ليشمل أكثر من متغيرين ، مع إعطاء تبرير منطقي لضرورة إدخال المتغير العشوائي إلى النموذج الاقتصادي.

في حين قد مثل الجزء الثاني معالجة لأهم عناوين ما أصطلح عليه بالمشاكل القياسية، حيث جاء الفصل الثامن مستعرضا مشكلة تعدد المتغيرات المستقلة وتداخلها في النموذج.

وتناول هذا الفصل في نهايته مقترح الاستاذ سليفي في معالجته لهذه المشكلة. أما الفصل التاسع فقد جاء بعرض لأهم مشاكل استخدام الأسلوب القياسي، وهي مشكلة الارتباط الذاتي وطرق معالجته. ثم جاء الفصل العاشر ليعالج مشكلة عدم تجانس تباين

المتغير العشوائي. أما الفصل الحادي عشر فقد تناول مشكلة وجود متغير التباطؤ (التخلف) الزمني أي أنه عالج مشكلة التقدير في النماذج الحركية.

يلاحظ أيضا أن الكتاب وابتداء من الفصل الأول وحتى الفصل الحادي عشر قد عالج النماذج القياسية ذات المتغيرات الكمية فقط. ولهذا فقد انفرد الفصل الثاني عشر لتوضيح أثر المتغيرات الوصفية (الوهمية) في تقديرات النماذج القياسية التحليلية لتعطي النموذج القياسي تفسيرا أكثر منطقية وواقعية لمتغيرات الظاهرة المدروسة ذات المتغيرات الكمية والوصفية.

وقد ركز الفصلان الثالث عشر والرابع عشر على تقدير معلمات النماذج القياسية المتكونة من أكثر من معادلة؛ أي دراسة نماذج المعادلات الآنية. فجاء الفصل الثالث عشر متناولا مشكلة التحيز الآني. في حين اهتم الفصل الرابع عشر بمشكلة التشخيص في النماذج الآنية.

قام المؤلفان بتخصيص مبحث مستقل في نهاية كل فصل يتضمن التطبيقات والأمثلة المحلولة، وكذلك التمارين والأسئلة التي تتعلق بالفصل المعروض، وقد رتبت التطبيقات في صعوبتها وشموليتها بصورة تدريجية.

وختاما نود ذكر ثلاث ملاحظات لأعزائنا الطلبة والقراء تخص الكتاب ولتساعدهم في سرعة المتابعة للمفاهيم والاشتقاقات الواردة فيه وتتمثل هذه الملاحظات فيما يلي:

**أولا:** ضرورة مراجعة الطالب والقارىء للملاحق (المذكورة في نهاية الكتاب) عند الإشارة إليها في متن الفصول.

**ثانيا:** ضرورة فهم التطبيقات المذكورة ومتابعتها في نهاية كل فصل، وذلك بفرض تحقيق الاستيعاب للأدوات القياسية في التقدير والتحليل والتنبؤ.

**ثالثا:** ضرورة الإجابة على أكبر عدد من التمارين المعطاة الموجودة في نهاية كل فصل من فصول هذا الكتاب، وذلك لغرض التأكد من مقدار استيعاب المادة ومدى إمكانية استخدام أدواتها لأغراض التقدير والتحليل والتنبؤ.

ونسأل اللـه العون والتوفيق

المؤلفان

/ / ٢٠٠٣

# الجزء الأول

# الاقتصاد القياسي التحليلي النظري

ويتضمن هذا الجزء مناقشة الفصول التالية:



يحتوي الفصل السابع على مجموعة شاملة من التطبيقات والتمارين شملت، جميع الفصول المذكورة، وعليه ننصح القارئ والطلبة بضرورة الاهتمام بتطبيقات هذا الفصل وتمارينه لشموليتها.

## الفصل الأول

# طبيعة الاقتصاد القياسي التحليلي ونطاقه

(١:١) مفهوم الاقتصاد القياسي التحليلي وتطوره التاريخي.

(١:٢) علاقة الاقتصاد القياسي التحليلي بالرياضيات

(١:٣) علاقة الاقتصاد القياسي التحليلي بالإحصاء

(١:٤) أهداف الاقتصاد القياسي التحليلي.

(١:٥) أقسام الاقتصاد القياسي التحليلي.

(١:٦) خطوات المعالجة القياسية للظواهر (المشاكل الاقتصادية).

(١:٧) تطبيقات وتمارين.

# الفصل الأول

## طبيعة الاقتصاد القياسي التحليلي ونطاقه

## Nature and Scope of Econometics

يعد الاقتصاد القياسي التحليلي أحد فروع علم الاقتصاد المستخدمة للأساليب الكمية في تحليل الظواهر الاقتصادي، وله علاقة وثيقة بالرياضيات والطرق الإحصائية.

وهناك كثير من الالتباس بينه وبين الاقتصاد الرياضي والإحصاء الاقتصادي . وفي هذا الفصل سنوضح مفهوم الاقتصاد القياسي ومدى اختلافه عن بقية علوم المعرفة مع اعطاء فكرة مركزة عن طبيعة ونطاق الاقتصاد القياسي.

### (١:١) مفهوم الاقتصاد القياسي التحليلي وتطوره التأريخي

### Concept Of Econometics

أهم مصدر من مصادر التطور في الاقتصاد القياسي هو ما صدر من كتابات في مجلة (Econometrica) التي كانت تصدرها جمعية الاقتصاديين البريطانيين.

ومنذ عام ١٩٣٣ أوضح محررها راكنر فريش (R. Frich) الطرق التي تستخدم في الاقتصاد القياسي. وقد ذكر بأن النظرية الاقتصادية، والطرق الإحصائية، والأساليب الرياضية هي شروط أساسية لفهم الاقتصاد القياسي ولكنها ليست بالضرورة شروطا كافية Sufficient Conditions لاستيعاب الطريقة الكمية لاحتساب أثر المتغيرات الاقتصادية.

وقبل عام ١٩٣٣ كانت هناك محاولات عديدة لإيجاد قيم عددية لبعض متغيرات النظرية الاقتصادية أهمها محاولات الاقتصادي باريتو (V. Pareto) (١٨٤٨-١٩٢٣) في توزيع الدخول في ضوء البيانات الدولية . وكذلك آرنست أنجل (Ernst Engel) في إيجاد العلاقة بين الدخل والإستهلاك في ضوء تحليل بيانات ميزانية الأسرة ١٨٢١. وفي بداية القرن

التاسع عشر / حاول الاقتصادي هنري مورا * H..L. Morra تحديد قيم عددية لبعض العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية.

وقد طور كل من كوب-دوكلاس Cobb-Douglas معادلتهما المشهورة عام ١٩٢٨. والتي عرفت باسم دالة الإنتاج لكوب-دوكلاس.

وبعد الثلاثينات بدأ الاقتصاديون يتعاملون في تقدير العلاقات الاقتصادية التي تتكون من مجموعة (Set) من المتغيرات بدلا من متغيرين مثل أعمال آيرفنج فيشر Irving Fishr (١٩٤٧-١٩٦٧) في تحديده لأثر المتغيرات التي تؤثر على سعر الفائدة وكمية النقود. وبدأت الصورة تكتمل في تكوين علم الاقتصاد القياسي الذي ابتدأ بكتاب واضح لأسس هذا العلم هو كتاب (طرق الاقتصاد القياسي) للبروفيسر ج . جونستن ثم كتاب (النظرية القياسية) للبروفيسر كوستيانس، وبعدهما توالت الكتب بالظهور.

إن أصل هذا المصطلح (Econometrics ) يوناني ويتكون من مقطعين هما (Economic) أي علم الاقتصاد و (Metrics) اي القياس (المتر) إذن، يمكن أن يطلق عليه بالاقتصاد القياسي الذي يهتم بقياس المتغيرات الاقتصادية . في حين يرى البروفيسر أوسكار لانكه بأن أصل هذا المصطلح محور من مفهوم Bio-matrics الذي ظهر في القرن التاسع عشر في حقل الدراسات البيولوجية وقد أصبح فيما بعد علما مستقلا بحد ذاته، وأصبحت له مجلة علمية خاصة تسمى Bio-matrika[1].

---

* ابتدأت البحوث الخاصة بتحديد منحنيات العرض والطلب في ضوء المعطيات الإحصائية في الولايات المتحدة بصورة رئيسية. حيث قام الاقتصادي الأمريكي (مورا H. .L.Moora) بأول محاولة من هذا النوع في عام ١٩١٧ لتحديد أثر ثمن القطن في حجم انتاجه واستهلاكه أظهرها مؤلفه: الموسوم "Forecasting The Yield And Price Of Cotton" ولقد طور تلميذه (هنري شولتز Henry Schultz ) فيما بعد الأسس العملية المتعلقة بقياس العرض والطلب ونشر أفكاره في عام ١٩٢٩ في كتابه الموسوم:

Statistical Laws Of Demand And Supply With Special Application To Suger, And Measarement Of Demand.

وقد قام ليونتيف W. Leontief بنشر بحث تحت عنوان (An A Ttempt Of Stattistical Analysis Of Demand And Supply) والذي عالج من خلاله مشاكل مشابهة لتلك المشاكل المطروحة من قبل موراوشلولتز.

(1) O. Lange, "Introduction To Econometrics 4th Edition", Poland, Ch1,P15.

وترى بروفيسر كوتسيانس Koutsoyiannis[١] بأن علم الاقتصاد القياسي يـدمج بـين النظريـة الاقتصادية والرياضيات والإحصاء بالرغم من كون كل منها يمثل علما منفصلا وقائمـا بحـد ذاتـه، ويهدف إلى إعطاء مظهر بالقياس الكلي للظواهر الاقتصادية والتنبؤ بها، واختبار فرضياتها وأهـم ما يميز الاقتصاد القياسي عن النظرية الاقتصادية والاقتصاد الريـاضي والإحصـاء وهـو أنـه يجمـع هذه العلوم الثلاثة التي تتكامل في تـوفير قـيم عدديـة للمـؤشرات الاقتصـادية وتـوفر لهـا فهـما حقيقيا وكميا.

ويعتبر أوتس وكليجين H. Kelejian Adn W. Oates[٢] أنه أحد فروع علم الاقتصاد الذي يبحث في التحليل الكمي للسلوك الاقتصادي، في حين يرى البروفيسر[٣] J.Johnston [٤] أن الاقتصـاد القيـاسي فرع من علم الاقتصاد وهو الفرع الذي يبحث في التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية الحقيقيـة مستعينا بتطور النظرية الاقتصادية والطرق الإحصائية، في حين يجـد البروفيسر A.S. Goldberger[٥] أن الاقتصاد القياسي يستخدم أدوات النظرية الاقتصـادية والرياضـيات والإحصـاء لتحليـل الظـواهر الاقتصادية. ويجد البروفيسر H. Theil[٦] أن الاقتصاد القياسي يتعامل مع التحديد العـددي للقـوانين الاقتصادية، ومفهوم البروفيسر C.V . leser لا يتعدى ما سبق شرحه حيـث يتضـمن علـم الاقتصـاد القياسي النظام الذي يحاول تأسيس علاقات رياضية بين المتغـيرات الاقتصـادية بمسـاعدة الطـرق الإحصائية .وقد عرف الاقتصاد البولندي البروفيسر Oskar Lange [٧]

---

(1) A. Koutsayinannis, "The Theory Of Econometrics". Second Edition , 1977. The Macmillan Press Ltd, London , Chl, P3.

(2) H. Kelejian And . W. Oates. Introduction To Econometrics, Principles And A pplications ", Harper International Edition London, 1974, Ch1,P.2.

(3) P.A Samuelson,T.C. Koopmans Adn J.R.N. Stone,"Report Of Evaluative Committee For Econometrica" :Econometrica, Vol22, No 2, April 1954 Pp. 141-146.

(4 ) J. Johnston: Econometric Methods": International Staudent Edition , Me GrawHill International Book Company, London 3ed, 1984, Ch1, P.2.

(5) A. S.Goldberger,"Econometric Theory": John Wiley &Sons Inc,New York1964. P.1.

(6) H. Theil, "Principle Of Econometrics": John Willey & Sons Ins, New York 1971.P.1.

(7) Oskar Langge :" Introduction To Econometrics ", Pergamon Press, Oxford , 4th Ed, 1978, Ch1, P. 13.

الاقتصاد القياسي بأنه العلم الذي يبحث في تحديد قوانين كمية ثابتة بالطرق الإحصائية لمتغيرات الحياة الاقتصادية. وهناك تعاريف أخرى جاء بها العديد من الاقتصاديين القياسيين أمثال R. Wonnacott and T. Wonnacott, D. Gujarati, M. Dutt. كوبمانس Koopmans، ستون Stone و Chowو غيرهم . أما بالنسبة للاقتصاديين العرب فقد عرفه الأستاذ الدكتور محمد سعد الدين الشيال[١] بتعريف لا يختلف كثيرا عن التعاريف السابقة الذكر ، كما عرفه الدكتور عصام عزيز شريف بأن "القياس الاقتصادي" فرع من فروع علم الاقتصاد يستخدم التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية الواقعية المبني على أساس التماسك بين النظرية والمشاهدة، متخذا لذلك أساليب استقراء ملائمة" وهذا التعريف جاء معتمدا على تعاريف ساملسون وستون وكوبمانس. وأطلق عليه اسم القياس الاقتصادي [٢] Economic Measurmentويتفق معه على هذه التسمية الدكتور عادل عبد الغني محبوب الذي يذهب إلى أبعد من هذا حيث إنه يستخدم المصطلح الانكليزي الحرفي لهذا العلم ويطلق عليه كلمة ايكونومتركس.[٣]

وأخيرا نجد أن مصطلح Econometrics يعني الاقتصاد القياسي، وهي الترجمة الأكثر تعبيرا عن مفهوم هذا العلم الذي يدمج بين النظرية الاقتصادية، واستخدام الطرق الإحصائية والرياضية، للوصول إلى تقييم كمي للمتغيرات الاقتصادية: كاحتساب المرونات، الميول ، معدل التغيرات ،معدلات النمو، والمضاعف..وغيرها. وأخيرا ارتبط علم الاقتصاد القياسي وبقوة بموضوع تحليل الانحدار Regression Analysis [٤]، والاستدلال الاحصائي Statistical Infrence لاعتماده عليهما ولاستخدامها لأسلوب (OLS) واختبار الفرضيات (كما سنلاحظ ذل لاحقا).*

---

(١) الدكتور سعد الدين الشيال : مقدمة في الاقتصاد القياسي ، القاهرة،١٩٨٣.

(٢) الدكتور عصام عزيز شريف :"القياس الاقتصادي" دار الطليعة ، بيروت ١٩٨١.

(٣) الدكتور عادل عبد الغني محبوب "الاقتصاد القياسي-ايكونومتركس" وزارة التعليم العالي والبحث العلمي ،الطبعة الأولى عام ١٩٨٢ ص١٦.

(٤) D. Salvatore: "Statistic And Econometircs" : Schaurm's Outline Series, Megraw-Hall Book Co,London 1976, P.4. P.4.

* لمزيد من الإطلاع ينظر:

(٤) الدكتور محمد لطفي فرحان "مبادىء الاقتصاد القياسي" جامعة الفاتح- طرابلس-ليبيا١٩٩٩.

(٥) الدكتور فاضل أحمد وآخرون " مقدمة في الاقتصاد القياسي التطبيقي".
جامعة قار يونس - بنغازي-ليبيا - ٢٠٠٠.

(١:٢) علاقة الاقتصاد القياسي التحليلي بالرياضيات.

يضع الاقتصاد الرياضي النظرية الاقتصادية في صيغ رياضية هي المعادلات التي تأخذ أشكالا دالية (Functional forms) مختلفة ولا يوجد اختلاف جوهري بين النظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي، حيث إن كليهما يعرض العلاقات الاقتصادية في صيغة محددة (مضبوطة) (Exact form) كما هو الحال في دالة الاستهلاك التي تعد الاستهلاك دالة للدخل أي $Y = f(X)$ بينما العرض الرياضي لها هو:

(١) .......... $Y = \alpha + \beta X$ ودالة الطلب فإن عرضها الرياضي هو:

$$Q_d = b_0+b_1P_1+b_2P_2+ b_3Y + b_4t \qquad ............(2)$$

حيث إن :

- $Qd$ - تمثل الكمية المطلوبة من سلعة معينة.
- $p_1$ - تمثل سعر السلعة المعينة.
- $p_2$ - تمثل سعر السلعة البديلة.
- $y$ - تمثل دخل المستهلك.
- $t$ - تمثل ذوق المستهلك.

**المثال:**

تشير المعادلة إلى أن الطلب سوف يتغير بتغير واحد من هذه العوامل أو بعضها أو كلها مجتمعة، دون أن تكون هناك أية عوامل أخرى تؤثر في الكمية المطلوبة. ومن البدهي أن هناك العديد من العوامل الأخرى التي تؤثر في الكمية المطلوبة في الحياة الاقتصادية كأن تظهر سلعة جديدة أو كأن تندلع حرب أو تحدث تغيرات مهنية أو تغيرات في القانون أو تغير بتوزيع الدخل وحركة السكان، مثل الهجرة، هذا من جهة ومن جهة أخرى فإن السلوك البشري يتصف بعدم الانتظام، وبالتالي لايمكن التنبؤ به فهو يتأثر بعوامل نفسية واجتماعية وعقدية فيطرأ تغيير على هذا السلوك بالرغم من بقاء العوامل المحددة في المعادلة (variables) على حالها.

لذا فإن القياسي يأخذ بنظر الاعتبار هذه العوامل فيضيف إلى المعادلة:

١- متغيرا عشوائيا ذا خصائص محددة من العلاقات الاقتصادية، وهذه الخصائص سوف يتم تناولها بالفصول القادمة، وعلى هذا الأساس فإن الشكل الرياضي لدالة الطلب كما يصفها الاقتصاد القياسي تكون كالآتي

$$Q_d= b_0+b_1P_1+b_2P_2+b_3y+b_4t+U \qquad ............. (3)$$

حيث أن U تمثل العوامل العشوائية التي تؤثر في الكمية المطلوبة، وهذا التأثر قد يكون موجبا أو سالبا إلا أنه يساوي صفرا في المتوسط. ’ن إدخال المتغير العشوائي يسمح بظهور انحرافات في المشاهدات الفردية عن العلاقات المضبوطة التي تقترحها النظرية الاقتصادية.

إن طبيعة المتغير العشوائي هي من أهم المواضيع في الأبحاث القياسية؛ لأنه يربط بين العلاقات المضبوطة التي تقترحها النظرية الاقتصادية والصيغة العشوائية للحقائق الاقتصادية.

ولكن يوجد اختلاف بين الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي، حيث إن الأخير لا يعرض المشكلة في شكل محدد وإنما يدخل العنصرين التاليين وهما:

١- إضافة المتغير العشوائي Randoum variable (U) إلى المعادلة (١).

٢- إيجاد تقدير لمؤشرات المعادلة Estimation of Parameters ( $\alpha$ , $\beta$,)

وعليه فإن العرض الاقتصادي القياسي لدالة الاستهلاك ودالة الطلب يأخذ الشكل التالي:

$$Y = \alpha + \beta X + U \qquad ..........................(2)$$

$$Q = b_0+b_1P_1+b_2P_2+b_3y+b_4t+U \qquad ............... (3)$$

في حين يهتم الاقتصاد الرياضي بالعلاقة الدالية المحددة Deterministic Functional Relationships) ) للمتغير التابع من واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة (المشروحة) Explanatory Variables. أما الاقتصاد القياسي فإنه يأخذ جميع تلك المتغيرات التي تعطيها النظرية الاقتصادية مضافا إليها متغيرات المتغير العشوائي.

(١:٣) علاقة الاقتصاد القياسي التحليلي بالإحصاء:

سبق وأن عرفنا أن علم الإحصاء هو الذي يبحث في عملية جمع البيانات وعرضها تبويبها، تقييمها وتحليلها ، واستخدام الأساليب والطرق العلمية بهدف الوصول إلى استنتاجات وقرارات مناسبة[١] . كما أن الإحصاء الاقتصادي (Statistical Economics) هو الذي يمثل استخدام الجانب الوصفي من الإحصاء (Descriptive Aspect) في المجال الاقتصادي الذي يتعلق بجمع البيانات وجدولتها، ومحاولة وصف التطورات الحاصلة فيها خلال فترة زمنية معينة. وربما اشتقاق بعض العلاقات بين متغيرات الظاهرة المدروسة.

---

(١) لمزيد من الإطلاع ينظر:

الدكتور خاشع الراوي،"المدخل إلى الإحصاء" ، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، جامعة الموصل ١٩٨٤. ص٨.

وبدون اللجوء إلى التقييم لمؤشرات المتغيرات الاقتصادية. في حين يقوم الإحصاء الرياضي (Mathematical Statistics) [1] باستخدام طرق تقييم مؤشرات التغيرات الاقتصادية التي تم الحصول عليها من التجارب الحقلية أو المختبرية. أي بافتراض ثبات المتغيرات.في حين يبحث التحليل الإحصائي (Statistiical Analysis)[2] في الوسائل المناسبة لتقييم العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية غير المحددة(Inexact)وغير المختبرية(غير الحقلية) (Nonexperimental) لتكوين بيانات اقتصادية بهدف الوصول إلى نتائج مرضية.

ويستخدم الاقتصاد القياسي الطرق الإحصائية بعد تدقيقها وتكييفها (Adaptintg) مع المشاكل الاقتصادية . وهذا التكييف للطرق الإحصائية (Statrstical Methods ) يسمى الطرق القياسية Econometrics Methods وأصبحت هذه الطرق بعد إجراء بعض التعديلات ملائمة لقياس العلاقات الاقتصادية بعد إدخال العنصر العشوائي عليها الذي له مكانة في واقع الحياة الاقتصادية، حيث جعل ذلك تطبيق طرق الإحصاء بدون ادخال تعديلات غير ممكن. وذلك لتحول البيانات إلى صور عشوائية بدلا من قيم ثابتة.

كذلك في الفيزياء وبقية العلوم ،حيث يلجأ الباحثون عادة إلى تثبيت جميع الظروف وتغيير عنصر واحد في التجربة. ويستطيع الباحث تسجيل جميع النتائج وقياس التأثير للتغير في العنصر باستخدام الطرق الاحصائية التقليدية لاشتقاق قوانين تحكم الظواهر المدروسة. في حين أنه في الدراسات الاقتصادية للسلوك البشري لا يمكن تغيير عنصر واحد مع بقاء بقية العناصر أو المتغيرات دون تغير . في الحياة الواقعية نجد أن جميع العناصر تتغير سوية وباستمرار وهي غير خاضعة للسيطرة المختبرية أو الحقلية، فمثلا لا نستطيع تغيير الدخل فقط وترك الأسعار والأذواق وبقية المتغيرات ثابتة؛ لأن العوامل الأخيرة سوف تتغير هي الأخرى بتغير الدخل.

(١:٤) أهداف الاقتصاد القياسي التحليلي:

يمكن أن نميز بين ثلاثة أهداف رئيسية للاقتصاد القياسي تتمثل في :

١- الاختبار Testing للنظرية الاقتصادية.

٢- اتخاذ القرار Decision Making بعد تقدير معلمات النموذج.

٣- التنبؤ Prediction.

---

(1) D. Gujarati; "Basic Economitrics ": Bernard Baruch College City, University Of New Yourk, 1978, P.2.

(2) D . Salvatory "Ststistics And Econometrics, Op. Cit, P.5.

وهذه الأهداف ليست بالضرورة مكملة لبعضها بعضا. ولكن الباحث القياسي في دراسته التطبيقية عليه أن يعمل على دمج أو التوفيق بين هذه الأهداف أو دمجها، وأن تتضمن دراسته على الأقل اثنين منها إن لم نقل جميعها، ويمكن توضيح هذه الأهداف كما يلي:

**١- الاختبار Testing.**

ويقصد به اختبار النظرية الاقتصادية[1] ، حيث بنى الاقتصاديون نظرياتهم على مجموعة من الفرضيات ، واستخدموا السببية والتحليل المنطقي لدعم نظرياتهم وإثباتها من واقع الظواهر الاقتصادية المدروسة، وبدون محاولة اختبار صحة تلك النظريات واتساقها. بينما هدف الاقتصاد القياسي هو التقييم والتحليل ، ومحاولة الحصول على قيم عددية لاختبار قوة المتغير المستقل في تأثيره على سلوكية المتغير التابع ، وبهذا نجد أن الاقتصاد القياسي هو المقيم للنظرية الاقتصادية . ومهما كان منطق النظرية قويا ومسموعا ،فإنه بدون الاختبار العددي تصبح النظرية غير مقبولة وغير مسموعة.

**٢- اتخاذ القرار Decision Making.**

ويقصد به الحصول على تقييم عددي لمعلمات العلاقات الاقتصادية لتساعد في اتخاذ القرا، حيث يلجأ الاقتصاد القياسي وباستخدام طرق و أساليب مختلفة لايجاد قيم لمعلمات العلاقات الاقتصادية كالمرونات Elasticities ، المعلمات الفنية للإنتاج وعوامله Technical Coefficients Of preoduction ، الكلفة الحدية Marginal cost ، الإيرادات الحدية Marginal Revenues. والميل الحدي للاستهلاك والاستثمار والاستيراد... الخ أي (Marginal propencity Of Consumption ( Investment, Import...ect).[2] أن معرفة القيم العددية لهذه المعلمات تساعد في عملية المقارنات، واتخاذ القرار المناسب ، سواء على مستوى المؤسسة أو "ويوفر الاقتصاد القياسي تقييما عدديا لهذه المعاملات التي أصبحت أحد الأدوات الأساسية عند اتخاذ أي قرار يتعلق بأي متغير اقتصادي"[3].

**٣- التنبؤ Prediction.**

يهيىء الاقتصاد القياسي القيم العددية لمعلمات المتغيرات الاقتصادية التي تساعد متخذي القرار في رسم السياسة، وفي التنبؤ عن اتجاهات هذه المتغيرات مستقبلا، فمثلا لو

---

(1) A.Koutsoyanmis, "Theory Of Econometrics": Harper Or Rwo, Publishers. Inc, Newyork, 1973. P.15.

(2) M.Dutta; "Econometric Methods", South Western Co; New York , 1968,P.5.

(3) A. Koutsoyannis; "Theory Of Econometiecs": Op. Cit, P.15.

أرادت الحكومة أن تحدد سياسة الاستخدام (العمالة) فمن الضروري جدا أن تحدد مستوى الاستخدام الجاري، وماذا سيكون عليه هذا المستوى مستقبلا (خلال خمس السنوات القادمة مثلا) . وكيف يحدد الاقتصاد القياسي بوسائله الخاصة مستوى الاستخدام فيما إذا كان عاليا أو متدنيا بحيث تستطيع الحكومة معاجلة ذلك تفاديا للتضخم أو الانكماش . وأن عملية التنبؤ بسلوكية المتغيرات أصبحت ضرورية سواء بالنسبة للبلدان التي تأخذ بالتخطيط الاقتصادي أو الاقتصاد الحر، وفي البلدان النامية أو المتطورة على حد سواء.

(١:٥) أقسام الاقتصاد القياسي التحليلي:

يتكون الاقتصاد القياسي من فرعين رئيسين هما:

**١- قياسي نظري Theoretical Econometrics.**

يتضمن هذا الفرع استخدام الطرق المتطورة في قياس المتغيرات الاقتصادية وبالخصوص الطرق الإحصائية Statistical Methods [١] التي طوعت لتتلاءم وخصائص العلاقات الاقتصادية، وهذه الطرق الاحصائية يمكن تقسيمها إلى قسمين:

**أ- طرق المعادلة المفردة Single-Equation Techniques.**

وهي الطرق التي تطبق على علاقة اقتصادية واحدة وخلال فترة زمنية معينة.

**ب- المعادلات الآنية Simulteaneous-Equation Techniques.**

وهي الطرق التي تطبق على علاقات نماذج اقتصادية آنية.أي أكثر من علاقة واحدة وأكثر من معادلة (انظر الشكل -١).

**٢- قياسي تطبيقي Applied Econometrics.**

ويتضمن التطبيقات للطرق القياسية على فروع معينة من النظرية الاقتصادية، مثل: العرض، .الطلب ، الإنتاج ، الاستثمار، الاستهلاك وغيرها من قطاعات النظرية الاقتصادية . ويتطرق القياسي التطبيقي إلى استخدام أدوات القياس النظري لتحليل الظواهر الاقتصادية والتنبؤ بالسلوك الاقتصادي، وعليه فإن الشكل (١) أدناه يوضح هذين الفرعين الأساسين مع أجزائهما [٢] وأن هذا التقسيم اصبح يمثل المفردات الأساسية لهذا العلم. وهي بدورها تشكل خطة هذا الكتاب حيث تم تقسيمه على أقسام هذا العلم، إضافة إلى تطوير الدراسات التطبيقية التي أخذت صيغا أوسع.

---

(1) J. Johnston,"Econometric..;" Op.Cit, P.6.

(2) J. Johnston, Op. Cit; P.7.

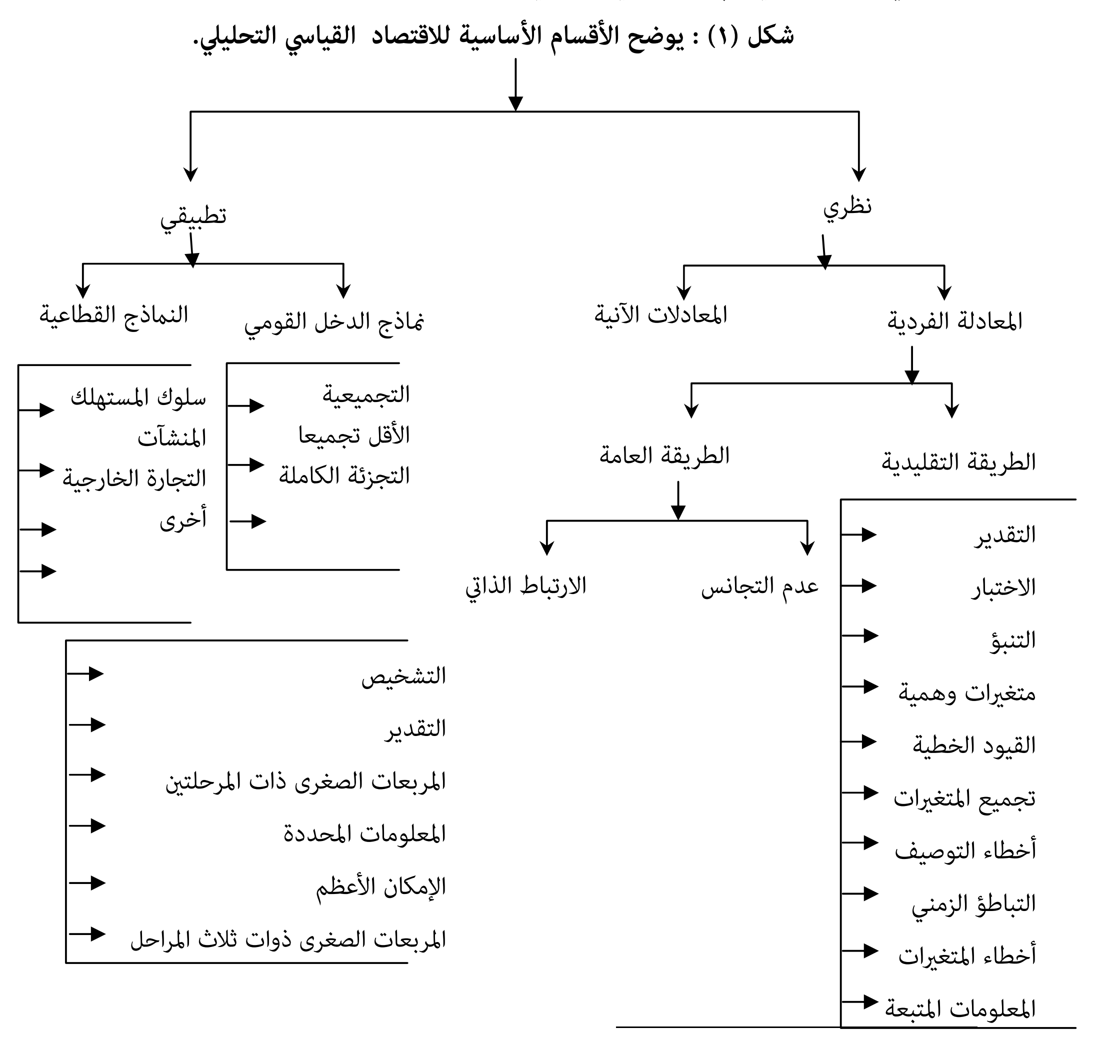
(١:٦) خطوات المعالجة القياسية للظواهر (المشاكل) الاقتصادية:

تتطلب المعالجة القياسية للظواهر الاقتصادية اتباع الخطوات الآتية:

**١- مرحلة توصيف النموذج Specification Stage.**

وهي مرحلة الاستعانة بالنظرية الاقتصادية لايجاد علاقة دالية بين متغيرين أثنين أو عدد من المتغيرات، وتعرف أيضا بمرحلة تكوين الفرضيات (Formulation Of hypothesis).[1]

**شكل (١) : يوضح الأقسام الأساسية للاقتصاد القياسي التحليلي.**




(1) A. Koutsoyannis, Op. Cit: P. 17.

**٢- مرحلة التقدير Estimation Stage.**

وهي مرحلة الاستعانة بالادوات الرياضية $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}_u^2\right)$ وتحويل الدالـة الاقتصـادية إلى معادلة رياضية لكي يتسنى تقدير مؤشرات تلك المعادلة، أو مؤشرات المعادلات بقيم عددية.

**٣- مرحلة الاختبار Testing Stage.**

وهي مرحلة تقييم تقدير المؤشرات ويتم ذلك باختبار دقة تقـدير المـؤشرات واسـتخدام الأدوات والوسائل الإحصائية المعروفة.

**٤- مرحلة التطبيق والتنبؤ : Application and Prediction Stage**

وهي المرحلة الأخيرة التي توضح الهدف الذي من أجله اسـتخدم هـذا الأسـلوب، وعـادة يتم تقييم قابلية المؤشرات في عملية التنبؤ (Prediction ) وبمساعدة متخذي القرار الاقتصادي. فقد يكون الهدف من النموذج هو "تقدير قيم عددية لمؤشرات المتغيرات الاقتصادية بهدف الوصـول إلى التنبوء بسياسـة اقتصـادية أو تقويمهـا وتحليـل هيكـل اقتصـادي معـين" .[١] ويمكـن تلخـيص مراحل الطريقة أو المعالجة القياسية للظواهر الاقتصادية [٢] كما يلي:

المرحلة ١: النظرية الاقتصادية مثلا ترى بأن الاستهلاك (Y) دالة للدخل (X)

أي: $y = f(x)$ ↓

Economic Theory

ومن ثم تحويلها إلى النموذج الرياضي أي : $Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_1$

↓ Mathematical Model

وتحويله إلى النموذج القياسي (إدخال العنصر العشوائي) أي :

↓ Econometrics Models. $Y_i = \alpha + \beta xi + U_i$

المرحلة ٢: جمع البيانات الملائمة Data Collection.

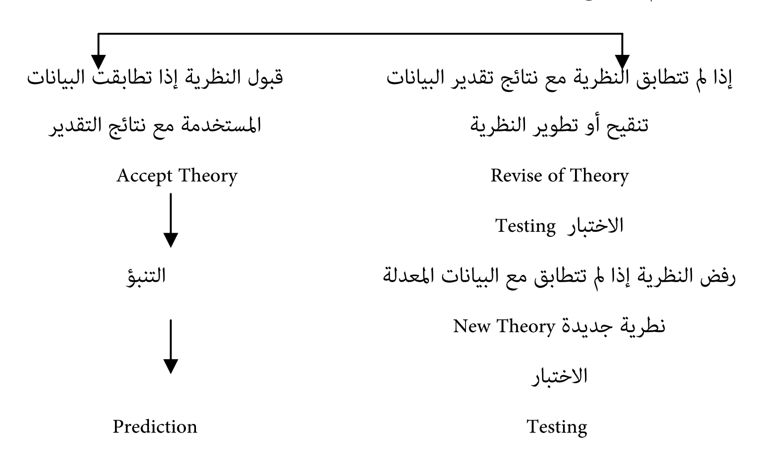
المرحلة ٣: تقدير مؤشرات النموذج $(\alpha, \beta)$ Estimation

---

(١) الدكتور عادل عبد الغني محبوب ، مصدر سابق ، ص٢٤.

(2) D. Salvatory ; "Statistics....,"Op. Cit, P.24.

المرحلة ٤: تقييم النموذج بالاستعانة بالنظرية الاقتصادية والطرق الإحصائية والأساليب الرياضية.




إن المـرحلتين الأولى والثانيـة تعـدان أهـم مـرحلتين في البحـث أو الدراسـة القياسـية، وتتطلبان مهارة وخبرة في عمل النظام الاقتصادي، [1] في حين تحتاج المرحلتان الثالثة والرابعـة إلى معرفة في الأساليب النظرية للاقتصاد القياسي.

(١:٧) تطبيقات وتمارين

(١:٧:١) التطبيقات :

**التطبيق الأول:-**

توضح نظرية طلب المستهلك أن الكميات المطلوبـة ($D_x$)هـي دالـة للسـعر ($P_x$). ودخـل المسـتهلك ($Y$) . وأسـعار السـلع الأخـرى ($P_2$)،وبـافتراض أن أذواق المسـتهلكين ثابتـة خـلال فـترة الدراسة ضع هذه النظرية في:

أ- معادلة أو صيغة خطية.

ب- معادلة أو صيغة عشوائية.

ج- ما هي المعلمات التي يجب تقديرها ؟ و ماذا يطلق عليها؟

**الحل :**

أ- $D_x = \beta_0 + \beta_1 P_x + \beta_2 Y_i + \beta_3 P_2.$

(1) D. Gujarati; -Coujarad, " Basic Econometric, Op. Cit, P.5.

ب- $D_x = \beta_0 + \beta_1 P_x + \beta_2 Y_i + \beta_3 P_2 + U_i$

ج- المعلمات (Coefficients) التي يجب تقديرها هي $(B_0, B_1, B_2, B_3)$

ويطلق عليها: المؤشرات (Parameters).

**التطبيق الثاني:**

من نظرية طلب المستهلك المذكورة في المثال أعلاه ، فسر مايلي.

أ- الخطوة الأولى الأساسية في الاقتصاد القياسي التحليلي.

ب- ما هي أولويات توقعات النظرية ؟ وما هي علامة وحجم المؤشرات المتوقعة لدالة طلب المستهلك المذكورة في المعادلة(ب) المثال (١) أعلاه؟

**الحل :**

أ- الخطوة الأولى في التحليل القياسي هي شرح نظرية طلب المستهلك في صيغة معادلة عشوائية (المعادلة (ب) في المثال (١) أعلاه). والتي تشير أولويات توقعات النظرية فيما يخص الإشارة والحجم المحتمل لمؤشرات الدالة.

ب- تفترض نظرية المستهلك بموجب المعادلة (ب) المذكورة في المثال (١) أن:

$b_1 < 0$ وهذا يعني أن السعر والكمية علاقتهما عكسية مع المتغير التابع $(D_x)$ .

$b_2 > 0$ إذا كانت السلعة طبيعية (Normal goods) . وهذا يعني أيضا أن المستهلك يشتري سلعا عند المستويات العالية من الدخل.

$b_3 > 0$ هذا إذا كانت السلعتين (X) و (Z) استبداليتين . وأن $b_3 > 0$ إذا كانت السلعتين (X) و (Z) متكاملتين (Complements).

**التطبيق الثالث:**

أشرح في صورة معادلة خطية كون مستوى الاستثمار (I) يعتمد في سلوكيته على سعر الفائدة (R).

**الحل :**

ان الاستثمار دالة خطية لسعر الفائدة ، أي:

$$I = \alpha + \beta R$$

هذا مع افتراض أن (β) موجبة. وبإضافة العنصر العشوائي على هذه المعادلة نحصل على معادلة الاستثمار القياسية الآتية:

$$I_i = \alpha + \beta R_i + U_i$$

(١:٧:٢) التمارين:

١- ناقش المقصود بالمتغير العشوائي . وما هي مبررات استخدامه في النموذج الاقتصادي؟

٢- ماذا تعني العبارة التالية "المتغير (x) له توزيع طبيعي"؟

٣- ما هو الفرق بين العلاقة الرياضية.والعلاقة الاحصائية.والعلاقة القياسية أستشهد ببعض الأمثلة.

٤- ما هي أوجه الاختلاف والشبه بين علم الاقتصاد وكل من الاقتصاد الرياضي،الاقصاد القياسي، الإحصاء الاقتصادي؟

٥- هل يعد موضوع الاقتصاد القياسي مرادفا لموضوع تحليل الانحدار ؟ كيف؟

٦- تنص النظرية الاقتصادية "على وجود علاقة طردية بين ارتفاع الدخل القومي وزيادة الانفاق على الاستهلاك" كيف يمكن أن يعبر عن هذه علاقة رياضيا وقياسيا؟ أذكر خمس علاقات اقتصادية رياضية وقياسية متشابهة؟

٧- كيف يختلف ويتطابق الأسلوب الوصفي مع الأسلوب الكمي في معالجة الظواهر الاقتصادية؟ أيهما تفضل ؟ ولماذا؟

٨- ما هي أهم وظائف الاقتصاد القياسي؟ وما هي مظاهر اختلافه عن العلوم الصرفة؟

٩- بأية طريقة ولأي غرض يجتمع كل من النظرية الاقتصادية والرياضيات والتحليل الإحصائي لتكوين علم الاقتصاد القياسي؟

١٠- ناقش العبارة الآتية: "ليس من الضروري أن تتضمن علاقة الارتباط بين متغيرين علاقة سببية". أعط خمسة أمثلة على حالات الارتباط اللامعقول بين المتغيرات.

١١- أذكر مراحل خطوات المعالجة القياسية للظواهر الاقتصادية قيد الدرس ناقشها بتركيز . مع إعطاء أمثلة من النظرية الاقتصادية.

١٢- ضع تخطيطا توضح فيه مراحل المعالجة القياسية للنظرية الاقتصادية.

١٣- ناقش بتركيز أهداف ومكونات الاقتصاد القياسي.

١٤- ما رأيك في منهج "الاقتصاد القياسي دون النظرية" أعط بعض الأمثلة لتوضيح مدى العون الذي يمكن أن يستمده الباحث من النظرية الاقتصادية وهو بصدد تقدير بعض العلاقات الاقتصادية".

١٥- ناقش بتركيز العبارة الآتية " يعد الاقتصاد القياسي هو المقيم للنظرية الاقتصادية ".

١٦- ناقش بتركيز العبارة الآتية :"تعد مرحلتا التطبيق والتنبؤ أهم خطوتين من خطوات المعالجة القياسية".

# الفصل الثاني

# مكونات النموذج الاقتصادي وبناؤه

(٢:١) مفهوم النموذج الاقتصادي.

(٢:٢) العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.

(٢:٣) مكونات النموذج الاقتصادي.

(٢:٤) تركيب النموذج الاقتصادي.

(٢:٥) أنواع النماذج الاقتصادية.

(٢:٦) تطبيقات وتمارين.

# الفصل الثاني

## مكونات النموذج الاقتصادي وبناؤه

## Economic Model

قبل الدخول إلى موضوع الاقتصاد القياسي لا بد من معرفة بعض المفاهيم ذات العلاقة الوثيقة بهذا العلم وفهمها، ومن الشروط الأساسية للتعامل مع الاقتصاد القياسي أن تكون لديك معلومات في الأساليب الرياضية كالمصفوفات، التفاضل والتكامل، وكذلك بعض المعلومات عن الأساليب الإحصائية وخاصة فيما يتعلق بالاختبارات وتحليل التباين إضافة لذلك فإن فهم الاقتصاد القياسي يتطلب المعرفة التامة بالنظرية الاقتصادية وبشقيها الجزئي والكلي. وبعد توفير هذه الأساسيات، تبدأ عملية فهم أساسيات الاقتصاد القياسي، والمفتاح لذلك هو أن تفهم مكونات النماذج الاقتصادية وأنواعها؛ لأن النموذج هو المادة الأساسية التي سيتعامل معها هذا العلم، وسيتناول هذا الفصل مفهوم النموذج الاقتصادي أولا.

(٢:١) مفهوم النموذج الاقتصادي : Concept of Economic Model

يعرف النموذج الاقتصادي بأنه مجموعة من العلاقات الاقتصادية التي توضع عادة بصيغ رياضية تسمى المعادلة (أو مجموعة المعادلات) Equations ، التي تشرح سلوكية أو ميكانيكية هذه العلاقات التي تبين عمل اقتصاد أو قطاع معين، ويطلق عليها المعادلات الهيكلية (Structural Equations ) . والنموذج الاقتصادي هو صورة مبسطة تمثل النشاط الاقتصادي للبلد وللقطاع خلال فترة زمنية معينة وفي شكل رموز وقيم عددية.ولكي يكون النموذج قادرا على قياس العلاقات الاقتصادية لا بد من أن تتوفر فيه بعض المزايا التالية:

١- تطابق متغيرات النموذج مع منطوق النظرية الاقتصادية.

٢- تطابق تقدير معلمات النموذج وقيمها الواقعية.

٣- إمكانية استخدام القيم المقدرة لمتغيرات النموذج في اتخاذ القرار والتنبؤ.

٤- بساطة عرض النموذج للعلاقات الاقتصادية بمعادلات رياضية تتطابق ومنطوق النظرية الاقتصادية. وقد يتضمن النموذج الاقتصادي من معادلة واحدة أو اثنتين أو ثلاث أو أكثر من ذلك بكثير. والنماذج لا تعكس الواقع الاقتصادي. وإنما تعطي صورة مقربة.

ومهما كبرت فهي ليست حقيقية وإنما هي صورة تقريبية.

٥- ولكي يكون للنموذج حل لا بد أن يكون عدد المعادلات الهيكلية مساويا لعدد المعلمات الموجودة في النموذج. بمعنى أنه لكي يكون بالإمكان الحصول على قيمة واحدة لكل معلمة من كل معادلة من معادلات النموذج فإنه ينبغي أن يكون هناك حل معقول لمعادلات النموذج.

(٢:٢) العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية:

لشرح العلاقة بين متغيرات النظرية الاقتصادية بدقة فإننا نحتاج إلى صياغتها بصورة رياضية كأن نقول يتغير الاستهلاك إذا تغير الدخل. فهذه العلاقة السلوكية يمكن صياغتها باستخدام الرموز والمعادلات للتعبير بالصورة الرياضية عن تلك العلاقة. وهناك العديد من العلاقات التي تحتويها النظرية والتي يمكن صياغتها رياضيا. مثال ذلك كلما انخفض سعر سلعة ما زاد الطلب عليها. وكلما انخفض سعر الفائدة قل الادخار، وكلما زاد العرض من سلعة معينة انخفض سعرها وغير ذلك.

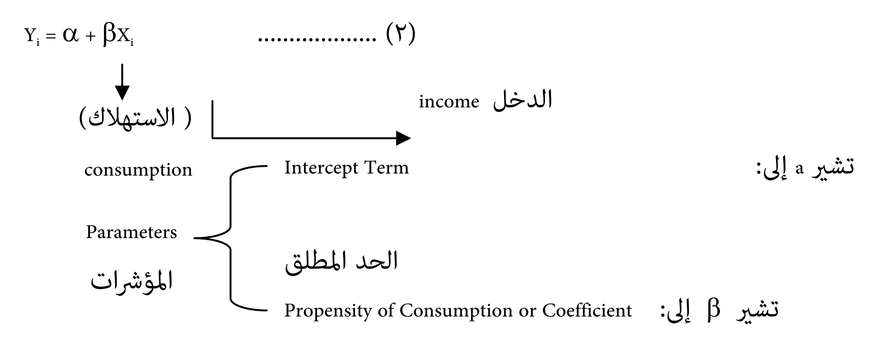
كذلك فإن العلاقة بين المتغيرات لا تقتصر على متغيرين فقط وإنما قد تكون هناك مجموعة من المتغيرات التي تؤثر على متغير معين. وبهذا تعبر الصيغة الرياضية عن العلاقة بين متغيرين أو أكثر. ويتوقف ذلك على طبيعة العلاقة بين المتغيرات ومدى إمكانية صياغتها رياضيا باستخدام المعادلات والرموز. (انظر الفصل الثالث). وبجمع الصيغ الرياضية يتشكل ما يسمى بالنموذج الرياضي. ولشرح العلاقة بين المتغيرات نأخذ المثال التالي:

تفترض النظرية الاقتصادية بأن الإستهلاك هو دالة للدخل أي:

$Y_i = f(X_i)$ ................(١)

ويمكن التعبير عن هذه الدالة رياضيا بالمعادلة أدناه:

$Y_i = \alpha + \beta X_i$ .................. (٢)




تشير a إلى:

تشير β إلى:

أو معامل المعادلة أو الميل الحدي للاستهلاك (أوميل الخط) (MPc) .

تمثل هذه المعادلة العلاقة الخطية بين متغيرين اقتصاديين تم افتراضهما من قبل النظرية الاقتصادية . ورياضيا تعطي هذه المعادلة قيما محددة ( exact values) ، وبدون الأخذ بنظر الاعتبار المعلمات الأخرى. وحيث إن المعادلة (٢) لا تشرح العلاقة بين المتغيرين بشكل ملائم. وحتى إذا أضفنا متغيرات مستقلة أخرى (كما سيوضح ذلك في الفصل الخامس) فإنه تبقى هناك انحرافات عن العلاقة الحقيقية (True relation) وهناك أسباب عديدة جعلت شكل هذه المعادلة يتخذ الصورة التالية:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i \qquad \text{................ (٣)}$$

تختلف المعادلة في (٣) عن المعادلة (٢) الرياضية التي تعطي قيما محددة في كون المعادلة (٣) تأخذ الشكل القياسي أي أنها أخذت بنظر الاعتبار بقية العوامل أو المتغيرات المستقلة الأخرى التي تؤثر على سلوكية المتغير التابع. وتسمى بحد الاضطرابات ( Disturbances Term) أو (Error - Term ) أو البواقي (Residuals ) أو حد التصادفية ( Stochastic Term) [1] .

ومن هذا نجد أن المعادلة الرياضية هي تفسير حرفي لمنطوق النظرية ولكن بشكل رموز ومعادلات وأعداد. في حين يتخذ التفسير الاقتصادي القياسي الصيغة الرياضية للنظرية الاقتصادية مضافا إليه المتغير العشوائي.

ولتوضيح النموذج القياسي نأخذ المثال التالي:

تفترض النظرية الاقتصادية بأن الطلب على سلعة معينة (Q) يعتمد على أسعار السلعة نفسها (P) . وأسعار السلع الأخرى (Po). ودخل المستهلك . ($Y_i$) وعلى الأذواق (T) أي:

$$Q = f\ (P.Po, Y, T)$$

وهذه الدالة يمكن صياغتها رياضيا كالآتي:

$$Q_i = b_0 + b_1P_i + b_2P_0 + b_3\,Y_i + b_4T_i$$

حيث إن ($b_0$) تمثل الحد المطلق . و ( $b_1, b_2, b_3, b_4$) تمثل معلمات النموذج . وكل منهما مجهول القيمة . ويطلق عليهما المؤشرات (Parameters ) وتمثل هذه المعادلة بالضبط منطوق النظرية الاقتصادية . وتفترض عدم وجود عوامل أو متغيرات قد تؤثر على الطلب

---

(1) J.Johnston, " Econometric Memods": second Ed, McGrow Hill, International Student ed, London, 1972, p.14.

مثـل الاختراعـات ، الإنتـاج الجديـد،إعادة توزيـع الـدخول . الهجـرة . الحـرب. الكـوارث الطبيعية. تغيير التشريعات والقوانين. التغيرات الهيكليـة في مؤسسـات الدولـة .إضـافة إلى كـون العنصر البشري يتأثر بعوامل إجتماعية ونفسية كثيرة.

في حـين أن الاقتصـاد القيـاسي يأخـذ كـل هـذه العوامـل (Other Variables ) في الحسـبان . ويـدخلها إلى المعادلـة تحـت اسـم المتغـير العشـوائي أو المتبقـي (Residual )، والـذي لـه صـفاته وفرضياته الخاصة. التي ستناقش في الفصول القادمة. وعليه فالنموذج أعلاه سوف يتخذ الصيغة التالية عند استخدام الأسلوب القياسي وهي:

$$Q_i = b_0 + b_1P_i + p_2P_0 + b_3y_i + b_4T_i + U_i$$

وذلك قبل الدخول إلى أخذ العوامل التي دعت إلى إضافة المتغير العشوائي (أنظر الفصـل الثالث).

(٢:٣) مكونات النموذج الاقتصادي:

يتكـون النمـوذج الاقتصـادي مـن عنـاصر النظريـة الاقتصـادية معـبرا عنهـا بالعلاقـات الاقتصادية . وتبسيطها إلى دالة (Function ) كأن نقول الاستهلاك(C) دالة (F) للدخل (Y) أي أن C = F (Y) وعندما تعبر عن هذه الدالـة رياضيا فإنهـا تأخـذ كـل عنـاصر تركيـب المعادلـة (Equation ) الرياضية فيكون منطوق النظرية أعلاه كالآتي:

$C = Co + cY$ وبإفتراض خطية النموذج.

والمعادلـة الرياضـية تتكـون مـن ثابـت (Co) Constant ويطلـق عليـه أيضـا ثابـت خـط الانحدار.أو يسمى أحيانا القطع Intercept . وكذلك تتكون من معامـل الإنحـدار (Regression) وهـو عبـارة عـن مقـدار التـأثير أو التغـير أو الميـل (Slope ) هـو (C) . وهنـا نقصـد بـه الميـل الحـدي للاسـتهلاك( Marginal Propensity of Consumption (MPC)) ويسـمى (Ci) المتغـير التـابع. Dependent Variable ويسمى (Yi) المتغير المستقل أو (التوضيحي) وقد يحتوي النموذج على معادلـة واحـدة. أو على عدة معادلات والتي نطلق عليها بالمعادلات الهيكلية. ويمكن تقسيم المعـادلات الهيكليـة التي تكون النموذج على أساس محتواها الاقتصادي. وليس على أساس شـكلها الريـاضي إلى عـدة مجموعات كما يلي:

١- المعادلة التعريفية : Definitional Equations

وهـي المعادلـة التـي تعـرف أحـد المتغـيرات تعريفـا غـير مشروـط . أي أنهـا معـادلات محاسبية. فإذا عرفنا الدخل بأنه يسـاوي الاسـتهلاك والادخـار . فـيمكن أن نسـتنتج أن الادخـار

يساوي الدخل ناقصا الاستهلاك. مثال ذلك:

$$S = I \qquad Y = C + S$$

$$I = y - C \qquad S = Y - C$$

أو الإيراد الكلي TR هو دالة للسعر مضروبا في الكمية أي: TR = P.Q

٢- المعادلات السلوكية: Behavioural Equations

وهي المعادلات التي تصف السلوك الاقتصادي للمتغير[1] (أي سلوك المنتجين . المستهلكين أو المستثمرين). وهي التي تفسر القرارات التي يتخذونها. ومن الأمثلة على ذلك هو أن النظرية الاقتصادية تنص على أن الكمية المستهلكة من سلعة ما إنما تتغير بتغير سعر هذه السلعة، فهي معادلة سلوكية . كما أن الاستهلاك يستجيب للتغير في الدخل أي:

$$C = Co + cY$$

ومن المعادلات السلوكية أيضا دالة العرض والطلب كما في الشكل الآتي:

$$Q_d = \alpha - \beta P$$

$$Q_s = I + \beta P$$

٣- المعادلات الفنية : Technical Equations

وهي المعادلات التي تختص بشرح طبيعة العلاقة بين مستوى الإنتاج والمستخدمات اللازمة له وفقا للمستوى التقني السائد وهي التي توضح العلاقات الفنية بين المتغيرات الاقتصادية ومن الأمثلة عليها دالة الإنتاج كوب-دوكلاس(Cobb DouglasProduction Functio) والتي تتخذ الصيغة التالية:

$$P = A L^{\alpha} K^{\beta}$$

أي أن الإنتاج دالة لعوامل الإنتاج المتمثلة في العمل (L) ورأس المال (K).

**٤- المعادلات المؤسسية : Institutional Equations .**

وقد يطلق عليها أحيانا بالمعادلات التنظيمية والتـي لا تصـدر عـن النظريـة الاقتصـادية. وإنما هي التي تصف نمط معينا من السلوك يحدده العـرف والعـادات والقـانون مثـل الضرائـب والرسوم الجمركية وغيرها.

**٥- المعادلات التطابقية: Identical Equations (متطابقات) :**

وهي المعادلة التي تأخذ صيغة تطابق وتساوي الجانبين. ومثال ذلك تطابق الكميات

---

(1) H. Tbeil , " Principle Of Econometrics" John wiley , New York , 1971 , P.2.

المعروضة مع الكميات المطلوبة. أو أن عرض النقد يساوي الطلب عليه أي:

$$Qd = Qs$$

أو

$$M_s = M_d$$

ويطلق عليها أحيانا بالمتطابقات.

٦- المعادلات **التوازنية : Equilibrium Equations** .

وهي تشبه المعادلات التعريفية غير أنه لا يلـزم أن تكـون صـحيحة دائمـا . فهـي ليسـت متطابقات . وإنما تتحقق صحة هذه المعادلات تحت شروط معينة فقـط . هـي شروط التـوازن. وبالتالي فإذا لم يتحقق شرط التوازن فلـن تتحقـق هـذه المعـادلات.وهنـا ربمـا تحـدث متغـيرات جديدة تسمح بانحرافات عـن التـوازن. وبالتـالي تحـول هـذه المعـادلات إلى معـادلات تعريفيـة نتيجة لهذه الانحرافات.

وهناك أنواع أخرى من المعادلات . ولكن المذكورة أعلاه تعد اكثرها اسـتعمالا وشـيوعا في الاقتصاد القياسي [1] وهذه المعادلات هي التي تعطي الصورة الجبرية المحددة للدوال التي تربط المتغيرات الاقتصادية بعضـها بـبعض والتـي تشـكل مـا يسـمى بالمعـادلات الهيكليـة ( Structural Equations) وهي الأساس في تركيب النموذج الاقتصادي.

(٢:٤) تركيب النموذج الاقتصادي:

يتركب النموذج من معادلة واحدة أو مجموعة من المعادلات وكل معادلة من معـادلات النموذج تفسر متغيرا واحدا بدلالة المتغيرات الأخـرى ومـا يتصـل بهـا مـن مـؤشرات (معـاملات (Coefficients))، وثوابت (Constants) ويمكن تصـنيف متغـيرات النمـوذج الاقتصـادي طبقـا لكيفيـة تحديد قيم المتغيرات أو طبقا لتوافقها الزمني، وبالنسبة إلى كيفية تحديد قيم المتغـيرات فهنـاك المتغيرات الداخلية والخارجية، أما التوافق الزمني فيؤدي إلى وجـود متغـيرات ذات إبطـاء, وقـد يتم تحديد قيم المتغيرات بمعرفة الباحث نفسه وهي المتغيرات الوهمية أو الصورية، وتسـتخدم في حالة وجود متغيرات نوعية لا تقاس كميا كالألوان وغيرها، وقد تتضـمن المعادلـة في النمـوذج المتغيرات التالية:

١- المتغيرات الخارجية (Exogenous Variables).

وهي المتغيرات التي لا تتحدد قيمها عن طريق النموذج وإنما تتحدد بعوامل خارجية

---

[1] J. Johonston: Op. Cit. P.4.

عن النموذج . وفي بعض الأحيان تتحدد قيمها عن طريق نموذج آخر مختلف عن النموذج الأصلي. ولها مسميات مختلفة كالمتغيرات التوضيحية التفسيرية (Explanatory Variables) والخارجية (External) والمستقلة (Independent).

٢- المتغيرات الداخلية : Endogenous

وهي المتغيرات التي تتحدد قيمها عن طريق النموذج. أي بواسطة تقدير معادلات النموذج. أي معرفة قيم المعلمات Coefficients .وقيم المتغيرات الخارجية[1] . ولها مسميات أخرى مختلفة كالمتغيرات التابعة (dependent).ومتغيرات غير مفسرة (Unexplained) أو غير الموضحة.

ويلاحظ أن هذا التقسيم وثيق الصلة بالعلاقة السببية بين المتغيرات فالمتغيرات الخارجية تؤثر في المتغيرات الداخلية ولا تتأثر بها. بينما المتغيرات الداخلية تؤثر في بعضها البعض وتتأثر بجميع المتغيرات الداخلة في النموذج سواء كانت داخلية أو خارجية. وبطريقة مباشرة أو غير مباشرة (ستناقش جميع هذه المفاهيم بالفصل الخاص بالتشخيص).

٣- المتغيرات المتخلفة زمنيا (Lagged Variables).

ويلاحظ أيضا أنه إذا كانت المتغيرات الداخلية ذات فترة أبطأ (تخلف زمني أو ما يسمى (Lag Variables)) . فإنها في هذه الحالة تعامل كما تعامل المتغيرات الخارجية . فيتم جمعها معا ويطلق عليهما المتغيرات المحددة مسبقا (Predetermined Variables) حيث إن التحليل الرياضي الاقتصادي للعلاقات يهتم بتحديد نوع المتغيرات لأهميته الواضحة في تحديد عدد معادلات النموذج. وفي تحديد طريقة تقدير معلمات المعادلات.

ومن المعادلات الهيكلية للنموذج يتم اشتقاق الصيغة المختزلة له (Reduced Form Equation ( R.F.E))[2] وهي التي يراد بها اشتقاق قيم المتغيرات الداخلية بدلالة قيم المتغير المعتمد، وبهذا أصبحت دالة في قيم المتغيرات المحددة مسبقا ومعلمات معادلات النموذج الأصلي.

ويمكن التوصل لحل معادلات النموذج الاقتصادي بإحدى الطرق التالية:

- طريقة التعويض Subsitution Method
- طريقة المحددات Determinant Method
- طريقة المصفوفات Matrices Method

---

(1) J.Johnston: Op. Cit, 11-14.

(2) J. Johnston, Op. Cit, 11-14.

(٢:٥) أنواع النماذج الاقتصادية:

هناك عدة أنواع من النماذج الاقتصادية نذكر أهمها :

**(٢:٥:١) النماذج الساكنة والحركية: Static and dynamic Models**

يعتمد هذا التقسيم على الدور الذي يمارسه الزمن سواء في تكوين المتغيرات أو تكوين النموذج ذاته. فقد يحدد الزمن دورا هاما في تكوين الاتجاه العام في الظاهرة فهو في هذه الحالة يعد أحد المتغيرات الخارجية التي تدخل في تكوين النموذج . وفي أحيان أخرى قد يكون تزامن المتغيرات مختلفا. ولذلك توجد فترات أبطأ في النموذج. وقد يكون واحدا في كل المتغيرات بمعنى أنه ذو تأثير واحد عليها. أو قد يكون الزمن بدون تأثير في بعض الحالات.

النماذج الساكنة:Static Models

وهي النماذج التي تكون جميع المتغيرات الداخلة في تركيب معادلاتها بقيمتها الجارية (بدون فترة تخلف زمني).

أي عدم أخذ الزمن بنظر الاعتبار ويمكن توضيح ذلك كما يلي:
بأخذ مثال افتراضي عن اقتصاد كلي مغلق يأخذ الشكل المبسط الآتي:

Model (1) $Y = C + I_0 + G_0$ ........ (١)

$C = C_0 + cY^d$ ........ (٢)

$Y^d = Y - T$ ........ (٣)

$T = tY$ ........ (٤)

حيث أن $(I_0 , G_0)$ متغيرات خارجية تمثل الاستثمار والانفاق الحكومي الجاري.و $(C_0)$ تمثل العنصر الثابت . و $(c,t)$ يمثلان معلمات معادلات النموذج الهيكلي.

أما المتغيرات الأخرى فهي الدخل $(Y)$ والاستهلاك $(C)$والدخل القابل للتصرف $(Y^d)$ وإجمالي الضرائب $(T)$ وجميعها تشير إلى المتغيرات الداخلية، ويمكن حل هذا النموذج ليأخذ الصيغة التالية:

بالتعويض:

$$Y = C_0 + C(Y - tY) + I_0 + G_0$$

$$Y = Co + cY - ctY + I_o + G_o$$

$$Y - cY + ctY = Co + Io + Go$$

$$Y (1 - c + ct ) = Co + Io + Go$$

$$Y = \frac{Co + Io + Go}{1 - c + ct} \quad \text{.......................(٥)}$$

وهي الصيغة المختزلة ومنها يمكن الحصول على المضاعف خلال لحظة زمنية معينة، فمثلا يكون مضاعف الأنفاق الحكومي كما يلي:

$$\frac{dy}{dG_1} = \frac{1}{1 - C + ct} \quad \text{....................... (٦)}$$

النماذج الحركية:Dynamic Models .

وهي النماذج التي تأخذ بنظر الاعتبار متغير الزمن (Time) في تركيب معادلاتها . وبقيمها في وقت معين. أو خلال فترة معينة من الزمن . وهي النماذج الأكثر واقعية . وتكون على نوعية نماذج حركية مستمرة. ونماذج حركية متقطعة، ولتوضيح النموذج الحركي نأخذ المثال التالي:-

$$\text{Model (2)}\ Y = C + I + Go \quad \text{............(1)}$$

$$C = Co + cY^d \quad \text{...........(2)}$$

أو

$$Y^d = Y - T \quad \text{............(1)}$$

$$T = {}_tY \quad \text{............(4)}$$

$$I = I_o + iY_{t-1} \quad \text{............(5)}$$

ويمكن حل هذا النموذج ليأخذ الصيغة التالية:

$$Y = Co + cty - ty_{-1} - Io + iY_{1-1} + Go \quad \text{....................(6)}$$

$$Y = \frac{Co + Io + iY_{t-1} + Go}{1 - c + ct} \quad \text{....................(7)}$$

تمثل المعادلة (٧) الصيغة المختزل التي تستخدم لاستخراج المضاعفات المطلوبة.

ونلاحظ من النموذج أعلاه أن ($Y_{t-1}$ .Co) تمثل المتغيرات الخارجية لأن قيمها سبق وأن تم تحديدها خارج نطاق النموذج الرياضي. وسنناقش طرق معالجة هذه النماذج في الفصل الخاص بتوزيع التخلف الزمني (Distributed lag Variable).

٢:٥:٢ النماذج الخطية واللاخطية: linear and Non-Linear Models

يعتمد هذا التقسيم على الشكل الرياضي (Mathematical Form) الذي تأخذه العلاقة بين متغيرات النموذج. فقد تكون العلاقة من الدرجة الأولى (يمكن تمثيلها بصورة خطية) وقد تكون في صورة أعلى. كما قد تأخذ تلك العلاقة صور رياضية أخرى كالصورة الأسية أو اللوغارتمية وعلى هذا الأساس فإن أهم النماذج هي:

النماذج الخطية: Linear Models .

وهي النماذج الاقتصادية التي تتخذ معادلتها الهيكلية الصيغة الخطية. حيث تظهر متغيرات هذه المعادلات في صورة الدرجة الأولى. والتي يعبر عنها بيانيا في صورة خط مستقيم. ويمكن توضيح ذلك بمعادلات نموذج العرض والطلب على سلع معينة وكالآتي:

Model (3):

$$Qd = \alpha - bP$$

$$Qs = \Psi + dp$$

$$\therefore \quad Qd = Qs$$

$$\therefore \quad \alpha - bP = \Psi + dP$$

$$dp - bP = T - \alpha$$

$$P ( d - P) = T - \alpha$$

$$\therefore \quad P = \frac{\psi - a}{d - P}$$

حيث تشير (Qd) إلى الكمية المطلوبة و (Qs) إلى الكمية المعروضة و (P) إلى الأسعار . وأن ($\alpha$) و ($\psi$) ثوابت .

النماذج اللاخطية:Non-Linear Models

وهي النماذج التي تكون متغيرات معادلاتها .أو بعض متغيرات هذه المعادلات تحمل أسا أعلى من الدرجة الأولى. والخط البياني الذي يمثلها لا يشكل خطا مستقيما. وتتخذ عدة أنواع. منها معادلات من الدرجة الثانية. والتي يكون المتغير المستقل مرفوعا إلى القوة. أو الأساس التربيعي أي.

$$Y = a + bx^2$$

ومعادلات من الدرجة الثالثة .أوأكثر . وهذه بدورها يطلق عليها عادة بالمعادلات الأسية (Exponential Equations) ويمكن التعبير عنها بما يلي:

$$Y = a \log X$$

ومعادلات لوغارتمية تامة (Double log Equations) وتكون صياغتها كالآتي:

$$\text{Log } Y = \alpha \log X$$

ومن الأمثلة للمعادلات غير الخطية والواسعة الاستخدام في التطبيقات الاقتصادية . هي دالة الانتاج ذات المرونة الثابتة للاحلال constant Elasticity of Subsitution التي تقدم بها كل من Chanery , Arrow , Minhas, Solow والتي تأخذ الشكل التالي:

$$Y = \alpha [ \lambda K^{-P} + ( 1 - \lambda ) L^{-P} ]^{1-P}$$

وهي تطوير لدالة الانتاج لكل من كوب-دوكلاس. وتسمى أحيانا بدالة انتاج S.M.A.C نسبة إلى مؤلفيها السابقين . أما دالة كوب - دوكلاس غير خطية فيمكن توضيحها وتحويلها كما يلي:

$$P = AL^{\alpha} , K^{B}$$

وباستخدام اللوغاريتمات يمكن تحويلها إلى معادلة خطية كما يلي:-

$$\text{Log } P = \log A + \alpha \log L + (\beta) \log K$$

ويمكن أن نعبر عنها أيضا بالصيغة التالية:

$$P = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 K$$

$$P^* = A^* + L^* + \beta K$$

أو أكثر تبسيطا:

وهذه المعادلة تكون جاهزة لتقدير القياسي لمعلماتها لأخذها بنظر الاعتبار للمتغير العشوائي (Ui).

$$P = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 K + U$$

(٢:٥:٣) النماذج الكلية والجزئية: Macro and Micro Models

يمكن تقسيم النماذج طبقا لشمولية النموذج، بمعنى أن بعض النماذج يشمل قطاعات كاملة في الاقتصاد القومي . بينما يختص بعضها الآخر بوحدات صغيرة في تلك القطاعات. والنموذج الذي يشمل القطاعات كاملة هو النموذج الكلي. أما ذلك الذي يشمل الوحدات الصغيرة فهو نموذج جزئي. وأمثلة النماذج الكلية هي نماذج الاستهلاك القومي ، ونماذج الاستثمار ونماذج الدخل القومي، ونماذج التجارة الخارجية.وأمثلة النماذج الجزئية.نماذج انتاج سلعة معينة. نماذج توازن المنشأة ما شابه ذلك. وبصورة عامة تختص النماذج الكلية بالقطاعات الكاملة. بينما تختص النماذج الجزئية بأجزاء معينة من تلك القطاعات.

النماذج الكلية:Macro Models

وهي النماذج التي تستند معادلاتها الهيكلية على التحليل الاقتصادي الكلي لمتغيرات الاقتصاد القومي. مثال ذلك النموذج الاقتصادي الكلي للدخل القومي التالي:

Model (4)

$$Y = C + I + G \quad \text{.......} (١)$$

$$C = Co + {}_cY^d \quad \text{........} (٢)$$

$$Y^d = Y - T \quad \text{.......} (٣)$$

$$IS \quad T = tY \quad \text{.......} (٤)$$

$$I = Io - ir \quad \text{........} (٥)$$

$$L.M \quad Ms = Md \quad \text{........} (٦)$$

$$Ms = X \quad \text{.......} (٧)$$

$$Md = M0 + m_1Y - m_2r \quad \text{.......} (٨)$$

حيث تشير :-

Ms= عرض النقد.

Md = الطلب على النقد.

x = إصدار النقود من قبل البنك المركزي.

r = سعر الفائدة .

Y= الدخل القومي.

C= الاستهلاك القومي.

I= الاستثمار القومي.

T= الضرائب.

والنموذج الكلي أعلاه يتضـمن هيكلـين، هـما هيكـل السـوق السـلعي (Stracture of good market) أو ما يسمى بمنحنى السياسة المالية (Is curve Equation) والذي يتكون من المعادلات (١-٥) أما الهيكل الثاني فهـو هيكـل السـوق النقديـة (Structure of money market) أو مـا يسـمى بمنحنـى السياسة النقدية (L.M curve equation) وهو الذي يتكون مـن المعـادلات (٦-٨) وتسـتخرج صـيغته المختزلة من تعويض معادلتي سوقي السلعية (IS) والنقدية (LM) كما يلي:-

....... (٩)

$$Y = Co + c\,(Y- tY) + Io + Go - ir$$

$$Ms = Mo + m_1Y - m_2r$$

$$M_2r = Mo + m_1Y - Ms$$

$$\therefore r = \frac{Mo}{m2} + \frac{m1Y}{m2} - \frac{Ms}{m2} \quad \text{..................} (١٠)$$

وبتعويض المعادلة (١٠) في (٩) نحصل على الصيغة المختزلة (١١) وهي كما يلي:

$$Y = \frac{Co + Io + GoMo}{1 - c + ct + \frac{m1}{m2}} + \frac{\frac{1}{m2}}{1 - c + ct + \frac{m1}{m2}} Ms + \frac{1}{1 - c + ct + \frac{im1}{m2}} \quad \text{....} (١١)$$

النماذج الجزئية: Micro-Models

هي النماذج التي تعالج سلوكية شركة أو مؤسسة أو جـزء مـن قطـاع معـين في الاقتصـاد القومي .ومثال ذلك نموذج العرض والطلب لسلعة معينة ونموذج الكلفة في الأجل القصـير الـذي يشير إلى:

$$C = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 T + \beta_3 P$$

حيث (C) هي الكلفة في الأجل القصير . (X) هو الإنتاج (T) هو التقدم العلمي. (P) أسعار عوامل الإنتاج $\beta$,s هي معاملات النموذج.

كذلك نموذج إنتاج شركة أو مؤسسة هو

$$P = Y_0 + Y_1 L + Y_2 N + Y_3 C + Y_4 T$$

حيث (P) هو الإنتاج (C) هو رأس المال (N) الأرض (L) العمل و (T) التقدم العلمي.وهنـاك عدة أمثلة على النماذج الجزئية[1] .

(٢:٥:٤) النماذج الاقتصادية المفتوحة والمغلقة Open and Closed Models

يمكن تقسيم النماذج الاقتصادية طبقا لمدى مشاركة الاقتصاد القومي في التجارة الدوليـة وتأثره بها وتأثيره عليها من خلال حركة الصادرات والـواردات. ودورهـا في حركـة الاقتصـاد. فـإذا احتوى النموذج على هذين المتغيرين (أو بعض أجزائهما) فإن الاقتصاد يصـبح اقتصـادا مفتوحـا على العالم الخارجي، وإلا فهو مغلق . ويتوقف مـدى انفتـاح الاقتصـاد أو انغلاقـه عـلى عوامـل عديدة أهمها السياسات الاقتصادية المتبعة في الدولـة ودرجـة سـيطرتها وتحكمهـا في التـدفقات السلعية والنقدية من وإلى بقية أجزاء العالم.

---

(1) لمزيد من الإطلاع ينظر:

A. Koutsoyannts , "Modern Micro Economics" , University of Walterloo, MacMillan Press LTD, 1977, 2ed.

H. Theil, " Principles of Econometrics ": John Wileyandson Inc, NewYork, 1971, Ch I.

النماذج الاقتصادية المغلقة: Open Economic Models

إذا تضمن النموذج الاقتصادي عددا من المعادلات تمثل القطاعات الاقتصادية مختلفة بدون أن يظهر بينها قطاع التجارة الخارجية عندئذ يسمى هذا النموذج بالنموذج الاقتصادي المغلق، والنموذج أدناه يوضح ذلك:

$$Y = C + I$$

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y^d$$

$$Y^d = Y - T$$

حيث إن :

Y الدخل

C الاستهلاك

$T^d$ الدخل المتاح

T حصيلة الضرائب

S الادخار

ويتضح من النموذج السابق أنه يضم الدخل والاستهلاك والادخار. دون ظهور أثر التجارة الخارجية في النموذج.

النماذج الاقتصادية المفتوحة: Open Economic Models

يطلق على النماذج الاقتصادية الكلية التي تأخذ بنظر الاعتبار عنصرـ التجارة الخارجية بالنماذج المفتوحة. والتي تبدأ عادة بالمعادلة التعريفية التالية:

$$Y = C + I + G + (Z - M)$$

حيث تشير (G,I,C,Y) إلى الدخل والاستهلاك والاستثمار والانفاق القومي على التوالي.

أما (Z-M) فهي عبارة عن عنصري التجارة الخارجية الصادرات مطروحة منها الاستيرادات . أما بقية معادلات هذا النموذج فتكون كالآتي:

$$C = Co + cY^d$$

$$Y^d = Y - T$$

$$T = ty$$

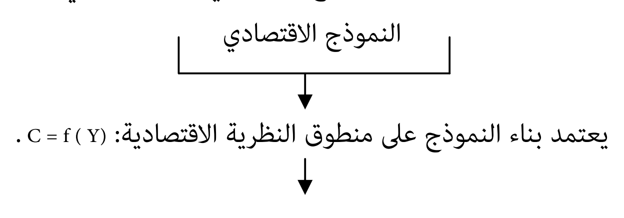
$$I = Io - ir$$

$$Z = Zo + {}^{\circ}2Y$$

ولكي يكتمل النموذج الكلي يجب أن يأخذ كافة المعادلات الهيكلية التي تكون

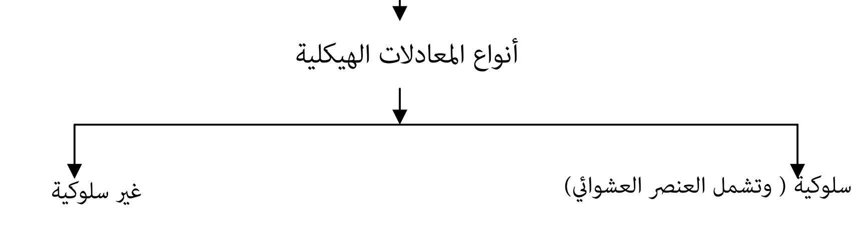
سوقي السلعة والنقدية. مضافا إليهما عناصر ميزان المـدفوعات أي المعـادلات الهيكليـة للميزان التجاري (Balance of Trade) وميزان راس المال (Balance of Capital).

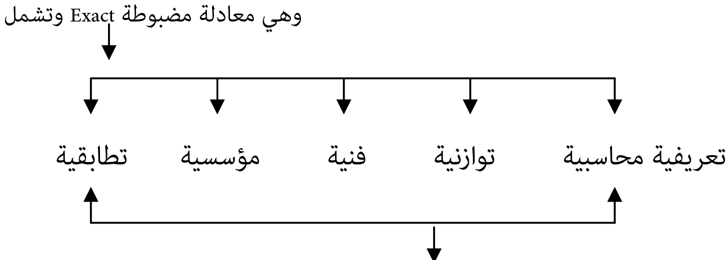
والخلاصة فإنه يمكن تلخيص تركيب النموذج الاقتصادي بالمخطط التالي:




تحويل المنطوق إلى رموز وقيم عددية لتأخذ شكل الدالة كأن نقول C = a + by

تحويل الدالة أو الدوال إلى معادلة أو معادلات وتسمى بالمعادلات الهيكلية.




وتضم جميع المعادلات المتغيرات الداخلية والخارجية والمعلمات والثوابت.

وباستخدام الأساليب الرياضية نحصل عـلى مـا يسـمى بالصـيغة المختزلـة (Reduced Form Eq.) التـي تفسر المتغيرات الداخلية بما يساويها من متغيرات خارجية . معلمات وعناصر ثابتة.

تكون النماذج على عدة أنواع. وقد يتكون قسم من هذه النماذج من معادلة واحـدة أو عدة معادلات هيكلية. وقد يشمل بعضها معادلة تعريفية واحدة أو أكثر.

تعالج هذه النماذج رياضيا وإحصائيا للوصول إلى تقديرات دقيقة صالحة لاتخاذ القرار وللتنبؤ.

(٢:٦) تطبيقات وتمارين:

(٢:٦:١) التطبيقات:

التطبيق الأول :

النموذج الاقتصادي الكلي التالي :

$Y = C + I$ .......... (١)

$C = 100 + 0.8Y$ .......... (٢)

أ- أوجد الصيغة المختزلة . وتوازن الدخل القومي عندما يكون الاستثمار مساويا ١٠٠.

ب- أوجد الميل الحدي للاستثمار.

الجواب :

١- بتعويض المعادلة (٢) في المعادلة (١) نحصل على:

$Y = 100 + 0.8\ Y + 1$

$Y = 0.8\ Y = 100 + 1$

$Y\ (\ 1\text{-}0.8\ ) = 100 + 1$

المعادلة (٣) ........

$$\therefore \quad Y = \frac{100}{0.2} + \frac{1}{0.2}$$

المعادل (٣) تمثل الصيغة المختزلة للنموذج.

وبتعويض قيمة الاستثمار المساوية ١٠٠ في المعادلة المختزنة نحصل على:

$$Y = \frac{100}{0.2} + \frac{100}{0.2}$$

$$\therefore\ Y = 1000$$

وهي حالة التوازن التي عندها يكون الدخل القومي مساويا ١٠٠٠.

ب- للحصول على الميل الحدي للاستثمار. نفاضل جزئيا (Y) مع (I) في المعادلة المختزلة أعلاه . وكما يلي.

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{0.2} = 5$$

أي أن الميل الحدي للاستثمار يساوي (٥).

التطبيق الثاني:

لنفترض أن النموذج الكلي أعلاه قد توسع ليشمل الإنفاق الحكومي (G) والدخل القابل للتصرف ($Y^d$) وإجمالي الضرائب (T) أي:

$$Y = C + I + G` \quad ....... (١)$$

$$C = 100 + 0.8 ( Y - T) \quad ....... (٢)$$

$$T = 0.25 Y \quad ....... (٣)$$

أ- أوجد المعادلة المختزلة وتوازن الدخل القومي (Y) عندما يكون الاستثمار مساويا (١٠٠٠) الانفاق الحكومي يساوي (١٠٠٠).

ب- ما هو الميل الحدي للاستثمار؟

الجواب .

أ- بتعويض المعادلتين (٢) و(٣) في المعادلة (١) نحصل على:

$$Y = 100 + 0.8 ( Y - 0.25 Y ) + I + G$$

$$Y = 100 + 0.8 Y - 2Y + I + G$$

$$Y - 0.8 Y + 2Y = 100 + I + G$$

$$Y ( 1 - 0.8 + 2) = 100 + I + G$$

$$2.2Y = 100 + I + G$$

$$\therefore Y \ \frac{100}{2.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{G}{2.2} \quad ......... (٤)$$

المعادلة (٤) تمثل الصيغة المختزلة.

وللحصول على توازن الدخل نعوض كلا من الاستثمار والانفاق الحكومي في الصيغة المختزلة أي نحصل على نقطة توازن الدخل القومي.

ب- إن الميل الحدي للاستثمار والانفاق الحكومي يساوي:

$$Y = 45.45 + \frac{100}{2.2} + \frac{1100}{2.2}$$

$$\therefore Y = 999.99 = 1000$$

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{2.2} = 0.45$$

$$\frac{dY}{dG} = \frac{1}{2.2} = 0.45$$

التطبيق الثالث:

نفترض أن دالة الإنتاج لسلعة معينة تأخذ الصورة التالية:

$$Y = 10 + 2L - L^2$$

حيث (Y) تمثل الإنتاج الأسبوعي.

(L) تمثل عنصر الإنتاج الأسبوعي (رجل/ساعة).

أ- أوجد مقدار عنصر العمل الذي نحتاجه لتعظيم الإنتاج الأسبوعي.

ب- ماهي قيمة إجمالي الإنتاج عند تلك النقطة (مقدار عنصر العمل).

ج- ما هو قيمة الإنتاج الكلي الحدي لعنصر العمل.

د- أوجد متوسط إنتاج العمل في تلك النقطة.

الجواب:

أ- لإجراء عملية التعظيم نجري تفاضل (Y) مع (L).

$$\frac{dY}{dL} = 2 - 2L$$

$$2 - 2L = 0$$

$$\therefore L = \frac{2}{2} = 1$$

وهذا يمثل عنصر الإنتاج الأسبوعي (L).

ب- بتعويض نتيجة (أ) في المعادلة أعلاه نحصل على:

$$Y = 10 + 2(1) - (1)^2$$

$$Y = 10 + 2 - 1 = 11$$

وهذا يمثل إجمالي الإنتاج عندما يكون (L) مساويا (١).

حـ- لإيجاد قيمة إنتاجية العمل الحدية نأخذ التفاضل الجزئي للإنتاج إلى العمل أي:

$$\frac{dY}{dL} = 2 - 2 = 0$$

د- أما متوسط الإنتاج عندما يكون العمل مساويا (١) هو:

$$APL = \frac{Y}{L} = \frac{10}{L} + \frac{2L}{L} - \frac{L^2}{L}$$

$$\frac{Y}{L} = \frac{10}{L} + 2 - L$$

وحيث إن:

$$L = 1$$

$$\therefore \frac{Y}{L} = 10 + 2 - 1 = 11$$

(٢-٦-٢) التمارين:

١- ناقش بتركيز الخطوات الأساسية في بناء النماذج الاقتصادية. مع ذكر لأهم النماذج الاقتصادية.

٢- ما هي الأسس في تقسيم النماذج الاقتصادية؟

٣- ما هو المقصود بالصيغة المختزلة؟ عدد عناصرها، وما هي طريقة الوصول لها؟

٤- ما هو دور التخلف الزمني في بناء النموذج الاقتصادي؟

٥- لنفترض النموذج الاقتصادي الآتي:

$$Y = C + 1 + G_0 + Z_0 \quad \ldots 1$$
$$Y = C_0 + cY^d \quad \ldots 2$$
$$Y^d = Y - T \quad \ldots 3$$
$$T = tY \quad \ldots 4$$

حيث تشير $Z, T, Y^d, G, I, C, Y$ إلى الدخل القومي، الاستهلاك الاستثمار، الإنفاق الحكومي، الدخل القابل للتصرف، إجمالي حصيلة الضرائب، وصافي قيمة التجارة الخارجية، على التوالي.

المطلوب:

١- حدد المتغيرات الداخلية (Endogenous). والمتغيرات الخارجية (Exogenous) والقيم المطلقة (Absolute Values)، ومعلمات النموذج أعلاه.

٢- ماذا يطلق على المعادلات الهيكلية الأربعة التي يتكون منها النموذج أعلاه.

٣- أوجد معادلة الصيغة المختزلة للدخل القومي.

٤- أوجد مضاعف الاستثمار.، الإنفاق الحكومي، التجارة الخارجية.

٥- نفترض أن النموذج الاقتصادي الكلي لقطر معين يتكون من المعادلات الهيكلية الآتية:

$$Y = C + 1 + G_0 \quad \ldots 1$$

$$\left.\begin{aligned} C &= 100 + 0.8\,Y^4 \quad \ldots 2 \\ 1 &= 1000 - 10\,r \quad \ldots 3 \\ Y^d &= Y - T \quad \ldots 4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{IS}$$

$$T = 0.25\,Y \quad \ldots 5$$

$$\left.\begin{aligned} M^d &= M_s \quad \ldots 6 \\ M_s &= \frac{25}{7} X \quad \ldots 7 \\ M^d &= 1375 + 0.25\,Y - 50\,r \quad \ldots 8 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{LM}$$

حيث $(X, r, M_s, M^d, T, Y^d, G, C, I)$ تعني على التوالي الاستهلاك، الإنفاق الحكومي، الدخل القابل للتصرف، إجمالي حصيلة الضريبة، الطلب على النقود، عرض النقود، سعر الفائدة، وقابلية البنك المركزي على الإصدار.

أ- أوجد معادلة (IS) ومعادلة (LM). ثم الصيغة المختزلة للنموذج.

ب - أوجد تأثير الإنفاق الحكومي (G) على الدخل القومي (Y)، وتأثير (X) على (Y).

حـ- نفترض أن البناء الهيكلي للنموذج الاقتصادي لقطر معين كان في الصورة التالية:

$$Y = C + I + G_0 \quad \ldots 1$$
$$T = tY \quad \ldots 2$$
$$C = Co + c\,(Y - T) \quad \ldots 3 \qquad IS$$
$$I = Io - ir \quad \ldots 4$$
$$Ms = Md \quad \ldots 5$$
$$Md = Mo + kY - Mr \quad \ldots 6 \qquad LM$$

أوجد الصيغة المختزلة للدخل القومي من المعادلات الهيكلية أعلاه.

٨- اقتصاد معين يتكون نموذجه من المعادلات الهيكلية التالية:

$$Y + C + I_0 + G_0 + E_0 - Z \quad \ldots 1$$
$$C = Co + c\,(Y - T) \quad \ldots 2$$
$$T = tY \quad \ldots 3$$
$$Z = Zo + z\,(Y - T) \quad \ldots 4$$

حيث أن (Z, E) تمثلان الصادرات والاستيرادات.

أ- أوجد الصيغة المختزلة لهذا النموذج.

ب- أوجد الميل الحدي للضريبة. والميل الحدي للاستيرادات والميل الحدي للاستهلاك.

# الفصل الثالث

# تقدير معلمات النموذج الخطي ذي المتغيرين

**(٣-١) طبيعة نموذج الانحدار ذي المتغيرين.**

**(٣-٢) أسباب ظهور المتغير العشوائي (حد الاضطراب).**

**(٣-٣) طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS).**

**(٣-٤) فرضيات المربعات الصغرى الاعتيادية.**

**(٣-٥) اشتقاق معلمات النموذج الخطي بطريقة المربعات الصغرى (OLS).**

**(٣-٦) تطبيقات وتمارين.**

# الفصل الثالث

### تقدير معلمات

### النموذج الاقتصادي الخطي ذي المتغيرين

(٣-١) طبيعة نموذج الانحدار الخطي ذي المتغيرين:

إن نموذج الدخل القومي المذكور في الفصل الثاني يتضمن مشكلتين تتمثلان في:

الأولى: هي وجود نموذج يتكون من عدة معادلات آنية لشرح وتحديد عمل الاقتصاد أو القطاع ذي المتغيرين.

الثانية: إن كل معادلة في النموذج تتضمن متغيرين اثنين أو أكثر. وكمدخل إلى فهم الاقتصاد القياسي سيكون تركيزنا على نموذج المعادلة المفردة Single Equation Model والمتضمنة متغيرين، علما بأن المعادلة المفردة لمتغيرين لا تشرح السلوكية الواقعية للاقتصاد أو المشكلة قيد الدراسة.وأن التطرق إليها يعطي الفكرة الجوهرية لأدوات التحليل القياسي، والتي على ضوئها يمكن بسهولة التوسع في معادلات ومتغيرات النموذج، وقد تطرقنا في الفصل الأول إلى نطاق الاقتصاد القياسي، واتضح لنا أن المعادلة القياسية تمر بأربع مراحل سيركز هذا الفصل على مرحلتي تقدير معلمات المتغيرات الاقتصادية $\left(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\sigma}_u\right)$، ومن ثمة مرحلة اختبار دقة تقدير المعلمات، باستخدام الأدوات الإحصائية اللازمة.

أما مرحلة التطبيق فهي المرحلة الأخيرة من استخدام الأسلوب القياسي وسيكون الفصل الثامن محورا خاصا بها.

أيضا في حالة اشتقاق القيمة التقديرية لمعلمات النموذج يحتاج الطالب إلى استخدام التفاضل $\frac{d\sum e_i^2}{d\hat{\beta}}$ ، $\frac{d\sum e_i^2}{d\hat{\alpha}}$ وهذا يتطلب المعرفة بقواعد التفاضل. وعليه ففي هذه الحالة يمكن للطالب الرجوع إلى الملحق (B) في نهاية الكتاب, وإذا لم يواجه الطالب مشكلة في استيعاب الاشتقاقات فإنه يتحول مباشرة إلى الفصل الرابع.

وعموما يكون الهدف من البحث القياسي هو توصيف شكل العلاقة

بعلاقة دالية أي: $(Y_i), (X_i)$ بين متغيرين Specification of the Relation

$$Y_i = f(X_i) \quad \text{.......... (1)}$$

ويمكن التعبير رياضيا:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i \quad \text{.......... (2)}$$

ولقد أوضحنا بأن هذه المعادلة لا تعبر عن حقيقة العلاقة بين المتغيرين.

فهناك انحراف للعلاقة الحقيقية عن العلاقة أعلاه. ولهذا لكي نقـرب العلاقـة إلى الحاليـة الحقيقية نظيف إليهـا حـد الاضـطراب أو المتغـير العشـوائي (Stochastic Variable) or أو Disturbance Term. وتصبح الصيغة المعبرة عن حقيقة العلاقة كالآتي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i \quad \text{.......... (3)}$$

وتمثل الصيغة (٣) الصيغة القياسية الجاهزة للتقدير.

وبهذا تم تحويل العلاقة من علاقة محددة (Deterministic). أو مضـبوطة (Exact) إلى علاقـة تصادفية (Stochastic). بإضافة حد الاضطراب $(\mu_i)$ والتي يمكن حلها بالطرق القياسية وأن مصـطلح (Stochastic) من أصل يوناني ويشير إلى الحالة التي لا يمكن فيها من إصابة الهدف دائما.

ويستخدم المصطلح (Error Term)، أي الحد الخطأ للتعبير عن حجم الخطأ (أو عدم إصابة الهدف), وهناك أسباب عديدة تبرر إدخال هذا الحد (المتغير)، ونجملها بثلاثة أسباب أساسية:

(٢-٣) أسباب ظهور المتغير العشوائي $(\mu_i)$ (حد الاضطراب):

هناك مجموعة من المبررات سنناقش أهمها أدناه:

١- صعوبة إدخال كافة المتغيرات المؤثرة في الظاهرة:

فإذا اعتبرنا أن الاستهلاك دالة للدخل،وتم تحديد كافة العناصر المـؤثرة في الاسـتهلاك، وتـم الحصول على بيانات عن هذه المتغيرات وبقيت متغـيرات أخـرى لا تتـوفر البيانـات اللازمـة عنهـا (Unquantifiable Factors)، وعليـه فمــن الضرـوري إدخـال عنصرـ يمثـل العنــاصر غــير المكممــة (Unquantitiable) وهو العنصر العشوائي والذي يتمتع بتوزيع ذي وسـط حسـابي يسـاوي صـفرا $(E(U_i) = 0)$ وتباين ثابت $(\sigma^2)$ (Constance Variance) أي:

$$E(U_i)^2 = U_i = \sigma^2_u$$

وبهذا فإن$(U_i)$ تنوب عن المتغير العشوائي وقيمته التقديرية(ei) أي المتبقي Residual.

٢- صعوبة إدخال المتغيرات غير المتوقعة:

قد نضيف (Ui) إلى المعادلـة لتمثـل العنـاصر العشـوائية غـير المتوقعـة أي (Unpredictable Random Features) والتي تظهر بالإضافة إلى العناصر الأخرى المؤثرة في المتغير التابع.

وقد يشار إلى هذه العناصر بالخطأ في المعادلـة (Error in Equation) أو (خطـأ الحـذف) أي Error of Ommissin[1] والتي تتضمن ما يلي:

أ- قلة معرفة بعض المتغيرات المؤثرة قد يكون سببها في قلة المعلومات عن أسباب تغير المتغيرات الاقتصادية عموما.

ب- صعوبة قياس بعض المتغيرات إحصائيا مثل العوامل النفسية.

حـ- بعض المتغيرات غير متوقعة كالحروب. البراكين، الزلازل والكوارث الطبيعية الأخرى.

د- بعض المتغيرات ذات التـأثير القليـل عـلى المتغـير التـابع وذات مـؤشرات ضـعيفة ولا يمكـن تقديرها.

هـ- وحتى لو توفرت المعرفة عـلى كـل المتغـيرات المـؤثرة في الظـاهرة ($Y_i$)، تبقـى مشـكلة تـوفر البيانات ودقتها وصعوبة توفرها لكافة المتغيرات، ولهذا يتم حذف قسم منها.

٣- صعوبة تحديد سلوك البشر مسبقا[٢]:

يختلف سلوك البشر عشوائيا (اعتباطيا) حتى لو كانت الظـروف المحيطـة بهـم متشـابه، حد الخطـأ يمثل هذه العشوائية المتأصلة في سلوك البشر، فليس بالضرورة أن تتفق أسر متشابهة من حيث الدخل وعدد أفرادها وأعمارهم على نفس المقدار من الاستهلاك.

(٣-٣) طريقة التقدير باستخدام المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) :

Ordinary Least – Squares Method (OLS):

بعد تحديد حـد الاضـطراب والعوامـل الداعيـة لوجـوده، بقيـت أمامنـا مشـكلة تقـدير مجاهيل المعادلـة، ويشـمل ذلـك المعلـمات ($\alpha, \beta, \sigma^2$)، وأن التعـرف عـلى قـيم هـذه المعلـمات الحقيقية أمر مستحيل، ولذلك يحاول المختص تقدير (Estimate) هذه القيم ويعتمد نجاح

---

(1) A. Koutsoyannis: "Theory of Econometrics", Op. Cit. P. 27.

(٢) الدكتور عادل عبد الغني محبوب، "كيف يعمـل المخـتص بحقـل الاقتصـاد القيـاسي، بحـث منشـور بمجلة تنمية الرافدين،كلية الإدارة والاقتصاد،جامعة الموصل العدد٢١،١٩٨٧،ص٢٣٣-٢٦٤.

تقدير هذه المتغيرات على طبيعة حد الاضطراب (ui) ولكون هذا الحد مجهول فإنه يتم اللجوء إلى وضع عدة افتراضات تصف سلوكية هذا الحد حيث تحتل هذه الافتراضات واختبارها دورا أساسيا في النظرية القياسية، ومن أكثر صيغ التقدير (Estimation) استخداما هي طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method أو مقدرات أصغر المربعات

Least - Squares Estimate ($\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \sigma^2_u$)

وفي هذا الفصل سوف نناقش طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية Ordinary Least Squares Method (OLS)، أو الطريقة التقليدية للمربعات الصغرى Classical Least Squares Method (CLS) والأسباب الداعية لاستخدام هذه الطريقة هي[1]:

١- تقدير المعلمات بواسطة (OLS) تمتاز بصفات أكثر فعالية من غيرها من الطرق.

٢- سهولة حساب تقدير المعلمات بواسطة (OLS) مقارنة بالطرق القياسية الأخرى.

٣- منطقية النتائج المستحصلة بطريقة (OLS) بالرغم من التطور الكبير الخاص في طرق احتساب وتقدير المعلمات للنموذج القياسي.

٤- سهولة فهم ميكانيكية عمل (OLS).

٥- معظم الأساليب القياسية مبنية بالحقيقة على(OLS) رغم التطورات والتحويرات في هذه الأساليب، وباستثناء طريقة (Full Information Maximum Likelihood Method)، فإنها تعتبر تطبيقات إلى (OLS).

وسنبدأ بنموذج الانحدار(*) الخطي البسيط الذي يعالج العلاقة الخطية بين متغيرين،أحدهما معتمد (Dependent) والآخر مستقل (Independent).

(٤-٣) فرضيات مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية:

Assumptions of Least – Square Estimator:

هناك نوعان من الافتراضات التي تقوم عليها الطرق القياسية النظرية وهي الفرضيات المتعلقة بحد الاضطراب (الفرضيات الفنية)، وفرضيات خاصة بطبيعة العلاقة الدالية (الفرضيات العامة) بمعلماتها، وتشمل الفرضيات الفنية لحد الاضطراب ما يلي:

---

([1]) D. Gujarati: "Basic Econometrics": Op. Cit. P. 11.

* يعتبر فرانسيس كالتون أول من استخدم مصطلح Regression عام (١٩٨٦) في دراسته عن أطول الآباء والآبناء.

- اعتبار الوسط الحسابي لحد الاضطراب مساويا للصفر أي $E (Ui) = 0$.

- اعتبار تباين حد الاضطراب ثابت ومتجانس $E (Ui)^2 = U = \sigma^2_u = 1$.

- اعتبار عدم ارتباط متغيرات حد الاضطراب ارتباطا ذاتيا Non-Autcorrelation: $ui\ uj = 0$.

في حين تشمل مجموعة الافتراضات التي تخص طبيعة العلاقة الدالية ومعلماتها ما يلي:

- خطية الدالة وثبات قيم معلماتها $yi = f (xi)$.

- عدم وجود ارتباط متعدد Multicollinearity بين المتغيرات المستقلة، أي: $r_{x, x2} = 0$.

- عدم عشوائية المتغيرات المستقلة.

وهذه الفرضيات لا تتطابق دائما وحقيقة العلاقات أو الظواهر الاقتصادية، وعليه فإن الخروج عن أية فرضية من هذه الفرضيات ومعالجتها، يعد بحد ذاته تقريبا للنموذج المقدر، أو العلاقة المقدرة، أو المعلمات المقدرة $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ إلى النموذج الحقيقي، أو العلاقة الحقيقية، أو المعلمات الحقيقية ($\alpha\ \beta$). وبهذا سوف نبدأ بمعالجة النموذج الخطي ذي المتغيرين (البسيط) وباستخدام طريقة المربعات الصغرى. وبافتراض وجود كافة الفرضيات أعلاه، ولكن سوف نركز أولا على الفرضيات المتعلقة بالمتغير العشوائي (ui)، وبعدها سوف نعالج هذه الفرضيات واحدة بعد الأخرى وحتى نهاية الكتاب.

(٣-٥) اشتقاق معلمات النموذج الخطي بطريقة المربعات الصغرى (OLS):

لنفترض وجود علاقة خطية بين الدخل (xi) والاستهلاك (Yi) (أو العلاقة بين الكمية المطلوبة $Q_d$ والسعر (P) والتي تأخذ الصيغة التالية:

$$Yi = \alpha + \beta\ Xi + Ui$$

$$Qd = \alpha + \beta\ P_i + Ui$$

وبافتراض أخذ نموذج الاستهلاك:

نفترض (Xi) قيمة ثابتة في العينات المتكررة.

وأن:

المتغير العشوائي (ui) موزع توزيعا طبيعيا له الصفات التالية:

$$E (Ui) = 0$$

$$E (Ui\ Uj) = \begin{cases} \sigma^2_u \\ 0 \end{cases}$$

وعليه فإن المجاهيل لهذا النموذج هي: $\alpha, \beta, \sigma^2_u$

حيث يشير الحرف (E) إلى القيمة المتوقعة (Expected Value) والتي تعني الوسط الحسابي للمتغير (ui)، وأن الفرضية الثانية تتكون من فرضيتين مرتبطتين مع بعضهما هما:

ثبات التباين $\sigma^2_u$ = Variance $E\,(Ui)^2$، وصفر التغاير (التباين المشترك) أي أن E(Ui Uj) Covariance = 0 ويفترض هنا بأن التباين للمتغير العشوائي ثابت أي:

$$Var\ (Ui) = E\ (Ui - E\ (Ui))^2$$

بالفرض:

$$\because\ E\ (Ui) = 0$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\therefore\ Var\ (Ui) = E\ (Ui)^2 = \sigma^2_u = 1$$

وهو ثابت ويمثل حالة التجانس (Homescedasticity)

في حين يكون التباين المشترك مساويا للصفر أي:

$$Cov\ (Ui\ Uj) = E\ \{\ (Ui - E\ (Ui)\}\ .\ \{\ (Uj - E\ (Uj)\}$$

بالفرض

$$\because\ E\ (Ui) = 0,\ E\ (Uj) = 0$$

$$\therefore\ Cov\ (Ui\ Uj) = 0$$

إذن فإن كلا من $(\alpha, \beta, \sigma^2_u)$ هم المعلمات المجهولة للنموذج أعلاه. والمفروض إيجاد قيمتها قياسيا مستندين على مشاهدات العينة لكل من $(Y_i)$ $(X_i)$ وضرورة اختبار دقة التقدير لمعرفة ما إذا كان:

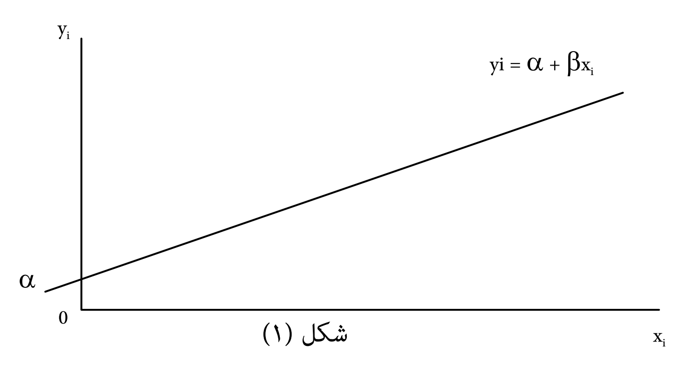
١- الميل الحدي للاستهلاك MPC $\left(\hat{\beta}\right)$ أكبر من أو اصغر من الحقيقي.

٢- الاستهلاك منسوبا للدخل أو $\alpha = 0$.

٣- الاستهلاك ذو تباين ثابت أو يساوي $\sigma^2_u$.

٤- العلاقة القائمة هي علاقة خطية.

ويمكن توضيح ذلك بيانيا كما يلي:



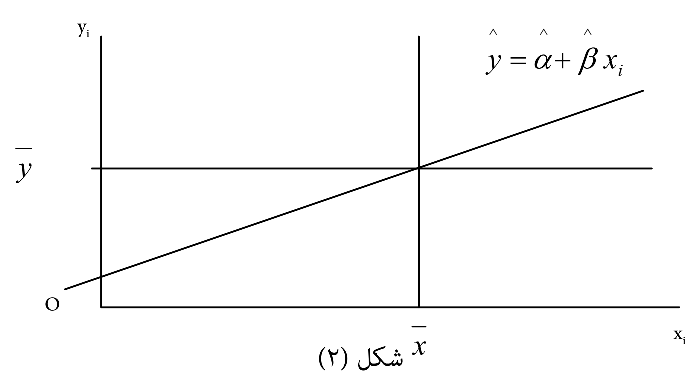

شكل (١)

يوضح العلاقة الخطية البسيطة

وللحصول على التقديرات يرمز إلى المشاهدات بـ:

$x_i = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

$Y_i = Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$




شكل (٢)

شكل الانتشار مع الأوساط الحسابية للمتغيرات

وأوساطها الحسابية تكون كالآتي:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum Xi, or \overline{X} = \frac{\sum Xi}{n}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum Yi, or \overline{Y} = \frac{\sum Yi}{n}$$

ويرسم شكل الانتشار(لاحظ الشكل ٢) وإدخال كل من$\left(\overline{X}\right),\left(\overline{Y}\right)$،فإن الخط المستقيم

المقدر هو الذي يمر خلال المشاهدات ويمكن الإشارة إليه بالخط المقدر (Estimated Line) وصيغته هي:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i \quad \text{.......} (2)$$

وأما معادلته المقدرة فهي:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + ei \quad \text{.......} (3)$$

وللحصول على خط مستقيم مقدر كالخط الموضح في الشكل البياني (٣)، نحتاج إلى اشتقاق صيغة تقدير $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$، وباستخدام طريقة (OLS) التي تقوم أساسا على استخدم مفهوم البواقي Residuals (ei) أساسا للتقدير، إن (OLS) هي التي تقلل البواقي (Minimizes Residuals)، وتمثل (ei) الفرق بين قيم (Yi) الحقيقية وقيم $\left(\hat{Yi}\right)$ التقديرية وتتمثل بيانيا في المسافة من (P) إلى (R) على الخط المقدر قياسيا ويمكن تعريفه بما يلي:

$$ei = Yi - \hat{Y}i \quad \text{.......} (4)$$

إن هذه البواقي أو الانحرافات (Deviations) عن الخط المقدر قد تكون موجبة أو سالبة، وذلك حسب موقعها الفعلي أعلى أو أدنى من الخط المقدر. ومجموع تلك البواقي أو الانحرافات يكون مساويا للصفر، وعليه فإنها تجمع وتربع وتأخذ الصيغة التالية:

$$\sum_{i=1}^{n} (ei)^2 = \sum [Yi - \hat{Y}i]^2 \quad \text{.......} (٥)$$

وعليه فإنها تعتبر دالة للمعلمات المقدرة أي:

$$\sum_{i=1}^{n} ei^2 = f\left(\hat{\alpha}, \hat{B}\right) \quad \text{.......}$$

$$\therefore \sum e^2 i = \sum (Yi - \hat{Y}i)^2$$

بالتعويض عن $\hat{Y}i$ نحصل على:

$$\therefore \sum e^2 i = \sum [\, Yi - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} Xi)]^2$$

وبالضرب نحصل على:

$$\therefore \sum e^2 i = \sum [\, Yi - \hat{\alpha} + \hat{\beta} Xi\,]^2$$

ولتصغير البواقي إلى أدنى حـد نحتـاج إلى تطبيـق التفاضـل الجـزئي لمجمـوع مربـع البواقي ($\sum e^2 i$) بالنسبة إلى $\left(\hat{\beta}\right)$ إلى $\left(\hat{\alpha}\right)$ وعليه:

فإن التفاضل الجزئي بالنسبة $\hat{\alpha}$ نحصل على:

$$\frac{\delta \sum e^2 i}{\delta \hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta \left( Yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Xi \right)^2}{\delta \hat{\alpha}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2 \left( Yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Xi \right)(-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -2 \left( Yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Xi \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وبنفس الأسلوب فإن التفاضل الجزئي بالنسبة $\hat{B}$ نحصل على:

$$\frac{\delta \sum e^2 i}{\delta \hat{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta \left( Yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Xi \right)^2}{\delta \beta}$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} \left( Yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Xi \right)(-Xi)$$

$$= -2 \sum Xi \left( Yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Xi \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبمساواة معادلتي التفاضل الجزئي بالصفر نحصل على:

$$-2 \sum \left( Yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Xi \right) = 0$$

$$-2 \sum Xi \left( Yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Xi \right) = 0$$

وبقسمة المعادلتين على (٢-) وبإعادة ترتيبهما نحصل على المعادلتين الطبيعيتين لخط الانحدار، وهما[*]:

$$\sum Yi = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\sum XiYi = \hat{\alpha} \sum Xi + \hat{\beta} \sum Xi^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

---

[*] انظر الملحق (C).

ومن هاتين المعادلتين نجد قيمة كل من $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ وذلك أما بطريقة التعـويض ( Substitution Method)، أو بطريقة المحددات (صيغة كريمر) أو طريقة الانحرافات عن الوسط الحسابي.

وباتباع طريقة التعويض فيمكن الحصول على قيمة كل من $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ كما يلي:

بضرب المعادلتين (٣) و (٤) بالمقدار (xi) و (n) على التوالي نحصل على :

$$\sum Xi \sum Yi = n\hat{\alpha} \sum Xi + \hat{\beta}\left(\sum Xi\right)^2$$

$$n \sum XiYi = n\hat{\alpha} \sum Xi + n\hat{\beta}\left(\sum Xi\right)^2$$

وبطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نحصل على:

$$n \sum XiYi - \sum Xi \sum Yi = n\hat{\alpha} \sum Xi - n\hat{\alpha} \sum Xi + n\hat{\beta}\left(\sum Xi\right)^2 - \hat{\beta}\left(\sum Xi\right)^2$$

$$n \sum XiYi - \sum Xi \sum Yi = n\hat{\beta} \sum Xi^2 - \hat{\beta}\left(\sum Xi\right)^2$$

بإخراج $\hat{\beta}$ خارج قوس نحصل على:

$$n \sum XiYi = \sum Xi \sum Yi = \hat{\beta}\left(n \sum Xi^2 - \left(\sum Xi\right)^2\right.$$

وبقسمة في المعادلة على الحد: $\left(n \sum Xi^2 - \left(\sum Xi\right)^2\right)$ تحصل على:

$$\frac{n \sum XiYi = \sum Xi \sum Yi}{n \sum Xi^2 - \left(\sum Xi\right)^2} = \frac{\hat{\beta}\left(n \sum Xi^2 - \left(\sum Xi\right)^2\right)}{n \sum Xi^2 - \left(\sum Xi\right)^2}$$

$$\therefore \quad \hat{\beta} = \frac{n \sum XiYi - \sum Xi \sum Yi}{n \sum Xi^2 - \left(\sum Xi\right)^2} \quad \text{.................. (5)}$$

أيضا من المعادلة الطبيعية (٣) نجد قيمة ( $\hat{\alpha}$ ) وذلك بقسـمة طـرفي المعادلـة عـلى (n) لنحصل على:

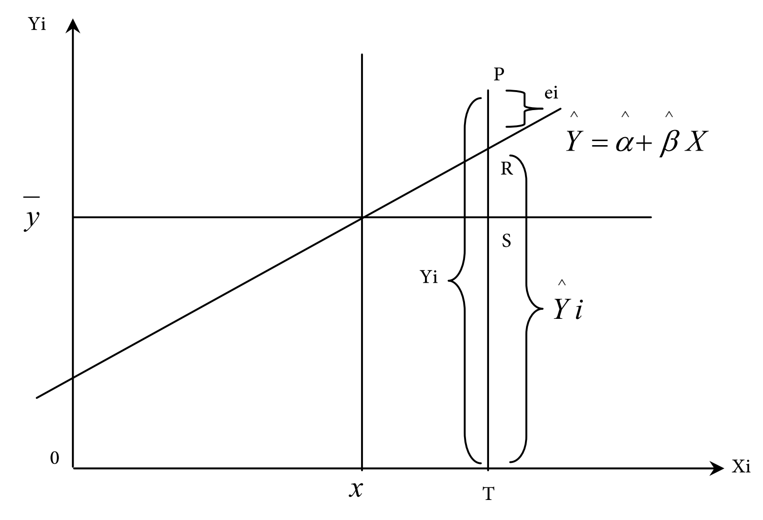
$$\therefore \quad \frac{\sum Yi}{n} = \frac{n\hat{\alpha}}{n} + \hat{\beta}\,\frac{\sum Xi}{n}$$

$$\therefore \quad \overline{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\beta}\,\overline{X}$$

وبما أن كلا من $(\overline{x})$ و $(\overline{Y})$ معلومات من المشاهدات الفصلية المأخوذة من العينة. وأن $(\hat{\beta})$ تم اشتقاقها كما في المعادلة (٥) فإن قيمة $(\hat{\alpha})$ هي:

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X} \qquad \text{...............} (6)$$

وبهذا نكون قد أوجدنا قيمة كل من المجاهيل $\alpha, \beta$ .




شكل (٣) : توضيح الخط المستقيم المقدر والبواقي

ولأن الأساس الذي يقوم عليه مبدأ أصغر المربعات هو جعل $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$ يتم اختيارهما بحيث $\left(\sum_{i=1}^{n} ei^2\right)$ يكون أصغر ما يمكن، والشرط الجوهري للتصغير (Minimization) هو أخذ التفاضل الجزئي لمجموع مربعات البواقي بالنسبة إلى $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ونتيجتهما تعادل بالصغر أي بتطبيق الشرط الضروري للتدنية (التقليل) (Necessary Condition for Minimization)، ويتم ذلك بأخذ المشتقة الجزئية الأولى للمقدار $\left(\sum_{i=1}^{n} ei^2\right)$ بالنسبة لكل من $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$ وكما تم ذكر ذلك أعلاه*:

* بالنسبة للطلبة الذين يعانون من مشكلة فهم المشتقة الجزئية الأولى عليهم مراجعة الملاحق - الملحق (C) المشتقات.

وباتباع نفس الأسلوب يمكن الحصول على قيمة كل من $\left(\hat{\beta}\right),\left(\hat{\alpha}\right)$ وذلك باتباع طريقة الانحرافات (Deviation Method)، وباستخدام فكرة المتبقي ((Residuals (ei)) أيضا، وهذه الطريقة تسهل عملية الاشتقاقات، ويمكن عرضها كالآتي:

$$\because \quad Yi = \alpha + \beta X_i + Ui \qquad \text{.................. (1)}$$

$$\because \quad \hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i \qquad \text{.................. (2)}$$

ومن المعادلتين الطبيعيتين فإن:

$$\sum Yi = n\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum Xi \qquad \text{.................. (6)}$$

وبقسمة المعادلة (٦) أعلاه على n نحصل على:

$$\overline{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\overline{X} \qquad \text{.................. (3)}$$

وبطرح المعادلة (٢) من المعادلة (٣) نحصل على:

$$Yi - \overline{Y} = \hat{\alpha} - \hat{\alpha} + \hat{\beta} Xi - \hat{\beta}\overline{X}$$

إذن:

$$\hat{y}i = \hat{\beta} xi + e \qquad \text{.................. (4)}$$

وحيث:

$$\left.\begin{aligned} yi &= Yi - \overline{Y} \\ \hat{y}i &= \hat{Y}i - \overline{Y} \\ xi &= Xi - \overline{X} \\ ei &= Yi - \hat{Y} \end{aligned}\right\} \qquad \text{.................. (5)}$$

$$\therefore \; ei = yi - \hat{\beta} x_i \qquad \text{.................. (6)}$$

وعليه فإن:

$$\sum ei^2 = \sum (yi - \hat{\beta} x_i)^2 \qquad \text{.................. (7)}$$

وبتصغير $\sum ei^2$ بالنسبة لمعامل المتغير المستقل $\left(\hat{\beta}\right)$ نأخذ تفاضلها بالنسبة للمعامل $\left(\hat{\beta}\right)$ وكالآتي:

$$\frac{\delta \sum ei^2}{\delta \hat{\beta}} = 2\sum xi\left(yi - \hat{\beta}xi\right)(-1)$$

$$= -2\sum xi\left(yi - \hat{\beta}xi\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

وبمساواة المعادلة أعلاه بالصفر وبالقسمة على ٢- نحصل على:

$$\sum xi\left(yi - \hat{\beta}xi\right) = 0$$

$$\sum xiyi = \hat{\beta}\sum x^2 i = 0$$

وبإعادة الترتيب المعادلة نحصل على:

$$\sum xiyi = \hat{\beta}\sum xi^2$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $\sum x^2 i$ نحصل على:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xiyi}{\sum xi^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

أما قيمة $\hat{\alpha}$ فيمكن اشتقاقها باستدعاء المعادلة (٣) أعلاه.

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$$

وبما أن $\hat{\beta}$ معلومة من المعادلة (٩).

$$\therefore \hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

وبهذا تكون قد تم حصولنا على تقدير كل من $\left(\hat{\beta}\right),\left(\hat{\alpha}\right)$ وبقي لدينا مجهول آخر وهو تباين كل من $\left(\hat{\beta}\right)$ و $\left(\hat{\alpha}\right)$. وتقدير تباينهما سنحصل عليه عند اشتقاق مميزات كل من $\hat{\beta}$ و $\hat{\alpha}$ أي (BLUE).

وكذلك يمكن استخدام المحددات Determinat* لاشتقاق تقدير كل من $\hat{\beta}$ و $\hat{\alpha}$ وذلك بتطبيق صيغة كريمر للمعادلتين الطبيعيتين (٤)، (٥) الخطية وذات المجهولين وكالآتي:

---

* راجع الملحق (β): أساسيات جبر المصفوفات.

$\because \; X = A . b$

$$\therefore \begin{bmatrix} \sum Yi \\ \sum YiXi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum Xi \\ \sum Xi & \sum xi^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

ولحل المعادلتين للحصول على $\hat{\beta}$ نستخرج قيمة المحدد كالآتي:

$$| A | = \begin{bmatrix} N & \sum Xi \\ \sum Xi & \sum Xi^2 \end{bmatrix} = N \sum Xi - (\sum Xi)^2$$

and

$$N_1 = \begin{bmatrix} N & \sum Yi \\ \sum Xi & \sum YiXi \end{bmatrix} = \sum Yi\,Xi - \sum X1 \sum Y1$$

وبتقدير قيمة $\left(\hat{\beta}\right)$ من المعادلتين الطبيعيتين نحصل على ما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{N1}{| A |} = \frac{N\sum XiYi - \sum Yi \sum Xi}{N\sum Xi - \left(\sum Xi\right)^2}$$

وأن تقدير $\left(\hat{\alpha}\right)$ يعتمد على محدد No كالآتي:

$$No = \begin{bmatrix} \sum Yi & \sum Xi \\ \sum YiXi & \sum Xi^2 \end{bmatrix} = \sum Yi \sum Xi^2 - \sum Yi\,Xi \sum Xi$$

وبقسمة No على المحدد / A / نحصل على:

$$\therefore \hat{\alpha} = \frac{No}{| A |} = \frac{\sum Yi \sum Xi^2 - \sum YiXi \sum Xi}{N\sum Xi^2 - \left(\sum Xi\right)^2}$$

**(٦-٣) تطبيقات وتمارين:**

٣-٦-١: التطبيقات:

التطبيق الأول:

نأخذ المثال الافتراضي التالي لشرح العلاقة بين الـدخل والإنفـاق عـلى الرعايـة الصـحية في مجتمع ما من فترة ١٩٨٠-٢٠٠٠.

حيث تمثل (Yi) الإنفاق، (Xi) الدخل بوحدات نقدية معينـة، ويوضـح الجـدول (٢) أدنـاه هذين المتغيرين لعينة تضم ٢٠ مشاهدة وكانت حسابات كل من:

$\sum Xi=395.27\ ,\ \sum Xi^2 = 9440.3$

$\sum Xi = 107.81,\ \sum Yi^2 = 945.5$

$\sum XiYi=2356.41,\ n = 20$

أثبت أن معادلة انحدار الإنفاق على الدخل هـي:

$$\hat{Y}\ 2.89+2.126X$$

وباستخدام هذه المعادلة المطلوب هو تقدير نقطة لكل من :

i ) الميل الحدي للإنفاق الصحي على الدخل (MPH).

ii) المرونة الاتفاقية (Elsaticiey of Health Expenditures) ()EH بالنسبة للـدخل عنـدما يكـون الـدخل ٢٠ دينارا.

جدول (٢)

يوضح الدخل والإنفاق على الرعاية الصحية

| (Yi) الإنفاق | Xi (الدخل) |
|---|---|
| 5.83 | ٢٩,٤٥ |
| ٢,٧٣ | ٢٠,١٢ |
| ٢,٩٢ | ١٥,٣٠ |
| ٤,٩٣ | ٩,٤٢ |
| ٤,٠٢ | ١٣,٤٣ |
| ٥,٤٢ | ١١,٤٧ |
| ٥,٩٦ | ١٤,٨٧ |
| ٦,١٢ | ١٦,٩٠ |
| ٦,٢٧ | ٤٠,٤٠ |
| ٥,٦١ | ١٤,٣٣ |
| ٥,٨٦ | ٢٤,٣٠ |
| ٦,٤٦ | ١٨,٤٦ |
| ٥,٠٢ | ١٨,١٤ |
| ٦,٨٦ | ٣٠,١٣ |
| ٦,٤٧ | ٣٠,٣٢ |
| ٦,٩٣ | ١٧,٩٦ |
| ٢,٤٢ | ١٢,٣٢ |
| ١٠,٠٦ | ٣٧,٤٢ |
| ٥,٥٧ | ١٣,١١ |
| ٢,٣٥ | ٧,٤٢ |
|  | n = 20 |

المصدر: بيانات افتراضية.

الجواب:

لإثبات معادلة انحدار الإنفاق الصحي على الدخل المساوي إلى:

$$\hat{y}_i = 2.89 + 0.126\ xi$$

تتبع الخطوات التالية:

بما أن $\left(\hat{y}_i\right)$ هي معادلة خطية لنموذج متكون من متغيرين يأخذ الصيغة التالية:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,xi$$

وسنبدأ بإيجاد القيم التقديرية للمعلمات $\hat{\beta}$، $\hat{\alpha}$ كما يلي:

وحيث إن صيغة تقدير قيمة معلمة $\left(\hat{\beta}\right)$ هي:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum xiyi - (\sum yi)(\sum xi)}{n\sum xi^2 - (\sum xi)^2}$$

وباستخدام البيانات والمعلومات المتوفرة في الجدول أعلاه تكون $\left(\hat{\beta}\right)$ كما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{20(2356.41) - (395.27)(107.81)}{20(9440.3) - (395.27)^2}$$

إذن:

$$\hat{\beta} = \frac{46728.0 - 42643.62}{188806 - 156244.36} = \frac{4085.14}{32661.63}$$

$$\therefore\ \hat{\beta} = 0.126$$

ولإيجاد قيمة المعلمة $\left(\hat{\alpha}\right)$ نحتاج إلى استخدام المعادلة الأولى من المعادلتين الطبيعيتين وكما يلي:

وبما أن:

$$\sum yi = n\,\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum xi$$

وبقسمة طرفي المعادلة على n نحصل على:

$$\frac{\sum yi}{n} = \frac{n\alpha}{n} + \hat{\beta}\frac{\sum xi}{n}$$

وهذه المعادلة تعني أيضا:

$$\overline{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,\overline{X}$$

إذن الصيغة المستخدمة لاستخراج $\left(\hat{\alpha}\right)$ هي:

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \beta\overline{X}$$

$\because \ \beta = 0.126$

$\therefore \ \overline{Y} = \frac{\sum Yi}{n} = \frac{107.81}{20} = 5.39$

وأيضاً $\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{392.27}{20} = 19.76$

إذن بالتعويض:

$$\hat{\alpha} = 5.39 - 0.126(19.76)$$

تكون:

$$\therefore \ \hat{\alpha} \cong 2.89$$

إذن المعادلة التقديرية لنموذج الإنفاق الصحي هي:

$$\hat{Y} = 2.89 + 0.126Xi$$

i - إن الميل الحدي للإنفاق على الرعاية الصحية (Marginal Propensitey) (Mp H) منسوبا إلى الدخل هو عبارة عن منحنى (Slope) خط الانحدار والذي يتمثل رياضيا بحصيلة تفاضل (dYi) بالنسبة إلى (dXi) من معادلة تقدير النموذج الخطي وكما يلي:

$$\frac{dyi}{dxi} = 0.126 = \hat{\beta}$$

إذن من هذا نستنتج بأن (MPH) هي عبارة عن $(\hat{\beta})$ في المعادلة التقديرية للنموذج الخطي البسيط.

ii - أما مرونة الإنفاق على الصحة منسوبة إلى الدخل فتساوي:

$$\psi = \frac{dyi}{dxi} \cdot \frac{xi}{\hat{y}i}$$

حيث تشير ع إلى المرونة (Elasticity).

وبما أن:

$$\frac{dyi}{dxi} = \hat{\beta} = 0.126$$

بافتراض أن الدخل x = 20 دينارا.

$$\hat{y}1 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}xi$$

إذن:

$$\hat{y}i = 2.59 + 0.126(20)$$

إذن:

$$\hat{y}i = 5.41$$

$$= 0.1.26.\frac{20}{5.41} = 0.46$$

وهي مرونة الإنفاق على الصحة منسوبة إلى الدخل عندما يكون الأخير (الدخل) يساوي ٢٠ دينارا.

التطبيق الثاني:

إذا أعطيت البيانات التالية:

| Xi | Yi |
|---|---|
| ١ | ٦ |
| ١ | ٤ |
| ٢ | ٣ |
| ٣ | ٥ |
| ٢ | ٤ |
| ٤ | ٥ |
| ٥ | ٣ |
| ٦ | ٢ |

١- أوجد القيمة التقديرية لكل من $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$ من المعادلتين الطبيعيتين التاليتين:

٢- أوجد القيمة التقديرية لكل من $\beta, \alpha$ باستخدام صيغة معادلتين كريمر اللتين هما:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i \sum X_1^2 - \left(\sum Y_i X_i\right)\left(\sum X_i\right)}{n\sum X_1^2 - \left(\sum X_i\right)^2} \quad \text{..................(3)}$$

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum Y_i X_i - \left(\sum Y_i\right)\left(\sum X_i\right)}{n\sum X_1^2 - \left(\sum X_i\right)^2} \quad \text{.......................(4)}$$

٣- أوجد القيمة التقديرية لكل من $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$ باستخدام صيغة الانحرافات عن الأوساط الحسابية التالية:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_1^2} = \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2} \quad \text{............... (5)}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X} \quad \text{......................................... (6)}$$

الجواب:

الإجابة على هذه الأسئلة يتطلب عمل جدول يتضمن المعلومات الآتية:

| $X_i$ | $Y_i$ | $X^2_i$ | $X_iY_i$ | $\hat{y}_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1 | 6 | 4.85 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 4.85 |
| 2 | 3 | 4 | 6 | 4.41 |
| 3 | 5 | 9 | 15 | 3.99 |
| 2 | 4 | 4 | 8 | 4.41 |
| 4 | 5 | 16 | 20 | 3.58 |
| 5 | 3 | 25 | 15 | 3.17 |
| 6 | 2 | 36 | 12 | 2.74 |
| $\sum 24$ | $\sum 32$ | $\sum 96$ | $\sum 86$ | $\sum 32$ |

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{24}{8}, \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{32}{8}, \overline{\hat{Y}} = \frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \frac{32}{8}$$

$$\therefore \overline{X} = 3, \therefore Y = 4 \therefore \hat{Y} = 4$$

الجواب الأول:

باستخدام المعادلتين (١) و (٢) فإن:

$$\sum Y_i = n\alpha + \hat{\beta} \sum Xi \qquad \therefore 32 = 8\hat{\alpha} + 24\hat{\beta}$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{\alpha} \sum X_i + \hat{\beta} \sum X^2_i \qquad \therefore 86 = 24\hat{\alpha} + 96\hat{\beta}$$

بضرب المعادلة (١) في العدد (٣)، وبطرحها من المعادلة (٢) نحصل ما يلي:

$$96 = 24\hat{\alpha} + 72\hat{\beta}$$

$$86 = 24\hat{\alpha} + 96\hat{\beta}$$

$$10 = -24\hat{\beta} \quad \therefore \hat{\beta} = \frac{10}{24} = 0.41667 = (-0.42)$$

وأيضا فإن قيمة $\hat{\alpha}$ تساوي:

باستخدام المعادلة (١)، وبالتعويض نحصل:

$$32 = 8\hat{\alpha} + 24(-0.42)$$

$$32 = 8\hat{\alpha} + (-10.08) \quad \therefore -10.08 = -10$$

$$\therefore 32 = 8\alpha - 10$$

$$32 + 10 = 8\alpha \quad \therefore 8\hat{\alpha} = 42 \,.\, \hat{\alpha} = \frac{42}{8} = 5.25$$

$$\therefore \hat{Y} = 5.25 - 0.42\, X_i$$

وهي معادلة التقدير التي تستخدم لتقدير قيم $\left(\hat{Y}_i\right)$ التقديرية كما هي مستخرجة في العمود الأخير من الجدول المذكور أعلاه وباستخدام الصيغة الآتية:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, Xi$$

الحل الثاني:

باستخدام المعادلتين (٣) و (٤) فإن:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Yi \sum X_1^2 - \left(\sum Y_i X_i\right)\left(\sum X_i\right)}{n\sum X_1^2 - \sum X_1^2} = \frac{(32)(96) - (86)(24)}{8(96) - (24)^2}$$

$$= \frac{3072 - 2064}{768 - 576}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1008}{192} = 5.25$$

وأن القيمة التقديرية للمعلمة $\hat{\beta}$ هي:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum Y_i X_i - \left(\sum Y_i\right)\left(\sum X_i\right) -}{n\sum X_1^2 - \left(\sum X_i\right)^2} = \frac{688 - 768}{768 - 576} = \frac{-80}{192}$$

$$\hat{\beta} = -0.41667 \qquad \therefore \hat{\beta} = -0.42$$

ومن المعادلة $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, Xi$ نحصل على قيمة العمود $\hat{Y}_i$.

الحل الثالث:

لاستخدام المعادلتين (٧) و (٨)، نحتاج إلى تكوين جدول يتضمن انحرافات القيم عن أوساطها الحسابية كما يلي:

| (X – X) (xi) | (Y – Y) (yi) | (X - $\overline{X}$ ) (Y - $\overline{Y}$ ) (xy) | (X - $\overline{X}$ )$^2$ ($x^2_i$) |
|---|---|---|---|
| -2 | 2 | -4 | 4 |
| -2 | 0 | 0 | 4 |
| -1 | -1 | -2 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| -1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | -1 | -2 | 4 |
| 3 | -2 | -6 | 9 |
| $\sum = 0$ | $\sum = 0$ | `$\sum x_i\, y_i = -10$ | $\sum X^2_i = 24$ |

من هذا الجدول يمكن بسهولة الحصول على القيم التقديرية لكل من $\hat{\beta},\hat{\alpha}$ وباستخدام المعادلتين (٧) و (٨) وكما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum\left(X_i - X\right)^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i} = \frac{-10}{24} = -0.42$$

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \left(-\hat{\beta}\right)\overline{X} + (0.42)\ (3) = 4 + 1.26 = 5.26$$

ملاحظة:

لقياس معدلات النمو في أي متغير من المتغيرات يستخدم النموذج الأسي التالي:

$Y_i = \alpha\ e^{BT}$

حيث:

Y = المتغير المراد قياس نموه.

T = الزمن.

E = اللوغاريتم الطبيعي وهو e = 2.718

α - معلمة الحد الثابت.

B = معلمة النمو.

ولأن النموذج السابق غير خطي فإنه يحول إلى نموذج خطي باستخدام اللوغاريتم لتبسيط عملية القياس حيث إن:

Log $Y_i$ = Log α + B T

وبإجراء انحدار على هذا النموذج بوساطة المربعات الصغرى العادية حيث المتغير التابع هو Log Yi والمتغير المستقل T، (الزمن) ومعامل النمو هو B يمكن الحصول على التقديرات المطلوبة.

(٢-٧-٣) التمارين:

١- أوضح أن:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum Y_i \sum X_i}{n\sum X_1^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i \sum X_i^2 - \sum Y_i X_i \sum X_i}{n\sum X_1^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$

٢- ناقش بتركيز المغزى من وجود فرضيات طريقة المربعات الصغرى. ماذا يحدث في حالة عدم تحقق إحدى هذه الفرضيات. وماذا يطلق على تلك الحالات؟

٣- من المعادلتين الطبيعيتين لخط المربعات الصغرى.

$$\sum Y = n\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum X \quad \text{......................} (1)$$

$$\sum XY = \hat{\alpha}\sum X + \hat{\beta}\sum X^2 \quad \text{.........} (2)$$

أوضح بطريقة التعويض المباشر للمعادلة الأولى في الثانية كونها مساوية ل:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}$$

٤- ماذا يقصد بـ:

i. تحليل الانحدار البسيط؟ Simple Regression Analysis

ii. تحليل الانحدار الخطي؟ Linear Regression Analysis

iii. شكل الانتشار؟ Scatter Diagram

v. حد الخطأ؟ An Error Term

٥- ماذا يقصد بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)، ولماذا لا نأخذ مجموع الانحرافات البسيطة وبدون تربيعهم؟ أو لماذا لا نأخذ مجموع الانحرافات المطلقة؟

٦- أوضح الاختلاف:

١- بين ($\alpha$)، ($\beta$) من جهة. وبينهم و $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$ من جهة أخرى.

٢- بين $(e_i), (u_i)$ .

٣- بين المعادلة الحقيقية للعلاقة بين (X) ,(Y)، والمعادلة التقديرية للعلاقة بين المتغيرين (X) ,(Y)، اكتب كلا من المعادلتين.

٧- عينة متكون من (٢٠٠) زوج من المشاهدات، تم الحصول منها على المعلومات الآتية:

$\sum X = 11.34 \quad , \sum Y = 20.72 \quad , \sum x^2 = 12.16$

$\sum Y^2 = 84.96 \quad , \sum XY = 22.13$

أوجد القيم التقديرية للانحدار الخطي للمتغير (Y) على (X).

٨- عينة مكونة من (٢٠) مشاهدة طبق عليها نموذج الانحدار التالي:

$Y = \alpha + \beta X + e$

بافتراض أن $(e_i)$ موزعة طبيعيا مع وسط حسابي مساو للصفر وتباين ثابت مقداره $(\sigma^2_u)$، وقد أعطيت هذه العينة المعلومات التالية:

$\sum Y = 21.9 \quad , \sum (Y - \bar{Y})^2 = 86.9$

$\sum X = 186.2 \quad , \sum (X - X)^2 = 215.4$

$, \sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 106.4$

أوجد القيمة التقديرية لكل من $\left(\hat{\alpha}\right), \left(\hat{\beta}\right)$؟

# الفصل الرابع

# خصائص مقدرات طريقة المربعات الصغرى (OLS)

# الفصل الرابع

## خصائص مقدرات طريقة المربعات الصغرى (OLS)

إن أحد الأسباب الأساسية لانتشار استخدام (OLS) في تقدير العلاقات الاقتصادية هو أن سمات النموذج له مميزات مثالية. وكما هو معلوم فإنه توجد عدة طرق قياسية لتقدير معلمات العلاقات الاقتصادية. والمهم هو كيفية اختيار أفضلها. كذلك كيفية تقدير ما إذا كانت بعض تلك المقدرات جيدة والأخرى أكثر جودة، وهذا يقودنا إلى ضرورة معرفة بعض المعايير للحكم على جودة (Goodness) هذه المقدرات. وبصورة عامة فإن هذه المقدرات المفروض أن تكون قريبة من القيم الحقيقية (True Values) لمعلمات النموذج، وإذا اختلفت فيجب أن يكون الاختلاف في مجال ضيق جدا، إن اقتراب المعلمات التقديرية من معلمات المجتمع يقاس عادة بالوسط والتباين لتوزيع العينة للتقديرات القياسية المختلفة، وعلى كل حال يتطلب قرب مقدرات العينة من معلمات المجتمع بعض المعايير للاستناد عليها. وهذه المعايير هي التي نطلق عليها (BLUE) أي Best, Linear, Unbiased Estimator وتعني أفضل مقدرات خطية غير متحيزة.

(٤-١) طبيعة خصائص مقدرات المربعات الصغرى:

سبق وأن تطرقنا إلى طريقة التقدير للعلاقة بين متغيرين باستخدام الطريقة التقليدية لمقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) المستندة على فرضياتها العامة التي ترى بأن العلاقة خطية بين متغيرين أحدهما مستقل ($X_i$) والآخر تابع ($Y_i$)، وكذلك ثبات المتغير المستقل، بمعنى أنه متغير صحيح الكمية لا يحتوي على أخطاء قياسية، علاوة على كونه ليس عشوائيا، وفرضياتها الفنية الخاصة بحد الاضطراب (المتغير العشوائي) ذي الوسط الحسابي الذي توقعه يساوي صفرا، وتباينه ثابتا، وتباينه المشترك يساوي صفرا، وهذا المتغير موزع توزيعا طبيعيا.

وعليه فإن العلاقة بين المتغيرين بموجب هذه الفرضيات تحتاج إلى تقدير لثلاثة مجاهيل هي: $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \sigma_u^2\right)$، وثم اشتقاق صيغة تقدير $\left(\hat{\alpha}\right), \left(\hat{\beta}\right)$ حسب طرق التعويض

أو الانحرافات أو كريمر. أما التوسع في النموذج الخطي فيحتاج إلى استخدام المصـفوفات في إيجاد المعلمات التقديرية. راجع الفصل السادس والسابع.

والخطوة الأساسية الثانية هي مناقشة كون مقدرات النموذج الخطي البسـيط $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$ تمتاز بخاصية الخطيـة Linearity، وكونهـا أفضـل المقـدرات (Best Estimators) عـلاوة عـلى أنهـا غـير متحيزة (Unbiased Estimators).

وعليه فالمهم هو كون الوسط الحسابي للمقدرات مساويا للوسـط الحسـابي الحقيقـي أي أن:

$$E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha$$

و $$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$$

وكذلك تباين هذه المقدرات مساويا إلى:

$$\text{Var}\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{\sigma_u^2}{n} = \frac{1}{n}.\sigma_u^2$$

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_1^2} = \frac{1}{\sum x_1^2}.\sigma_u^2$$

ولتسهيل إثبات كون مقدرات معلمات النموذج الخطي البسيط $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ تتضمن الصفات الثلاث المذكورة أعلاه (BLUE) نحتاج إلى افتراض بعض النتائج المعطـاة[1] ذات العلاقـة بخصـائص النموذج والتي تتمثل فيما يلي:

$$\left\{\begin{array}{c} a.Wi = \dfrac{xi}{\sum x_1^2} \\ b.\sum Wi = 0 \\ c.\sum W_i^2 = \dfrac{1}{\sum x_1^2} \\ d.\sum Wx_i = \sum WiXi = 1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

---

(1) A. Koutsoyannis, Theory of Econometrics", 2nd Op. Cit, P. 70.

حيث تشير (Wi) إلى الوزن Wieght.

انظر الفقرة (٤-١٠) والمثال رقم (١). للإطلاع على كيفية إثبات هذه النتائج (الأوزان).

(٤-٢) إثبات خطية مقدرات OLS (Linearity):

إن الخاصية الأساسية الأولى التي يمكن ملاحظتها على مقدرات أصغر المربعات هو كونها دالة خطية للمشاهدات الفعلية للمتغير التابع ($Y_i$)، وللبرهنة على ذلك فإنه مما سبق اتضح:

$$\because \quad \hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

and

$$\because \quad y_i = Y_i - \bar{Y}$$

بالتعويض:

$$\therefore \; \hat{\beta} = \frac{\sum x_i\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_1^2} - \frac{\sum x_i \bar{Y}}{\sum x_1^2}$$

وبما أن الوسط الحسابي لقيم ($Y_i$) هو قيمة ثابتة وعليه يمكن وضعه قبل المقدار $\Sigma$ ($x_i$) لنحصل على:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_1^2} - \frac{\bar{Y}\sum x_i}{\sum x_1^2}$$

وبما أن $\Sigma (Xi - \bar{X}) = 0$ إذن: $\Sigma x_i = 0$

وهذا يعني أن الحد يساوي:

$$\frac{Y\sum x_i}{\sum x_1^2} = 0$$

إذن:

$$\therefore \; \hat{\beta} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_1^2}$$

ومن معادلة الأوزان (١١) نلاحظ أن:

$$\because W_i = \frac{x_i}{\sum x_1^2}$$

بالتعويض نحصل على[1]:

$$\therefore \hat{\beta} = \sum W_i Y_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(12)}$$

ومن هذا نستنتج أن المعادلة (١٢) تشير إلى أن المعلمة $\left(\hat{\beta}\right)$ هي دالة خطية لقيم المتغير التابع $(Y_i)$ أي بطريقة أخرى فإن*:

$$\hat{\beta} = W_1 Y_1 + W_2 Y_2 + W_3 Y_3 + \ldots + W_n Y_n$$

وباتباع نفس المنطق التحليلي يمكن أن نبرهن بأن $\left(\hat{\alpha}\right)$ هي الأخرى دالة خطية لقيم المتغير $(Y_i)$ وكما يلي:

بأخذ المعادلة الأولى من المعادلتين الطبيعيتين الآنيتين نجد أن:

$$\because \sum Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum X_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6)}$$

بقسمة كلا الطرفين على $(n)$ نحصل على:

$$\frac{\sum Yi}{n} = \frac{n\hat{\alpha}}{n} + \hat{\beta}\frac{\sum X_i}{n}$$

وهذا يعني:

$$\therefore \overline{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,\overline{X}$$

(وبما أن $\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$ أو $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i$)

إذن يمكن إعادة كتابة المعادلة أعلاه كما يلي:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum Y_i - \overline{X}\sum W_i Y_i$$

لأن:

$$\hat{\beta} = \sum W_i Y_i$$

---

( 1) A. Koutsoyannis' "Theory of Econometries"; 2nd, Op. Cit, p. 70.

* راجع الملحق (A).

وبما أن $\left(\bar{x}\right)$ هو الوسط الحسابي وهو قيمة ثابتة وأن $\hat{\beta} = \sum Wi\, yi$ .

إذن بالتعويض وبإعادة ترتيب المعادلة أعلاه نحصل على:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \bar{X}\sum wiyi$$

وبأخذ المعامل المشترك نجد بأن:

$$\hat{\alpha} = \sum\left(\frac{1}{n} - \bar{X}W_i\right)Y_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

بما أن $\left(\bar{X}\right)$ هو قيمة ثابتة وكذلك $(W_i)$ نستنتج أن $\left(\hat{\alpha}\right)$ دالة خطية لقيم المتغير التابع $(Y_i)$، وعليه فإن المعادلة (١٢) والمعادلة (١٣) تشيران إلى أن معلـمات النمـوذج الخطـي البسـيط هي معلمات خطية (Linear coefficients).

(٣-٤) إثبات مقدرات المربعات الصغرى غير متحيزة:

(OLS Coefficients are Unbiased):

ولاختبار عـدم تحيـز $\left(\hat{\beta}\right), \left(\hat{\alpha}\right)$ أي اختبـار مـا إذا كانـت مقـدرات طريقـة المربعـات الصغرى الاعتيادية هي غير متحيزة، أي أن الوسط الحسابي لقيم $\left(\hat{\alpha}\right)$ و $\left(\hat{\beta}\right)$ مسـاو لقيمتهـا الحقيقية. بمعنى أن القيمة المقدرة للمعلمة $\left(\hat{\alpha}\right)$ و $\left(\hat{\beta}\right)$ أي اختبـار مـا إذا كانـت مقـدرات طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية هـي غـير متحيـزة، أي أن الوسـط الحسـابي لقـيم $\left(\hat{\alpha}\right)$ و $\left(\hat{\beta}\right)$ مساو لقيمتها الحقيقية، بمعنـى أن القيمـة المقـدرة للمعلمـة $\left(\hat{\alpha}\right)$ و $\left(\hat{\beta}\right)$ مسـاوية قيمتها الحقيقية أي أن:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$$

$$E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha$$

ولإثبات ذلك نأخذ المقدر $\left(\hat{\beta}\right)$ أولا وكما يلي:

بما أن:

$$\hat{\beta} = \sum W_i Y_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

(من خاصية الخطية).

وبما أن:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وبتعويض المعادلة (١) في المعادلة (١٢) نحصل على:

$$\hat{\beta} = \sum W_i (\alpha + \beta X + U_i)$$

$$\therefore \hat{\beta} = \alpha \sum W_i + \beta \sum W_i X_i + \sum W$$

وباستخدام نتائج المعادلة (١١) التالية:

$$\sum W_i = 0, \sum W_i X_i = 1$$

$$\therefore \hat{\beta} = \beta + \sum W_i U_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

وبأخذ القيمة التوقعية (Expected Value) لكل من طرفي المعادلة (١٤) نحصل على:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = E(\beta) + E(\sum W_i U_i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

وهذا أيضا يعني بأن:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = E(\beta) + E(\sum W_i) E(U_i)$$

ولكن: $\because E(U_i) = 0$

وأن $(\sum W_i)$ قيمة ثابتة (Constant)، وأن القيمة المتوقعة للثابت هي نفس القيمـة، أي $[E(\sum W_i) = \sum W_i]$، وأن أية قيمة ثابتة مضروبة في صفر تساوي صـفرا ومـن كـل هـذا نسـتنتج أن: $E\left(\hat{\beta}\right) = E(\beta)$.

وبما أن $(\beta)$ هي قيمة ثابتة وتوقعها مساو لها أيضا، فهذا يعني:

$$\therefore E\left(\hat{\beta}\right) = \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

من هذا نجد أن مقدرات (OLS) غير متحيزة، أي أن وسطها الحسابي مساو لوسطها الحسابي الحقيقي.

وباتباع نفس المنطق أعلاه يمكن البرهنة على أن:

$$E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha \text{ .......................... } (17)$$

ولتحقيق ذلك نتبع الخطوات التالية:

بتعويض المعادلة (٢) في المعادلة (١٣) نحصل على:

$$\because\ Y_i = \alpha + \beta X + U_i \text{ .................. } (2)$$

$$\because\ \hat{\alpha} = \sum\left(\frac{1}{n} - \overline{X}W_i\right)Y_i \text{ .............. } (3)$$

$$\therefore\ \hat{\alpha} = \sum\left(\frac{1}{n} - \overline{X}Wi\right)..\left(\alpha + \beta X_i + U_i\right)$$

إذن:

$$\hat{\alpha} = \alpha - \alpha X \sum W_i + \beta\ \overline{X} - \beta X \sum W_i X_i + \sum\left(\frac{1}{n} - \overline{X}W_i\right)U_i$$

وباستخدام نتائج المعادلة (١١) حيث:

$$\sum W_i = 0, \sum W_i X_i = 1$$

إذن:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum\left(\frac{1}{n} - \overline{X}W_i\right)U_i \text{ ............. } (17)$$

وبأخذ القيمة المتوقعة لكل من الطرفين نحصل على:

$$E\left(\hat{\alpha}\right) = E(\alpha) + E\left(\sum\left(\frac{1}{n} - \overline{X}W_i\right)E\left(U_i\right)\right.$$

بما أن:

$$E(U_i) = 0$$

إذن:

$$E\left(\hat{\alpha}\right) = E(\alpha) \text{ ........................... } (18)$$

وبما أن (α) هي قيمة ثابتة وتوقعها مساو لها أيضا فهذا يعني:

$$\therefore E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (18)$$

ومنها نستنتج أن مقدرات OLS غير متحيزة أي وسطها الحسابي مساو لوسطها الحسابي الحقيقي.

(٤-٤) إثبات مقدرات المربعات الصغرى أفضل مقدرات Best. Estimators:

وهذا يعني بأن معلمات المربعات الصغرى تمتلك أقل التباينات (Minimum Variance) أي أن تباين $\hat{\beta},\hat{\alpha}$ أقل ما يمكن، وقبل أن نبرهن على امتلاك المعلمات خاصية أقل التباينات. لابد من معرفة صيغة تباين كل من $\left(\hat{\alpha}\right)$ و $\left(\hat{\beta}\right)$.

ومن تعريف التباين فإن تباين المعلمة $\left(\hat{\beta}\right)$ هو عبارة عن مربع انحراف (القيمة المقدرة عن قيمتها المتوقعة) أي:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E\left[\left(\hat{\beta} - E\left(\hat{\beta}\right)\right)^2\right]$$

وكما تم توضيحه أعلاه فإن قيمة المقدر $\left(\hat{\beta}\right)$ هي قيمة غير متحيزة للقيمة الحقيقية أي أن:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (16)$$

إذن:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E\left(\hat{\beta} - \beta\right)^2$$

وبما أن:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta + \sum W_i U_i \;\ldots\ldots\ldots\ (14)$$

أي أن:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = E\,\beta + E\,(wiui)$$

وبالتعويض نحصل على:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E\,[\,(\beta + \sum W_i\,U_i) - \beta\,]^2$$

إذن:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E\,(\sum W_i\,U_i)^2$$

وهذا يعني:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E\,(W^2_1\,U^2_1 + W^2_2\,U_2 + \ldots + W^2_n\,U^2_n + \ldots +$$

$$2\,W_1\,W_2\,U_1\,U_2 + \ldots + 2\,W_{n-1}\,W_n\,U_{n-1})$$

وحيث إن:

$$E\,(U^2_1) = \sigma^2_u$$

وكذلك:

$$E\,(U_i\,U_j) = 0\,..\,1 = j$$

إذن:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2_u \sum W^2_1$$

وبما أن: $\sum W^2_1 = \dfrac{1}{\sum x_1^2}$ حسب ما هو مذكور في المعادلة (١١) معادلة الأوزان.

إذن بالتعويض:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2_u \cdot \frac{1}{\sum x_i^2}$$

أو:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} = \frac{1}{\sum x_i^2}.\sigma_u^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

ومنه نستطيع أن نستنتج الخطأ المعياري Standard Error (S. E) للمقدر $\left(\hat{\beta}\right)$ كما يلي:

$$S.\,E\left(\hat{\beta}\right) = \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{\sum x_1^2}.\sigma_u^2}$$

$$\text{Var}\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma_u^2 . \left( \frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2} \right) \text{ ............... (20)}$$

تشير المعادلة (٢٠) إلى تباين الحد الثابت. أما الخطأ المعياري له فهو:

$$\text{S. E}\left(\hat{\alpha}\right) = \sqrt{\sigma_u^2 . \left( \frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2} \right)}$$

(٤-٥) التباين المشترك (التغاير) للمقدرات Co – Variance:

استكمالا للخصائص يمكن اشتقاق التباين المشترك لمقدرات أصغر المربعات وكما يلي:

بما أن المعادلتين (١٩) و (٢٠) تمثلان تبايني المقدرات فيكون التباين المشترك هو:

$$\text{Cov}\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = E\left\{ \left[ \hat{\alpha} - E\left(\hat{\alpha}\right) \right] \left[ \hat{\beta} - E\left(\hat{\beta}\right) \right] \right\}$$

وبما أن كلا من $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$ مقدران غير متحيزين أي أن:

$$E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha \text{ .................. (17)}$$

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta \text{ .............................. (16)}$$

إذن فإن التغاير (التباين المشترك) هو:

$$\text{Cov}\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = E\left[ (\hat{\alpha} - \alpha)\ (\hat{\beta} - \beta) \right]$$

وعليه فإن:

$$\text{Cov}\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = -\frac{\overline{X}}{\sum x_i^2} . \sigma_u^2 \text{ ........... (21)}$$

وتمثل المعادلة (٢١) تقديرا للتغاير (التباين المشترك). والتي تم التوصل إليها كما يلي:

بما أن:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum \left( \frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) U_i \text{ ............ (17)}$$

وأن:

$$\hat{\beta} = \beta + \sum W_i U_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

وبتعويض المعادلة (١٤) و (١٧) في صيغة مفهوم التغاير نحصل على:

$$Cov\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = E\left[\left(\alpha + \sum\left(\frac{1}{n} - \overline{X}W_i\right)U_i\right) - \alpha\right]\left[\left(\beta + \sum W_i U_i\right) - \beta\right]$$

$$= E\left[\alpha + \sum\left(\frac{1}{n} - \overline{X}W_i\right)U_i\right) - \alpha\right]\left[\left(\beta + \sum W_i U_i\right) - \beta\right]$$

$$= E\left[\left(-\overline{X}\, W_i U_i\right)\left(\sum W_i U_i\right)\right]$$

$$Cov\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = E\left(-\overline{X} \sum W_i^2 U_i^2\right)$$

وبما أن:

$$\sum W_i^2 = \frac{1}{\sum x_1^2}$$

وتعد المعادلة (١٩) في غاية الأهمية لأنها تمثل المنطقة تحت المنحنى, ومنها تم الحصول على الانحراف المعياري للعينة والخطأ المعياري للمجتمع(S. E) .

وباتباع نفس المنطق يمكن البرهنة على أن $\left(\hat{\alpha}\right)$ لها صفة أقل تباينا. وتأخذ الصيغة (٢٠) التي سيتم اشتقاقها كالآتي:

باستخدام المعادلة (١٨).

$$E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha\left(\frac{1}{n} - \overline{X}W_i\right)$$

∴ سيكون تباين $\left(\hat{a}\right)$:

$$Var\left(\hat{\alpha}\right) = E\left\{\left[\hat{\alpha} - E\left(\hat{\alpha}\right)\right]^2\right\}$$

إذن:

$$= E\left[\hat{\alpha} - \alpha\right]^2$$

وباستخدام المعادلة (١٣):

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum \left( \frac{1}{n} - \overline{X}W_i \right) U_i$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\text{Var}\left(\hat{\alpha}\right) = E\,[\hat{\alpha} - \alpha]^2 = E\,[\sum \left( \frac{1}{n} - \overline{X}W_i \right) U_i]^2$$

$$= \sum \left( \frac{1}{n} - \overline{X}W_i \right)^2 E\,(U_i)^2$$

وبما أن:

$$E\,(U_1)^2 = \sigma^2_u$$

إذن:

$$\text{Var}\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma^2_u\,[\sum \left( \frac{1}{n} - \overline{X}W_i \right)]^2$$

$$\text{Var}\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma^2_u \left( \frac{1}{n} - \frac{2\overline{X}}{n} \sum W_i + \overline{X}^2 \sum W_2^1 \right)$$

وباستخدام المعادلة (١١):

$$\sum W_1 = 0.\ \sum W^2_i = \frac{1}{\sum x_1^2}$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\text{Var}\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma^2_u \left( \frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right)$$

وبأخذ القيمة ($n \sum x^2_1$) كمقام مشترك نحصل على:

$$\text{Var}\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma_u^2 \left( \frac{\sum x_i^2 + n\overline{X}^2}{n \sum x_i^2} \right)$$

وبما أن:

$$\because\ xi = (Xi - \overline{X})$$

إذن:

$$\text{Var}\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma_u^2 \left( \frac{\sum \left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + n\overline{X}^2}{n \sum x_i^2} \right)$$

$$\text{Var}\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma_u^2 \left( \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2 + n\overline{X}^2}{n\sum x_i^2} \right)$$

وأن:

$$E(U_i^2) = \sigma_u^2$$

إذن بالتعويض نحصل على:

$$\text{Cov}\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = E\left( -\overline{X} \frac{1}{\sum x_i^2} . \sigma_u^2 \right)$$

وبأخذ التوقع نحصل على معادلة التباين المشترك وهي:

$$\text{Cov}\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = -\frac{\overline{X}}{\sum x_i^2} . \sigma_u^2 \quad \text{.......... (21)}$$

(٦-٤) نظرية ماركوف (Gauss Markov Theorm):

تبحث نظرية ماركوف في الإثبات البديل للحصول على أفضل التقديرات الخطية وغير المتحيزة (BLUE) وبصورة مباشرة، وإن نتائج هذا التطور البديل مطابقة للنتائج التي تم التوصل إليها بطريقة OLS، وطريقة ماركوف لها فوائدها التطبيقية في الاشتقاقات كما سيرد في الفصول القادمة. وللبرهنة على أن $\left(\hat{\beta}\right)$ لها خاصية أقل التباينات بين الفئات (Class) والمقدرات غير المتحيزة.

وباستدعاء فرضيات OLS، نحتاج أيضا إلى إعطاء قيمة فرضية خطية للمعلمة $\left(\hat{\beta}\right)$ (Arbitrary Linear Estimator) وكما يلي:

$$\left(\hat{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i \quad \text{.................... (22)}$$

والمشكلة هي في اختيار الأوزان $(C_i)$ التي تجعل العلاقة:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$$

أو تجعل $\left(\hat{\beta} - \beta\right)$ أصغر ما يمكن لتقليل تباين $\left(\hat{\beta}\right)$، ومن تعريف (Yi) في المعادلة

(٣) (الفصل الثالث) وبتعويضها في المعادلة (٢١) نحصل على ما يلي:

وبالضرب:

$$\hat{\beta} = \sum C_i (\alpha + \beta Xi + Ui)$$

$$\therefore \hat{\beta} = \alpha \sum Ci + \beta \sum Ci\, Xi + \sum Ciui$$

وبأخذ القيمة المتوقعة (Expected) نحصل على:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \alpha \sum Ci + \beta \sum Ci\, Xi$$

وبما أن حدود هذه المعادلة قد تم افتراضها بأنها ثابتة في العينات المتكررة وأن $E(u) = 0$ بموجب الفرضيات الفنية لـ (OLS)، من هذا نستنتج بأن $\left(\hat{\beta}\right)$ هي مقدر غير متحيز للمعلمة الحقيقية (β) إذا توفرت الشروط التالية:

وهذه الأوزان مشابهة لأوزان المذكورة في المعادلة (١١) السابقة الذكر:

$$\left.\begin{array}{l} \sum Ci = 0 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23) \\ \sum Ci\, Xi = 1 \end{array}\right\}$$

ولهذا فإن $E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$.

وللحصول على أقل تباين للمعلمة $\left(\hat{\beta}\right)$ يتم ذلك كما يلي:

باستخدام الشروط في المعادلة (٢٣) أعلاه فإن تباين المعلمة $\left(\hat{\beta}\right)$ سيكون كما يلي:

$$Var(\beta) = \sigma^2_u \sum C^2_i$$

ومن تقليل التباين $Var \left(\hat{\beta}\right)$ والخاضع للشروط (القيود) في المعادلة (٢٣) وأن $(\sigma^2_u)$ ثابت، إذن من الضروري:

$$\text{minimize} \left(\sum Ci\right) \text{ Subject to Conditions of eq (23)}$$

ولحل مشكلة التصغير (Minimization) نحتاج إلى استدعاء مضاعف لاكرانج

(Lagrangian Multiplier) وسـنتناول توضـيح هـذا المضـاعف في نهايـة الفصـل. ومضـاعف لاكرانج يأخذ الصيغة التالية:

مضاعف لاكرانجي = الدالة الهدفية - $\lambda$ (دالة القيود)

أو:

Q = f (Objective Function) - $\lambda$ (Constraints Function)

تشير (Q) إلى مضاعف لاكرانج، والذي هو عبارة عن دالة للدالة الهدفيـة مطروحـة منهـا ($\lambda$)، والتي تشير إلى مضاعف لاكرانج مضروبا في قيود الدالة الهدفية، ولتطبيق هذه الدالـة عـلى المشكلة أعلاه، نجد أن القيود ممثلة في شروط ماركوف (المعادلة ٢٣) والدالة الهدفية هـي $\sum Ci$،

وهذه متأتية من كون $Var(\sum CiYi) = Var\left(\hat{\beta}\right)$.

وبسبب كون (Yi) متغير مستقل وعليه فإن:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \sum C_i^2 . Var(Yi).$$

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = (\sum C_i^2) . \sigma_u^2$$

وبما أن ($\sigma_u^2$) ثابت، إذن لابد من تقليل ($\sum C_i^2$).

وعليه يمكن كتابة مضاعف لاكرانج كالآتي:

$$Q = \sum C_1^2 - 2\lambda \sum Ci - 2\mu (\sum CiXi - 1)$$

حيث تشير كلا من $\lambda$, $\mu$ إلى مضاعفات لاكرانج وبالتفاضل الجزئي (Partial Differentiation) لـ (Q) مع كل حد من حدود المعادلة (أي مع $Ci, \lambda, \mu$) نحصل على:

$$\frac{\delta Q}{\delta Ci} = 2\sum Ci - 2\sum \lambda - 2\sum \mu\, Xi \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\delta Q}{\delta \lambda} = -2\sum Ci \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\delta Q}{\delta U} = -2\sum CiXi + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

وبمساواة نتائج التفاضل الجزئي أعلاه إلى الصفر وإعادة ترتيب المعادلات نحصل على:

$$\because\ 2\sum Ci - 2\sum \lambda - 2\sum \mu\, Xi = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وبالترتيب نحصل على:

$$- \sum (Ci - \lambda - \mu Xi) = 0$$

$$- 2 \sum Ci\ Xi = 0 \ \ldots\ldots (2)$$

$$- 2 \sum Ci\ Xi + 2 = 0 \ \ldots\ldots (3)$$

$$- 2 (\sum Ci\ Xi + 1) = 0$$

وبقسمة طرفي المعادلات على (٢) نحصل على ما يلي:

$$\sum Ci - \sum \lambda - \mu \sum Xi = 0 \ \ldots\ldots (1)$$

$$- \sum Ci = 0 \ \ldots\ldots (2)$$

$$- \sum Ci\ Xi + 1 = 0 \ \ldots\ldots (3)$$

إذن بالترتيب نحصل على:

$$\sum Ci = n \lambda + \mu \sum Xi \ \ldots\ldots (22\text{-}1)$$

$$\sum Ci = 0 \ \ldots\ldots (22\text{-}2)$$

$$\sum Ci\ Xi = 1 \ \ldots\ldots (22\text{-}3)$$

لأن كلا من μ، λ ثوابت.

وبقسمة طرفي المعادلة (١-٢٢) على (n) نحصل على:

$$\frac{\sum Ci}{n} = \lambda + \mu \overline{X}$$

وبترتيب المعادلة نحصل على:

$$\therefore \lambda = \frac{\sum Ci}{n} = \mu \overline{X}$$

بما أن: $\sum Ci = 0$ من المعادلة (٢-٢٣) أعلاه.

إذن:

$$\therefore \lambda = -\mu \overline{X}$$

وبتعويض هذه النتيجة في المعادلة (١-٢٣) نحصل على:

$$\sum Ci = -\mu \overline{X} + \mu Xi$$

$$= \mu (Xi - X)$$

إذن:

$$Ci = \mu Xi$$

وبضرب هذه النتيجة بـ ( $X_i$) وأخـذ المجمـوع ($\sum$) وباسـتخدام المعادلـة (٣-٢٢) نحصـل على:

$$\sum C_i X_i = \mu \sum x_i X_i = 1$$

وبما أن:

$$\mu \sum x_i X_i = 1$$

بضرب الطرفين في ($\sum X_i X_i$) نحصل على أن:

$$\mu = \frac{1}{\sum x_i X_i} = \frac{1}{\sum\left[x\left(x_1 + \overline{X}\right)\right]} = \frac{1}{\sum x_1^2 + \overline{X}\sum x_i} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

وحيث أن:

$$\sum x_i = 0$$

وبتعويض قيمة ($\mu$) المساوية إلى $\frac{1}{\sum x_i^2}$ في معادلة ($C^*_i$) أعلاه للحصول:

$$C_i^* \frac{1}{\sum x_i^2}.x_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} \quad \text{.............................. (24)}$$

من هـذا نسـتنتج بـأن الأوزان ($C_i$) متطابقـة مـع أوزان طريقـة المربعـات الصـغرى ($W_i$) الموضحة في المعادلة (١١)، وعليه فإن المعلمة $\hat{\beta}$ هي أفضل مقدر خطي غير متحيز ويساوي:

$$\sum W_i Y_i = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \hat{\beta}$$

وباتباع نفس الأسلوب المذكور أعلاه يمكـن الحصـول عـلى قيمـة $\hat{\alpha}$ وهـي أفضـل مقـدر خطي غير متحيز.

(٧-٤) إيجاد تقدير الانحراف المعياري لمعادلة خط الانحدار $\left(\hat{\sigma}_u^2\right)$:

لقد سبق وأن أوضحنا بأن مقدرات معلمات النموذج الخطي يتخذ الشكل التـالي $Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i$ وبموجب الفرضيات العامة والفنية لهذا النموذج فـإن معـادلات التقـدير للمعلـمات كانت بالشكل التالي:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \frac{n\sum X_i Y_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} = \frac{\sum xy - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum x_1^2 - n\overline{X}^2}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}$$

وهي أفضل تقديرات خطية وغير متحيـزة للمعلـمات الحقيقيـة $\alpha$ ,$\beta$ وكانـت معـادلات انحرافهما المعياري كالآتي:

$$Var\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{\sigma_u^2 \sum X_i^2}{n\sum x_i} . Var\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}$$

ومعادلة تباينهما المشترك (التغاير) كانت:

$$Cov\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = \frac{-\overline{X}}{\sum x_i^2} . \sigma_u^2$$

أما المعادلة التقديرية لتباين المتغير العشوائي للنموذج الخطي البسيط فهي:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum ei^2}{n-2} = \frac{\sum ei^2}{n-k} \qquad \text{.................. (25)}$$

حيث إن: n تشير إلى عدد المشاهدات في حين أن k تشـير إلى عـدد التغـيرات المسـتخدمة في النموذج التقديري.

وقد تم التوصل إليها بالأسلوب التالي:

بما أن تقدير تباين $\left(\hat{\sigma}_u^2\right)$ حد الاضطراب (Disturbance Term) يعتمد عـلى مربـع البـواقي (Squared Residuals) حول خط تقدير المربعات الصغرى.

فنحصل من ذلك على العلاقة التالية:

$$e_i = y_i + \beta\, x_i$$

وبأخذ متوسط المعادلة التالية:

$$Y_i = \alpha + \beta\, X_i + U_i \ \text{............................ (1)}$$

وذلك بجمعها وقسمتها على (n) نحصل على المعادلة:

$$\overline{Y} = \alpha + \beta\overline{X} + \overline{U} \ \text{.......................... (2)}$$

وبطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) نحصل على:

$$Y_i - \overline{Y} = (\alpha - \alpha) + (\beta X_i - \beta \overline{X}) + U_i - \overline{U}$$

$$\therefore y_i = \beta x_i + U_i - \overline{U}$$

إذن نحصل على معادلة الانحرافات التالية:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

وحيث إن:

$$\therefore \hat{y}_i = \hat{\beta} x$$

إذن:

$$e_i = (\beta x_i + U_i - \overline{U}) - \hat{\beta} x_i$$

وبإعادة ترتيبهما نحصل على:

$$e_i = (\beta x_i - \hat{\beta} x_i) + (U_i - \overline{U})$$

أي:

$$e_i = -(\hat{\beta} - \beta) x_i + (U_i - \overline{U})$$

وبأخذ مجموع مربع البواقي نحصل على:

$$\sum e_1^2 = (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum x_1^2 + \sum (U_i - \overline{U})^2 - 2(\hat{\beta} - \beta) \sum X_i (U_i - \overline{U})$$

وبأخذ القيم المتوقعة لكل حد من الحدود في الجانب الأيمن مـن المعادلـة أعـلاه نحصـل على:

$$[E(\hat{\beta} - \beta)2 \sum x_i^2] = \sigma_u^2$$

(استخدام المعادلة ١٨).

وإن:

$$E[\sum (U_i - \overline{U})^2] = E\left[\sum U_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum U_i\right)^2\right]$$

$$= (n-1)\ \sigma_u^2$$

وإن:

باستخدام المعادلة (١٤):

$$E[(\hat{\beta} - \beta) \sum x_i (U_i - \overline{U})] = E\left[\frac{\sum W_i U_i}{\sum x_i^2}\left(\sum U_i x_i - \overline{U} \sum x_i\right)\right]$$

حيث إن:

$$= E\left[\frac{\left(\sum W_i x_i\right)^2}{\sum x_i^2}\right] \quad \sum x_i = 0$$

$$= \sigma_u^2$$

وعليه فإن:

$$E(\sum e_i^2) = \sigma_u^2 + (n-1)\ \sigma_u^2 - 2\ \sigma_u^2$$

ومن قسمة طرفي المعادلة على (n – 2) نحصل على:

$$\because \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \sigma_u^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

إذن القيمة المقدرة لتباين المتغير العشوائي هي مقدر غير متحيز للتباين الحقيقـي $\sigma_u^2$، وبهذا نكون قد أوجدنا التقديرات الثلاثـة المجهولـة $\left(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\beta}, \hat{\alpha}\right)$ لمـؤشرات النمـوذج الخطـي البسيط. ومع تبايناتهما كما وردت في المعـادلات (٩).(١٠). (١٩").(٢٠).(٢٥). وهـذه التقـديرات الثلاثـة هـي التـي يتضـمنها مفهـوم الاقتصـاد القيـاسي كـما أشـار إلى ذلـك كـل مـن جونسـتن وكوستيانس.

(٤,٨) طريقة مضاعف لاكرانج: Lagrangian Multiplier Method:

يمكن اسـتخدام طريقـة مضـاعف لاكـرانج لحـل مشـكلة دالـة التعظـيم Maximization or Minimization Functions أو التصـغير والخاضـعة (المحـددة) Subject to للقيـود (constraints). ولشرـح مفهوم هذه الطريقة نأخذ المثال التالي:

| | |
|---|---|
| لنفترض بأن الدالة الهدفية هي دالة المنفعة | objective function is the |
| والخاضعة إلى قيود | Utility function |
| والمحددة | Subject to |
| بقيد الميزانية (الدخل) | Budget Constraint |

وإذا تم تعويض ذلك بالرموز فإن:

| | |
|---|---|
| الدولة الهدفية ستكون objective function | $U = f(X,Y)$ |
| محددة بالدخل (الميزانية) Subject to | $M = P_x X + P_x Y$ |

حيث إن: U تشير إلى المنفعة Utility

X, Y تشير إلى السلع Goods

وأن PX تشير إلى سعر السلعة.

PY تشير إلى سعر السلعة Y وهذه الأسعار معطاة، أو (معلومة)

M تشير إلى قيمة ميزانية المستهلك (دخل المستهلك).

وعليه تكون صيغة الدالة الهدفية وقيودها كما يلي:

$$U = f(X, Y) - \lambda (P_x X + P_x Y)$$

وللحصول على الحل نلجأ إلى استخدام التفاضل (Differentiation) حيث يتم تفاضل الدالة (U) مع كل قيود (λ) مضاعف لاكرانج. ومساواة نتائج التفاضل (الاشتقاقات) بالصفر. وهذا يعطي عددا من المعادلات (m + 1) وعددا من المجاهيل (m + 1) تحتاج إلى إيجاد حل لها. وهذا الحل يعطي الشرط الأولي الضروري First – Order Necessary Condition، في حين الشرط الثاني تحدده حالة التعظيم Maximization أو حالة التصغير Minimization، وأفضل حالة تطبيق لصيغة لاكرانج هي حالة تعظيم المنافع مع قيود الميزانية (الدخل) وكما يلي:

لنفرض بأن الإنتاج U هو دالة لعناصر الإنتاج وهي العمل (X) ورأس المال (Y) وعليه فإن:

$$U = f(X, Y) \ldots\ldots (1)$$

وبأخذ قيم مختلفة للدالة (U) نحصل على مجموعة من منحنيات السواء (Isoquants)، أما القيود على هذه الدالة فيمكن تمثيلها مثلا كما يلي:

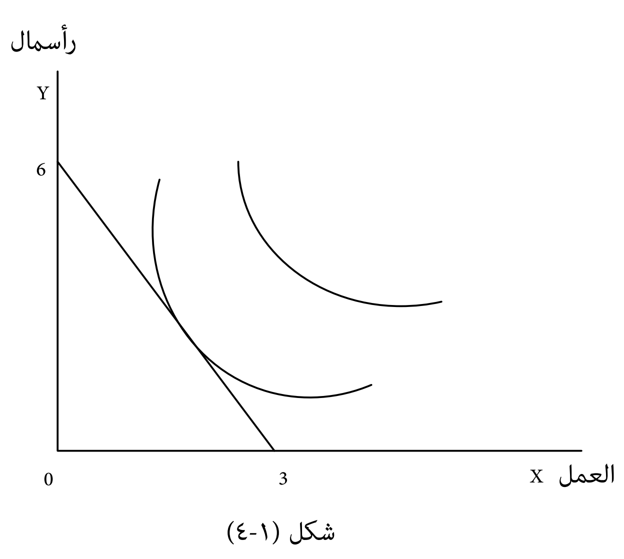
$$2X + Y = 6 \ldots\ldots (2)$$

وتمثل هذه المعادلة قيد الميزانية (Budget Constraint)، وهذا يعني بأن المؤسسة أو الشركة إذا كان لديها (٦) دينار وكان سعر (X) يساوي (٢) دينار وسعر (Y) يساوي (١) دينارا واحدا، إذن فإن العدد الذي يمكن أن نحصل عليه من وحدات (X) و (Y) لنعظم (U) أو الإنتاج يمكن الحصول عليه كالآتي:

يمكن كتابة المعادلة (٢) بالصيغة التالية وذلك لتسهيل التوضيح:

$$Y = 6 - 2X$$

حيث إن قيمة (Y) سوف تساوي الحد الثابت (القيمة المطلقة وهـي ٦) و (٢-) الميـل أو معامل (X) الذي يتغير أو تتأثر به (Y). فإذا كانت قيمة X = 0 فإن قيمة Y = 6 وعندما تكون قيمة Y = 0 فإن قيمة X = 3، وعليه فيمكن توضيح المشكلة أعلاه بيانيا كالآتي:




شكل (١-٤)

دالة الإنتاج وقيد الميزانية

وللحصول على أعلى منحنى فإن ذلك يتم بأخذ المنحنى الذي يتحدب نحو الأسفل وعـلى خط التكاليف. وعليه فإن الدالة وفقا للصيغة مضاعف لاكرانج تأخذ الشكل التالي:

$$U = X Y - \lambda (2 X + Y - 6)$$

ولإيجاد الحل الرياضي لها نحدد الشروط الأولية كما يلي:

- بأخذ المشتقات الجزئية لدالة لاكرانج (µ) بالنسبة للمتغيرات X، Y، λ:

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \dfrac{\delta U}{\delta X} = Y - 2\lambda \\ \therefore \dfrac{\delta U}{\delta Y} = X - \lambda \\ \therefore \dfrac{\delta U}{\delta \lambda} = -2X - Y + 6 \end{array}\right\}$$

- وبتعادلهما بالصفر نحصل على:

$Y - 2\lambda = 0$ ............................. (1)

$X - \lambda = 0$ ................................ (2)

$-2X - Y + 6 = 0$ ....................... (3)

وبحل هذه المعادلات لكل من $\lambda, Y, X$ نجـد بـأن قيمـة $X = \frac{2}{3}$، $Y = \frac{4}{3}$، $\lambda = -\frac{2}{3}$ إذن قيمة تعظيم الدالة الهدفية هي:

$$U = X\,Y = \left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$U = \frac{8}{9}$$

وبـالرجوع إلى موضـوعنا وهـو تصـغير (تقليـل) التبـاين $\left(\sigma_u^2\right)$ Minimization of Variance ، وبوجود قيد $\sum a_i = 1$ فإن صيغة لاكرانج لتقليل التباين ستكون بالشكل التالي:

H = (Objective Function) - $\lambda$ (Constraint Function)

$$H = \sigma_u^2 \sum a_i^2 - \lambda\,[\sum a_i - 1]$$

The First Order Conditions are:

$$\frac{\delta H}{\delta a_1} = 0, \frac{\delta H}{\delta a_2} = 0, \ldots, \frac{\delta H}{\delta a_n} = 0, \frac{\delta H}{\delta \lambda} = 0$$

كذلك فإن:

$$2\,a_1\,\sigma^2 - \lambda = 0$$

$$2\,a_2\,\sigma^2 - \lambda = 0$$

.

.

.

$$2\,a_n\,\sigma^2 - \lambda = 0$$

$$-[\sum a_i - 1] = 0$$

وهذا يعطينا $(n + 1)$ من المعادلات التي تتضمن عـددا مـن المجاهيـل $\lambda, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ومـن المعادلة الأولى:

$$a_2 = \frac{\lambda}{2\sigma^2}, a_2 = \frac{\lambda}{2\sigma^2}, ..., a_n = \frac{\lambda}{2\sigma^2}$$

وبتعويض ذلك في المعادلة الأخيرة أعلاه نحصل:

$$-\left[\frac{n\lambda}{2\sigma^2} - 1\right] = 0$$

أو:

$$\text{or } \lambda = \frac{2\sigma^2}{n}$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{n}, a_2 = \frac{1}{n}, ..., a_n = \frac{1}{n}$$

وكلما زادت القيود على الدالة الهدفية فإن تطبيق صيغة لاكرانج تتعقد أكثر، وبهذا يمكن الاستعانة ببحوث العلميات وباستخدام صيغة Simplex لحل مشكلة التصغير والتعظيم (أسلوب السمبلكس Simplex).

(٩-٤) تقديرات الامكان الأعظم:

[ (Maximum Likelihood Estimators (MLE)]:

وهي الطريقة البديلة التي تستخدم في تقدير مؤشرات النموذج الخطي البسيط وتعمل بموجب فرضيات التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي*. إن فرضية التوزيع الطبيعي لحد الاضطراب تقود إلى نتيجة مفادها أن مقدرات المعلمات بموجب (OLS) تكون مطابقة مع مقدرات المعلمات بموجب طريقة الإمكان الأعظم (MLE) وهذا ما سنوضحه في هذا المبحث.

وتأتي فكرة التقدير بأسلوب الإمكان الأعظم من الحقيقة القائلة بأن كل مجتمع يفرز عينات خاصة به، كما أن احتمال انتماء العينة إلى المجتمع الذي سحبت منه يكون أكبر من احتمال انتماء هذه العينة إلى مجتمع آخر، وعليه فإن الفكرة هي تقدير معلمات المجتمع من خلال قيم مشاهدات العينة المسحوبة وذلك عن طريق تقدير احتمال انتساب العينة إلى مختلف المجتمعات، ومن ثم تشخيص المجتمع الذي تنتمي إليه في ضوء أكبر احتمال متحقق من بين هذه الاحتمالات، واختصارا يعرف مقدر الإمكان الأعظم لمعلمات المجتمع

---

* راجع الملحق الخاص بالتوزيع الطبيعي والمتغيرات العشوائية الملحق (D) والملحق (E).

بأنـه المقـدار الـذي يعظـم احـتمال تولـد العينـة Matimum Likelihood Estimator (MLE) موضوعة البحث والمأخوذة من مجتمع معين، وبصورة عامة يقصد باحتمال تحقق المشاهدة من وجهـة نظريـة الاحـتمالات قيمـة الكثافـة الاحتماليـة (Probability Density) لكـل مشـاهدة مـن المشاهدات (Yi).

وعليه فإن نسق اشتقاق طريقة (MLE) تعتمـد عـلى أن الحـد العشـوائي (Ui) مـوزع توزيعـا طبيعيا مع وسط حسابي مساو للصفر، وتباين ثابت وتباين مشترك مساو للصـفر، وبوجـود (n) مـن المشاهدات فإن ميكانيكية هذه الطريقة تعتمد على الخطوات التالية:

n

$U_{11}$

$U_2$

$U_3$

.

.

$U_n$

وكما هو معروف إحصـائيا فـإن صـيغة الكثافـة الاحتماليـة (Density Function) مسـاوية ل (Probability Function) أي أن:

$$F(U_t) = P(U_t)$$

أو:

$$F(U_1, U_2, \ldots, U_n) = P(u_1), P(u_2), \ldots, P(u_n)$$

وبما أن دالة الكثافة الاحتمالية أو تقدير الإمكان الأعظم مساوية ل:

$$P(U_1) \text{ or } L_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}\right) e^{-\frac{1}{2}\sigma_u^2 (U_1)^2)} \sigma_u^2 \left(u_t^2\right)$$

$$P(U_2) \text{ or } L_2 =$$

.

.

.

$$P(U_n) \text{ or } L_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}\right) . e^{-\frac{1}{2}\sigma_u^2 \Sigma (L_n)^2}$$

حيث إن: e = ٢,٧١٨ اللوغاريتم الطبيعي.

π = ٣,١٤ النسبة الثابتة = $\frac{22}{7}$ ثوابت.

وتمثل الصيغة (1) (MLE) التي نصل منها إلى قيمة كل من المجاهيل $\hat{\beta},\hat{\alpha},\sigma_u^2$ ، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي*:

لنفترض النموذج التالي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i \quad \text{.............................. (2)}$$

$$U_i = Y_i - \alpha - \beta X_i \quad \text{.............................. (3)}$$

وبتعويض المعادلة (٣) في المعادلة (١) نحصل على:

$$P(U_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}\right).e^{-\frac{1}{2}\sigma_u^2(Y_1-\alpha+\beta x_1)^2}$$

And

$$P(U) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}\right).e^{-\frac{1}{2}\sigma_u^2(Y_1+\alpha+\beta x_2)^2}$$

.

.

.

or

$$P(U_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}\right).e^{-\frac{1}{2}\sigma_u^2\sum(Y_1+\alpha+\beta x_2)^2}$$

إن تعظيم الدالة مع احتوائها على إشارة السالب هـي بمثابـة نفـس الأسـلوب لاسـتخراج معلمات OLS بطريقة المربعات الصغرى.

ولاشتقاق تقدير كل من β, α نبدأ بإعطائها صيغة مختلفة فنشير إلى تقدير β, α كما يلي $\tilde{\beta}$ , $\tilde{\alpha}$ وعليه فإن نموذجنا سيكون:

$$Y_i = \tilde{\alpha} + \tilde{B}\ X_i + U_i \quad \text{....................... (4)}$$

وبتعويض المعادلة (٤) في المعادلة (١) نحصل على:

---

* لمزيد من الإطلاع راجع كتاب:

Koutsoyannis; Theory of Economecnis"; OP, Cit PP. 439-443.

$$ML = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}\right).e^{-\frac{1}{2}\sigma_u^2\sum U_1^2}$$

$$ML = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}\right).e^{-\frac{1}{2}\sigma_u^2\sum\left(Y_1-\alpha-\beta x_i\right)^2} \quad \text{................ (5)}$$

وبإعادة ترتيب المعادلة (٥) نحصل على ما يلي:

$$ML = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma_u^2}\right)^n}.e^{-\frac{1}{2}\sigma_u^2\cdot\sum\left(Y_i-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}x_i\right)^2}$$

وباستخدام التحويل اللوغاريتمي نحصل على:

$$\text{Log ML} = -\frac{n}{2}\text{ Log } 2\pi - \frac{n}{2}\text{ Log } \sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2}\left(Y_i-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}X\right)^2$$

$$\therefore\left(Y_i-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}X_i\right)^2 \quad \text{.................................. (6)}$$

والآن بالتفاضل بالنسبة لـ $\left(\tilde{\alpha}\right),\left(\tilde{\beta}\right),\left(\tilde{\sigma}_u^2\right)$ نحصل على:

(By Differentiating ML With Respect to $\alpha$, $\beta$, $\sigma_u$)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta(LogML)}{\delta\alpha} &= -\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum 2\left(Y_i-\alpha-\beta X_i\right)(-1)\\
\frac{\delta(LogML)}{\delta B} &= -\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum 2\left(Y_i-\alpha-\beta X_i\right)(-X_i)\\
\frac{\delta(LogML)}{\delta\sigma_u^2} &= -\frac{n}{\sigma_u^2}+\frac{1}{2\sigma_u^4}\sum\left(Y_i-\alpha-\beta X_i\right)^2
\end{aligned}\right] \quad \text{........... (7)}$$

وبوضع النتائج الثلاث أعلاه مساوية للصفر وبإعادة ترتيبها وبإدخال $\Sigma$ عليهما نحصل على:

$$\left.\begin{aligned}
\sum Y_i &= n\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\sum X_i\\
\sum XiYi &= \tilde{\alpha}\,Xi+\tilde{\beta}\sum X_1^2
\end{aligned}\right\} \quad \text{.................................. (8)}$$

وهما المعادلتان الطبيعيتان لأصغر المربعات ومنهما نحصل على، تقدير $\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\sigma}_u^2$،

واشتقاق $\tilde{\sigma}_u^2$ يتم باستخدام المعادلة التالية:

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n}\sum\left(\overline{Y} - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} X_i\right)^2$$

وعليه فإن وجود فرض التوزيع الطبيعي لـ $(U_i)$ يجعل كلا من مقدرات (OLS) (MLS) لكـل من $\left(\tilde{\alpha}\right)$ و $\left(\tilde{\beta}\right)$ متطابقين وأن مقدرات (MLS) لها مميزات للمتغير العشوائي وخواص تتمثـل في الكفايـة Sufficiecy الكفـاءة Efficiency والاتسـاق Consistency وهـي نفـس خـواص (OLS) والتـي تتمثل في (BLUE) وهذا يعني:

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta}$$

$$\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$$

(٤-١٠) تطبيقات وتمارين:

(٤-١٠-١) تطبيقات:

تطبيق (١):

إذا أعطيت البيانات التالية عن المتغيرين $Y_i, X_i$:

$X_1 = 3, X_2 = 9, Y_1 = 1, Y_2 = 5$

أثبت أن:

a. $\hat{\beta} = \sum W_i Y_i = \frac{2}{3}$

b. $\sum W_i = 0$

c. $\sum W_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} = \frac{1}{18}$

d. $\sum W_i x_i = \sum W_i X_i = 1$

حيث:

$$W_i = \frac{x_i}{\sum x_1^2}$$

الجواب:

من البيانات المعطاة يمكن تكوين الجدول التالي:

| $X_i$ | $Y_i$ | $(X_i - \overline{X})$ | $(Y_i - \overline{Y})$ | $x^2_1$ | $y^2_1$ | $Xy_i$ | $x_iX_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3<br>9 | 1<br>5 | -3<br>3 | -2<br>2 | 9<br>9 | 4<br>4 | 6<br>6 | -9<br>27 |
| $\sum = 12$<br>n = 2 | $\sum = 6$ | 0 | 0 | $\sum = 18$ | $\sum = 8$ | $\sum = 12$ | $\sum = 18$ |

أيضا يمكن أن نحصل على:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{12}{2} = 6, W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} i.e \frac{-3}{18}, \frac{1}{18}$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{6}{2} = 3, \sum W_i = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} = 0 i.e \frac{(-3)+3}{18} = 0$$

ومن هذه القيم والأوزان يمكن أن تحقق الاثباتات التالية:

(a) بما أن:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_1^2}$$

بتعويض $(y_i)$ بما يساويها وهو $(Yi - \overline{Y})$ نحصل على:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i \left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum x_1^2} = \frac{\sum x_i Y_i - \overline{Y} \sum x_i}{\sum x_1^2}$$

وبما أن: $\sum x_i = 0$

$$\because W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\because \hat{\beta} = \frac{\sum x_i}{\sum x_1^2} . Y_i$$

$$\because W_i = \frac{x_i}{\sum x_1^2}$$

$$\therefore \sum W_i Y_i = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} Y_i = \hat{\beta}$$

$$\therefore \hat{\beta} = \sum W_i Y_i$$

وبالتعويض فإن:

$$\hat{\beta} = \frac{x_1}{\sum x_i^2} Y_1 + \frac{x_2}{\sum x_i^2} Y_2$$

$$= \frac{-3}{18}(1) + \frac{3}{18}(5)$$

$$= \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \hat{\beta} = \frac{2}{3}$$

(b) لإثبات كون: $\sum W_i = 0$

بما أن: $W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$

وأن: $\sum W_i = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2}$

$$\therefore \sum x_i = 0$$

$$\therefore \sum W_i = \frac{x_1}{\sum x_i^2} + \frac{x_2}{\sum x_i^2} = \frac{-3}{18} + \frac{3}{18} = \frac{0}{18} = 0$$

(c) لإثبات أن:

$$\sum W_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} = \frac{1}{18}$$

وبما أن: $W_i = \frac{x_i}{\sum x_1^2}$

إذن: $W_i^2 = \left(\frac{x_1^2}{\sum x_i^2}\right)$

وهذا يعني أن:

$$\sum W_i^2 = \sum \left[\frac{x_i}{\sum x_1^2}\right]^2 i.e \left(\frac{x_1}{\sum x_i^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sum x_1^2}\right)^2 + \ldots + \left[\frac{x_n}{\sum x_i^2}\right]$$

أي:

$$\sum W_i^2 = \left(\frac{x_1}{\sum x_i^2} + \frac{x_2}{\sum x_i^2}\right)^2$$

بكلمات أخرى:

$$\sum W_i^2 = W_1^2 + W_2^2$$

من هذا نستنتج أن:

$$\sum W_i^2 = \frac{\sum x_i^2}{\left(\sum x_i^2\right)^2} = \frac{1}{\sum x_i^2} = \frac{1}{18}$$

وبطريقة أخرى فإن:

$$\sum W_i^2 = \left[\frac{x_1}{\sum x_1^2} + \frac{x_2}{\sum x_i^2}\right]^2 = \left[\frac{-3}{18} + \frac{3}{18}\right]^2$$

$$= \left[\frac{9+9}{(18)^2}\right] = \frac{18}{(18)^2} = \frac{1}{18} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

(d) لإثبات:

$$\sum W_i x_i = \sum W_i X_i = 1$$

حيث إن:

$$W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

وإن:

$$x_i = (X_i - \overline{X})$$

بتعويض هذه القيم في المعادلة أعلاه نحصل على:

$$\sum W_i (X_i - \overline{X}) = \sum W_i X_i - \overline{X} \sum W_i$$

وحيث إن:

$$\sum W_i = 0$$

$$\therefore \sum W_i X_i = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} X_i = \frac{x_1 X_1}{\sum x_i^2} + \frac{x_2 X_2}{\sum x_1^2}$$

$$\therefore \sum W_i X_i = \frac{\sum x_i X_i}{\sum x_i^2} = \frac{(-3)(3)}{18} + \frac{(9)(3)}{18} = \frac{(-9)+27}{18} =$$

$$\frac{18}{18} = 1$$

(f) ويمكن إثباتها رياضيا كالآتي:

$$\therefore \sum W_i X_i = \sum W_i x_i = 1$$

وبما أن:

وهذا يعني:

$$\sum W_i x_i = \sum W_i X_i = 1$$

$$W_1 x_1 + W_2 x_2 = W_1 X_1 + W_2 X_2 = \left(\frac{-3}{18}(-3)\right) + \left(\frac{3}{18}(3)\right) = \left(\frac{3}{18}(3)\right)$$

$$\frac{9}{18} + \frac{9}{18} = \frac{-9}{18} + \frac{27}{18} = 1$$

$$\sum W_i x_i = \sum W_i X_i = 1$$

تطبيق (٢):

نفترض وجود متغيرين هما (Y), (X) مرتبطين بمعادلة خطية متمثلة في المعادلة الآتية:

$Y = 2 + 3X$ .............................. (1)

المطلوب:

١- أوضح أن هذه العلاقة هي مماثلة للعلاقة:

$Y = 14 - 3X$ .............................. (2)

علما بأن:

$X' = X - 4$ .............................. (3)

٢- أوضح رياضيا أن صيغة $\left(\hat{\beta}\right)$ المذكورة في الفصل الثالث لم تتأثر بـأي تغـير في أصـل مقيـاس (X).

الجواب:

١- لإثبات كون العلاقة (١) مماثلة للعلاقة (٢) التالية:

$Y = 2 + 3X$ .............................. (1)

$Y = 14 + 3X^1$

نقوم بتعويض قيمة ($X^1$) بما يساويها في المعادلة (٣) أي أن:

$$Y_i = 14 + 3\ (X - 4)$$

$$Y = 14 + 3\ X - 12$$

$$Y = 2 + 3\ X$$

أما إذا تم تغيير مقياس (X)، فماذا سيحصل؟

$$\therefore\ X^1 = X - 4$$

$$\therefore X = 4 - X^1$$

$$\therefore Y = 2 + 3\ (4 - X^1)$$

$$Y = 2 + 12 - 3\ X^1$$

$$Y_i = 14 - 3\ X^1$$

من هذا نستنتج أن (X) تؤثر على الحد الثابت فقط كما هو موضح أعلاه،

٢- أما بالنسبة للمطلوب الثاني فإنه حساب صيغة $\hat{\beta}$ يكون كالآتي:

بالاعتماد على نتائج تطبيق المعادلة رقم (٣) المذكور في التطبيق الثاني الخاصة بمشاهدات الدخل ($X_i$) والاستهلاك ($Y_i$) أوجد:

$$\therefore\quad \hat{\beta} = \frac{n\sum XY - \left(\sum Y\right)\left(\sum X\right)}{n\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}$$

وتمثل هذه الصيغة (Y) على (X). فماذا يحدث فيما لو أخذنا انحدار (Y) على ($X^1$)

لنفرض بأن $X^1$=X-W. وللسهولة افترضنا أن W - ٤ - وعليه فإن:

وعليه فأن:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum X^1Y\left(\sum Y\right)\left(\sum X^1\right)}{n\sum X^{12} - \left(\sum X^1\right)^2}$$

وعند تعويض $X^1 = X - W$ نحصل على:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum Y\left(X - W\right) - \left(\sum Y\right)\sum\left(X - W\right)}{n\sum\left(X - W\right)^2 - \left[\sum\left(n - W\right)\right]^2}$$

وبفك الأقواس نحصل على:

$$\hat{\beta}=\frac{n\sum XY-nW\sum Y-\sum Y\sum X+nW\sum Y}{n\sum X^2-2nW\sum X+n^2W^2-\left(\sum X\right)^2+2nW\sum X-n^2W^2}$$

وباختصار الحدود المتشابه نحصل على:

$$\hat{\beta}=\frac{n\sum XY-\left(\sum Y\right)\left(\sum X\right)}{n\sum X^2-\left(\sum X\right)^2}$$

وهذه الصيغة هي نفسها صيغة $\beta$ المستخدمة في الفصل الثالث. ومنها نستنتج بأن قيمة $\hat{\beta}$ لم تتأثر في التغير الحاصل بمقياس أصل المتغير (X).

تطبيق (٣):

بالاعتماد على نتائج التطبيق (٣) المذكور في الفصل الثالث الخاصة بمشاهدات الدخل $(X_i)$ والاستهلاك $(Y_i)$ أوجد:

i) $\hat{\sigma}_u^2 \leftarrow$ i. e $\leftarrow \sigma_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \hat{\sigma}_u^2$

ii) $var\left(\hat{\alpha}\right)$, $s.e\left(\hat{\alpha}\right) \leftarrow$ i. e $\leftarrow \sqrt{var\left(\hat{\alpha}\right)} = S.E\left(\hat{\alpha}\right)$

iii) $var\left(\hat{\beta}\right)$, $s.e\left(\hat{\beta}\right) \leftarrow$ i. e $\leftarrow \sqrt{var\left(\hat{\beta}\right)} = S.E\left(\hat{\beta}\right)$

iv) $Cov\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right) \leftarrow$ i. e $\leftarrow -\frac{\overline{X}}{\sum x_1^2}.\sigma_u^2 = Cov\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right)$

الإجابة:

للحصول على قيم المقدرات المطلوبة أعلاه، لابد من حساب بعض البيانات الخاصة بالبواقي $(e_i)$ كما هو موضح في التطبيق (٣) وذلك بإضافة عمود آخر يمثل قيم $e_i^2$ للحصول على $\sum e_1^2$ لأن $\sum e_i$ = صفر، أي تكوين عمود إضافي يضم تربيع البواقي ثم جمعها، ومنها تم الحصول على:

$\sum e_i^2 = 887.185$

وعليه فإن:

i) تباين البواقي $\hat{\sigma}_u^2$ يتم حسابه بالتعويض في الصيغة (٣٠) كالآتي:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{887.185}{16-2} = 63.370$$

ii) تباين $\hat{\alpha}$ وخطؤها المعياري S. E هو (باستخدام الصيغة (٢٨)) كما يلي:

$$Var\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{\sum x_i^2}{n\sum x_1^2}.\hat{\sigma}_u^2 = \frac{(856010.270)(63.370)}{(16)(47674.414)} = 71.114$$

وبإيجاد الجذر التربيعي للتباين نحصل على الخطأ المعياري (S. E) كما يلي:

$$s.e\left(\hat{\alpha}\right) = \sqrt{\text{var}\left(\hat{\alpha}\right)} = \sqrt{71.114} = 8.433$$

وهو أقل من $\frac{1}{2}$ القيمة المقدرة للمعلمة ٢٠,٩٠٥ = $\hat{\alpha}$، وبهذا فإن $\hat{\alpha}$ قد اجتازت الاختبار الأولي وهو S. E وبقي اختبارات معنوية $\hat{\alpha}$.

iii) تباين $\hat{\beta}$ وخطؤها المعياري S. E هو (باستخدام الصيغة ٢٧) كما يلي:

$$\because \text{var}\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum \text{x}_1^2} = \frac{63.370}{47674.414} = 0.0013$$

$$\therefore s.e\left(\hat{\beta}\right) = \sqrt{\text{var}\left(\hat{\beta}\right)} = \sqrt{0.0013} = 0.036$$

وعليه فإن $\hat{\beta}$ يجتاز الاختبار الأولي لأن S. e ($\hat{\beta}$) أقل من $\frac{1}{2}$ قيمتها المقدرة ٠,٨٠١.

iv) إيجاد التغاير Cov $\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right)$ باستخدام الصيغة (٢٩) كما يلي:

$$\because \text{cov}\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right) = -\frac{\overline{X}}{\sum x_i^2}.\hat{\sigma}_u^2$$

$$= -\frac{224.769}{47674.414}.(63.370) = -0.299 \cong -0.30$$

وهو يمثل تغاير المقدرات $\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right)$.

التحليل:

∵ المعادلة التقديرية وتقديرات S. E لمعلماتها حصلنا على:

$$\hat{Y} = 20.91 + 0.80\, xi + e\, i$$

S. E : (8.4) (0.036)

∴ الاختبار الأولي للمعادلة التقديرية توضحها لنا تقديرات الانحراف المعياري (S. E) لكل من $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$. كانت تقديرات S. E أقل من نصف القيم التقديرية لمعلمات المعادلة التقديرية وبهذا فإن تقديرات هذه المعادلة قد اجتازت الاختبار الأول ويمكن تطبيق بقية الاختبارات عليها لكي تكون جاهزة لصنع القرار ورسم السياسة الاقتصادية، وأيضا يمكن استخدامها لأغراض التنبؤ في سلوكية الظاهرة المدروسة.

تطبيق (٤):

من التقديرات المتحصل عليها من التطبيق (٢) أوجد الاختبار الأولي (S. E) لمعلمات النموذج. ناقش نتائج الاختبار.

| $X_i$ | $Y_i$ | $X^2_i$ | $X_iY_i$ | $\hat{Y} = 5.25 - 0.42\, X_i$ | $e_i = Y_i - \hat{Y}$ | $e^2_1$ | $X_i = x_i - \overline{X}$ | $x^2_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1 | 6 | 4.83 | 1.17 | 1.36 | -2 | 4 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 4.83 | -0.83 | 0.69 | -2 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 6 | 4.41 | -1.41 | 1.99 | -1 | 1 |
| 3 | 5 | 9 | 15 | 3.99 | 1.01 | 1.02 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 4 | 8 | 4.43 | 0.43 | 1.18 | -1 | 1 |
| ٤ | 5 | 16 | 20 | 3.57 | 1.85 | 3.42 | 1 | 1 |
| 5 | 3 | 25 | 15 | 3.15 | -0.15 | 0.02 | 2 | 4 |
| 6 | 2 | 36 | 12 | 2.73 | -0.73 | 0.53 | 3 | 9 |
| $\sum 24$ n= 8 | $\sum 32$ | $\sum 96$ | $\sum 86$ | $\sum 32$ | $\sum 0.91$ $\cong 0$ | $\sum 9.87$ $\cong 10$ | $\sum 0$ | $\sum 23$ |

$$\therefore\ \overline{X} = 3,\ \overline{Y} = 4,\ \overline{\hat{Y}} = 3, \sum \hat{Y} = 32, \sum e_1^2 = 10, \sum x_1^2 = 23, \sum x_i = 0,$$

$$\sum \hat{Y} = 0, \sum \hat{Y}^2 = 426$$

$$\hat{Y} = 5.25 - 0.42\ X_i + ei$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_1^2}{n-2} = \frac{10}{8-2} = \frac{10}{6} = 1.66 \cong 1.7$$

$$\text{var}\ \hat{\alpha} = \frac{\sum Xi}{n\sum x_1^2}\ \hat{\sigma}_u^2$$

$$\text{var}\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{24}{8(23)}.1.7 = \frac{40.8}{184} = 0.22 \therefore Se = \sqrt{0.22} = 0.47$$

$$\text{var}\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\hat{\sigma}_U^2}{\sum x_i^2} = \frac{1.7}{23} = 0.07 \therefore Se = \sqrt{0.07}\ \therefore \text{Se} = \sqrt{0.07} = 0.26$$

لإجراء الاختبار الأولي وهو الانحراف المعياري (S E) والمفروض أن يكون أقل من $\frac{1}{2}$ قيمة المعلمات المقدرة وكالآتي:

$$\hat{Y}i = 5.25 - 0.42\ \text{Xi}$$

S E: (0.47) (0.26)

يتضح بأن قيمة الانحراف المعياري أقل من $\frac{1}{2}$ قيمة المقدار، وبهذا فإن هذه التقـديرات اجتازت اختبار S. E الإحصـائي، وهـي صـالحة الآن لإجـراء الاختبـارات الأخـرى لـكي تصـلح هـذه الاختبارات لصنع القرار والتنبؤ بسلوكية الظاهرة مستقبلا.

$$\because \hat{\beta} = \frac{n\sum XY - \left(\sum Y\right)\left(\sum X\right)}{n\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}$$

وتمثل هذه الصيغة انحدار (Y) على (X)، فماذا يحدث فيما لو أخذنا انحدار (Y) على ($X^1$).

لنفرض بأن $X^1 = X - W$، وللسهولة افترضنا أن $-W = -4$ وعليه فإن:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum X^1Y - \left(\sum Y\right)\left(\sum X^1\right)}{n\sum X^{21} - \left(\sum X^1\right)^2}$$

وعند تعويض $X^1 = X - W$. نحصل على:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum Y(X-W) - \left(\sum Y\right)\sum (X-W)}{n\sum (X-W)^2 - \left[\sum (n-W)\right]^2}$$

وبفك الأقواس نحصل على:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum YX - nW\sum Y - \sum Y\sum X + nW\sum Y}{n\sum X^2 - 2nW\sum X + n^2W^2 - \left(\sum X\right)^2 + 2nW\sum X - n^2W^2}$$

وباختصار الحدود المتشابهة نحصل على:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum YX - \left(\sum Y\right)\left(\sum X\right)}{n\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}$$

وهذه الصيغة هي نفسها صيغة (β) المستخدمة في الفصل الثالث، ومنها نستنتج بأن قيمة $\left(\hat{\beta}\right)$ لم تتأثر في التغير الحاصل بمقياس أصل المتغير (X).

(٢-١٠-٤) تمارين:

١- ما هو المقصود "بأن معلمات النموذج الخطي البسيط (OLS) تمتاز بكونها (BLUE)، وما هي الصيغة القياسية المستخدمة لكل ميزة من هذه المميزات؟

٢- تبحث نظرية ماركوف في الإثبات البديل للحصول على تقديرات لمعلمات النموذج الخطي البسيط (OLS) تمتاز بكونها (BLUE) وبصورة مباشرة، أوضح ذلك بالتفصيل.

٣- أثبت أن:

$$\text{Var.}\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sum x_1^2}, \ \hat{\alpha} = \hat{\sigma}_u^2 . \frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2}$$

وأن

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_1^2}{n-2}$$

وأنه تقدير غير متحيز لتباين عنصر الخطأ العشوائي في النموذج الخطي الآتي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i$$

٤- إذا كان مقدر المربعات الصغرى مساويا ل:

$$\hat{\alpha} = \sum\left(\frac{1}{n} - \overline{X}W_i\right)Y_i$$

وأن:

$$W_i = \frac{x_i}{\sum x_1^2}$$

و

$$\text{Var}(\alpha) = \sigma_u^2\left(\frac{1}{n} + \frac{X^2}{\sum x_i^2}\right)$$

أثبت أنه لا يوجد تقدير غير متحيز لمقدر ($\alpha$) يمكن أن يعطي أقل تباين.

٥- نفترض أن $Y_i = \alpha + \beta X + u_i$، وحيث أن $\alpha = \sum C_i Y_i$ استخدم مضاعفات لاكرانج لإيجاد الأوزان ($C_i$) والتي تجعل $\left(\hat{\alpha}\right)$ أفضل مقدر خطي غير متحيز.

$$C_i = \frac{1}{n} - \frac{\sum X}{\sum x_1^2}$$

٦- اشرح المقصود بمقدر الامكان الأعظم، ناقش خصائص (MLE) بكل تفصيل.

٧- من النموذج التالي:

$$Y_i = \alpha + \beta X + U_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$E(U_i) = 0$$

$$E(U_i^2) = \sigma^2$$

$$E(U_i U_j) = 0 \text{ if } i \neq j$$

اشتق المعادلات الطبيعية لمقدرات ($\beta, \alpha$) وبافتراض ($U_i$) موزعة توزيعا طبيعيا. بين أن هذه المقدرات هي نفسها التي تستحصل بطريقة (MLE).

٨- ما هو المقصود بمضاعفات لاكرانج؟ ما هو دورها في نظرية ماركوف؟

الفصل الخامس

# اختبار فرضيات المقدرات والتنبؤ

# الفصل الخامس

**اختبار فرضيات المقدرات والتنبؤ**

Test of Hypothesps and Prediction

(٥-١) طبيعة اختبار الفرضيات:

سبق وأن تطرقنا في الفصول السابقة إلى صيغ اشتقاق معلمات النموذج القياسي لمتغيرين باستخدام طريقة المربعات الصغرى، فالخطوة التالية تتمثل في ضرورة التطرق إلى اختبار معنوية هذه التقديرات من حيث الحجم والإشارة، وتوجد ثلاثة معايير للاختبار هي:

١- المعايير النظرية Theoretical Criteria.

٢- المعايير الإحصائية Statistical Criteria*.

٣- المعايير القياسية Econometrical Criteria.

وسوف نركز في هذا الفصل على المعايير الإحصائية تاركين بقية المعايير للفصول القادمة لمعالجتها. يسمى المعيار الإحصائي أيضا اختبار الدرجة الأولى في حين يطلق على المعيارين الآخرين اختبارات الدرجة الثانية، بمعنى أن الاختبارات الإحصائية تسبق في الأهمية باقي الاختبارات.

يعتمد الاختبار الإحصائي بالدرجة الأولى على الانحراف المعياري (في حالة أخذ عينة من المجتمع Standard Devation) أو الخطأ المعياري (في حالة أخذ المجتمع Standard Error) للتأكد من دقة الاختبارات الإحصائية لمعلمات النموذج الخطي $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \sigma_u^2\right)$ وليتمكن الباحث من الاعتماد عليها في تحليله للعلاقة بين متغيرات الظاهرة الاقتصادية.

---

*من الضروري جدا مراجعة الملحق(D) الخاص بالتوزيع الطبيعي واختبار الفرضيات الملحق (E) من وجهة النظر الإحصائية؛ لكي تعطي الطالب أساسا نظريا وعمليا لفهم مفردات هذا الفصل.

فإن استخدام الانحراف المعياري (جذر التباين)[**] من المعايير المهمة في الدراسات القياسية التطبيقية لمعرفة معنوية التقديرات، ومدى تطابق العينة، وتمثيلها للمجتمع المسحوبة منه. ومن دراستنا السابقة اتضح لنا أن:

$$i.e\ Var\left(\hat{\beta}\right)=\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} \qquad \text{.......... (18)}$$

$$S.D\left(\hat{\beta}\right)=\sqrt{Var\left(\beta\right)}=\sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum x^2}}$$

$$=\sqrt{\sigma_u^2 \cdot \frac{x_i^2}{n\sum x_i^2}}$$

حيث إن قيمة $\sigma_u^2$ التقديرية هي:

$$\sigma_u^2=\frac{\sum e_i^2}{n-2}=\frac{1}{n-2}\sum e_i^2=\hat{\sigma}_i^2 \qquad \text{............. (24)}$$

حيث تمثل (n) عدد المشاهدات في حين تمثل ٢ عدد المتغيرات أي (k) والخطوة الأولى للاستمرار في الاختبار هي مقارنة الانحراف المعياري (S E) وتقديرات كل من $\left(\hat{\beta}\right),\left(\hat{\alpha}\right)$، فإذا كانت قيمة الانحراف المعياري أقل من $\frac{1}{2}$ قيمة كل من $\left(\hat{\beta}\right),\left(\hat{\alpha}\right)$، فيدل ذلك على عدم معنوية المتغيرات، وهذا يعني أن تقبل بفرضية العدم (أي أن تقديرات OLS غير معنوية)، وهذا يعني أن المتغير المستقل (Xi) ليس له تأثير المتغير التابع (Yi)، ولمعرفة درجة معنوية هذا التأثير لابد من دراسة اختبار (t) و (z) و (F) لمعنوية مقدرات (OLS) والتي تتمثل فيما يلي:

٢-٥ اختبار (Z) لمعنوية المعلمات المقدرة (Z-Test) :

يعطي الملخص السابق الصيغة الأساسية لاختبار ما إذا كانت $\hat{\beta},\hat{\alpha}$ تختلف معنويا عن قيمة معينة، وأن عملية قبول أو رفض فرضية العدم (Null Hypothesis) تعطي الدليل

---

[**] راجع الملحق (D) والملحق (E).

على صحة أو عدم صحة النموذج فقبول فرضية العدم $(\hat{\beta} = 0)$, $(\hat{\alpha} = 0)$، يتضـمن كـون المتغير المستقل لا يؤثر على المتغير التابع، أي أن المتغير المستقل يجب أن يعدل أو يسـتبعد مـن النموذج، أما في حالة رفض فرض العدم بمعنى $(\hat{\beta} \neq 0)$ فهذا معناه أن المتغير المسـتقل يـؤثر في المتغير التابع تأثيرا صحيحا لا يعزى على الصدفة، وأن التغيرات في المتغير التـابع تعـود أساسـا إلى التغير في المتغير المستقل، وزيادة وحـدة واحـدة في (X) تـؤدي إلى زيـادة في (Y) مقـدارها $\left(\hat{\beta}\right)$
يعتمد اختبار (Z) على التوزيع الطبيعي ويطبق في الحالات التالية:

١) إذا كان تباين المجتمع معلوما أي أن:

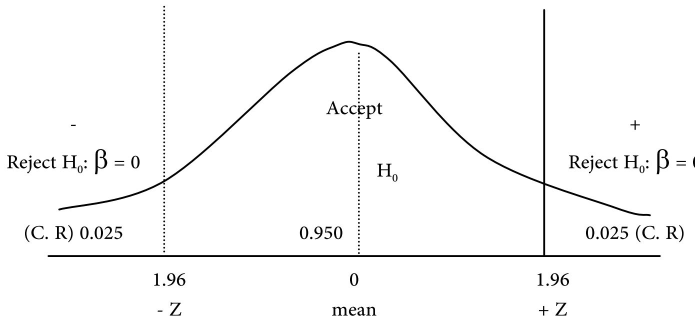
$$Var(U) = \sigma_u^2$$

٢) إذا كان حجم العينة كبيرا كأن نقول مثلا $n > 30$.

وفي الدراسات القياسية يكون تباين المجتمع (Population Variance) مجهولا أي أن:

$$Var(U_1) = \sigma_u^2 \text{ is Unknown}$$

ولهذا يتم استخدام عينة كبيرة الحجم لتمثل المجتمع، وأن خطوات تطبيق هذا الاختبار كما يلي:




(الشكل (١-٥) يوضح منطقة قبول ورفض فرضيتي العدم والبديلة

فـإذا أريـد اختبـار فرضـية العـدم $H0: \hat{\beta} = 0$ (Null Hypothesis) مقابـل (Aginst) الفرضـية البديلة $H1: \hat{\beta} \neq 0$ (Alternative Hypothesis) ونفس الشي بالنسبة ل $\left(\hat{\alpha}\right)$ فإن:

$$H_0 : \hat{\alpha} = 0$$

$$H_1 : \hat{\alpha} = 0$$

وبموجب الفرضية القائلة بأن:

$$U \sim N\left(0, \sigma_u^2\right)$$

والتي تعني بأن الحد العشوائي موزع طبيعيا (~) مع وسط حسابي (μ) مساو للصفر وثبات التباين $\left(\sigma_u^2\right)$. وهذا التوزيع الطبيعي يمكن أن يكون معيارا (Stanardised) أي يمكن تحويله (Transformed) إلى وحدة من المتغير الطبيعي المعياري (Standard Normal Variable) (راجع الملحق (D) والملحق (E).

وحيث أن (Z) لها وسط حسابي مساو للصفر وتباين مقداره الوحدة (Unit)، ولذا فإن اختبار (Z) يأخذ الصيغة التالية:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

حيث أن ($X_i$) يشير إلى توزيع المتغير الذي يراد اختبار معنويته (σ) تشير إلى الخطأ المعياري (Standard Error) والذي هو عبارة عن الجذر التربيعي للتباين، وأما (u) فتمثل الوسط الحسابي لتوزيع المتغير.

(١-٢-٥) اختبار (Z) لمقدرات المربعات الصغرى:

وفي حالة توزيع مقدرات المربعات الصغرى $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$، فإن صيغة التحويل تأخذ الشكل التالي بالنسبة لـ α :

$$Z = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sigma_{\hat{\alpha}}} = \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\frac{\sigma_u^2 \sum X_1^2}{n \sum x_1^2}}}$$

حيث يراد اختبار ما إذا كانت القيمة الحقيقية للمعلمة α = 0 وأن:

$$Z = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma_{\hat{\beta}}} = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum x_1^2}}}$$

حيث يراد اختيار ما إذا كانت القيمة الحقيقية للمعلمة ٠ = $\hat{\beta}$ .

ويمكن تصوير التوزيع الطبيعي للمعلمات ذات الوسط الحسابي المساوي للصفر

وتباين مساو للوحدة كما يلي:

حيث توزيع $\left(\hat{\alpha}\right)$ هو:

$$\hat{\alpha} \sim \mathrm{N}\left(\alpha, \sigma_{\alpha}^{2} = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}}\right)$$

وتوزيع $\left(\hat{\beta}\right)$ هو:

$$\hat{\beta} \sim \mathrm{N}\left(\beta, \sigma_{\beta}^{2} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}}\right)$$

وزيادة في التوضيح لنفترض بأنه أريد اختبار فرضية العدم القائلة بأن المعلمة الحقيقية (β) مساوية لقيمة معينة ولتكن (β *) ولنفرض أنها تمثل (MPC) الميل الحدي للاستهلاك، فإذا كان النموذج يمثل دالة الاستهلاك، فصياغة فرضية العدم ستكون كما يلي: Null Hypothesis $H_0$: $\hat{\beta}$ $= \beta^*$.

مقابل الفرضية البديلة Alternative Hypothesis $H_1$: $\hat{\beta} \neq \beta^*$

ولإجراء الاختبار نتبع الخطوات التالية:

١- نعوض $\beta^* = \beta$ في الصيغة أعلاه وبإعطاء $\left(\hat{\beta}\right)$ خطأها المعياري Standard Error $\left(\sigma_u^2\right)$ فستكون لدينا المعلومات الكافية لاشتقاق قيمة ($Z^*$).

٢- احتساب قيمة $Z^*$ (المحسوبة) كما يلي:

$$Z^* = \frac{\hat{\beta} - \beta^*}{\sigma\beta}$$

وهذه الصيغة تعطي القيمة العددية لاختبار ($Z^*$) المحسوبة (Calculated Z).

٣- للبرهان على صحة الفرضية الأساسية وهي أن $\beta^* = \hat{\beta}$ أم لا؟يتطلب الأمر اختبار مستوى معين من المعنوية، والمعتاد عليه في الدراسات الاقتصادية هو استخدام ٥% مستوى معنوية (Significant Level)، وهذا يعني عند اتخاذها للقرار، فإن المجال

المسموح به هو ٥% من عدد الحالات التي يتم رفض فرض العدم رغم أنه صحيح.

٤- طالما لا توجد لدينا أية معلومات مسبقة عن القيم الحقيقية لمعلمات المجتمع، فنأخذ اختبارا ذا طرفين (Two – Tailed Test)، وهذا يعني أن المنطقة الحرجة (Critical Region) ستكون في طرفي منحنى التوزيع الطبيعي، وكل (CR) تأخذ نصف مستوى المعنوية أي (٠,٠٢٥) في كل جانب كما هو مبين في الشكل السابق (٥-١).

٥- الخطوة الأخيرة هي إجراء عملية المقارنة بين ($Z^*$) المحسوبة، وقيمة (Z) الجدولية، (حيث قيمة (Z) الجدولية هي ١,٩٦ ±) (Tabulated Z)1.

يتوقف قبول أو رفض فرضية العدم على ما إذا كانت قيمة ($Z^*$) المحسوبة أصغر أو أكبر من قيمة (Z) الجدولية، أي على ما إذا كانت ($Z^*$) المحسوبة لا تقع في المنطقة الحرجة أو تقع فيها، أو اختصار إذا كانت $Z^* > Z$ نرفض $H_0$ ونقبل $H_1$ وإذا كانت $Z^* < Z$ نقبل $H_0$ ونرفض $H_1$.

وفي الدراسات القياسية أصبحت العادة الجارية هي اختبار ما إذا كانت المعلمة الحقيقية للمجتمع مساوية للصفر، أي أن فرضية العدم Null Hypothesis) أي: $H_0 : \beta = 0$ ضد الفرضية البديلة (Alternative Hypothesis)أي: $H_1: \beta \neq 0$، فإذا رفضنا فرضية العدم فهذا يعني بأن المعلمة ($\beta$) مختلفة عن الصفر، وإذا قبلنا بفرضية العدم فهذا يعني بأن المعلمة ($\beta$) لا تختلف معنويا عن الصفر، واحتمال وجود علاقة خطية بين المتغير التابع (Yi) والمتغير المستقل (Xi) في المجتمع المدروس احتمال ضعيف (وقد يكون غير صحيح)، وعلى هذا الأساس طالما نفترض بأن $\beta = 0$ فإن صيغة اختبار (Z) تأخذ الشكل التالي:

$$Z^* = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma_{\beta}}$$

وبما أن ($\beta$) الحقيقية مساوية للصفر حسب افتراضنا:

$$\therefore Z^* = \frac{\hat{\beta}}{\sigma_{\hat{\beta}}}$$

كذلك في الدراسات التطبيقية تأخذ قيمة (Z) الجدولية مساوية عادة إلى (٢) تقريبا، وعليه اختصارا إذا كانت قيمة (Z) المحسوبة أكبر من (٢) نرفض فرضية العدم، وإذا كانت (Z) أقل من (٢) نقبل بفرضية العدم أي، عدم وجود علاقة خطية بين (Yi) و (Xi) انظر الفقرة (٥-٧) والمثال (٢).

(٣-٥) اختبار لمعنوية المعلمات المقدرة t (The Student t- Test):

عمليا فإنه من النادر أن يكون حجم العينة كبيرا جدا، والمتعارف عليه أنه إذا قل حجم العينة عن (٣٠) مشاهدة ($n > 30$) فإن الاختبار المستخدم هو (t) ولاحتساب قيمة (t) نطبق الصيغة المحولة لتوزيع (t)، وفي حالة تكوين صيغة اختبار (t) فإن التباين الحقيقي مجهول ($\sigma_{\alpha}^{2}$ is Unkown)، وعليه تستخدم صيغ لتقدير تباين الحد العشوائي غير المتحيز $\left(\sigma_{u}^{2}\right)$ وتباين المعلمات $\left(\hat{\alpha}\right)$ و $\left(\hat{\beta}\right)$ أي $\left(\hat{\sigma}_{\alpha}^{2}\right)$ و $\left(\hat{\sigma}_{\beta}^{2}\right)$.

وإن الصيغة العامة لاختبار (t) مشابه لصيغة اختبار (Z) ولكن اختبار (t) يعتمد على عدد درجات الحرية (Degrees of Freedom) في تباين العينة ($S_{x}^{2}$) بدلا من التباين الحقيقي $\left(\sigma_{\alpha}^{2}\right)$، ولهذا فإن الصيغة العامة سوف تتضمن تقديرا غير متحيز للتباين $\left(\sigma_{u}^{2}\right)$، وتأخذ الصيغة العامة للاختبار (t) المحسوبة أو إحصائية (t) (t Statistics) الشكل التالي:

$$t^{*} = \frac{X_{i} - U}{S_{x}}$$

($X_i$) تشير إلى المتغير المراد اختبار معنويته.

(U) تشير إلى الوسط الحسابي في العينة أو القيمة المراد اختبارها.

($S_{x}^{2}$) تشير إلى قيمة تباين العينة حيث إن $\sigma_{x}^{2}$ في العينة هو:

$$S_{x}^{2} = \frac{\sum\left(X_{i} - \overline{X}\right)^{2}}{n-1}$$

(n) تشير إلى حجم العينة.

أما خطوات تطبيق هذا الاختبار فهي:

١- تحديد فرضية العدم ($H_0$) والفرضية البديلة ($H_1$).

٢- عرض الاختبار ذي الطرفين كما في اختبار (Z).

٣- تحديد مستوى المعنوية المطلوب ($\propto$).

٤- تحديد عدد درجات الحرية Degrees of Freedom (dF) n – 2.

بموجب هذه الخطوات يمكن تحديد المنطقة الحرجة (C. R.) التي تشمل جزأين أحدهما موجب والآخر سالب فكل جزء يأخذ (٠,٠٢٥) وكذلك فإن إيجاد قيمة (t) الجدولية يحتاج إلى معرفة عدد درجات الحرية، ومن جدول (t) (لاحظ جدول توزيع t في الملحق)، فإنه

إذا كان عدد درجات الحرية (d. f) مساويا (١٠) فإن قيمة (t) الجدولية = ٢,٢٢٨ (وهذه هي موجبة)، ولأن الاختبار ذو طرفين توجد قيمة أخرى سالبة هي ٢,٢٢٨١:

وعليه فإذا كانت:

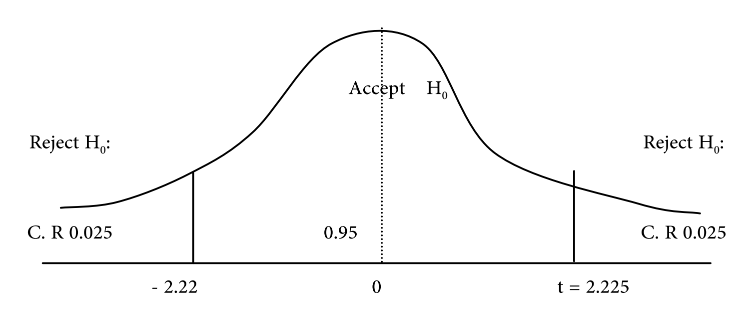
$$t^* = \frac{X_1 - U}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n}}}$$

$$t^* = \frac{X_i - u}{S_x}$$

وتقارن النتيجة مع قيمة t الجدولية.

وبافتراض أن $t \geq 2.2281$ وعلى أساس المقارنة يتم الرفض والقبول.

فإذا كانت قيمة t الجدولية أقل من $t^*$ فهي تمثل حالة القبول لوقوع قيمة ($t^*$) في منطقة القبول، أي يقبل فرض العدم، وقد أخذ المستوى ٠,٠٢٥ ليشمل جانبي الاختبار، والشكل أدناه للتوزيع (t) يوضح منطقة القبول والرفض إذا كانت (d. F) تساوي ١٠ ومستوى المعنوية يساوي ٥%.




شكل (٢-٥) يوضح منطقة قبول ورفض فرضيتي العدم والقبول

إذا كانت ($t^*$) المحسوبة أكبر من (t) الجدولية نرفض فرضية العدم، ونقبل الفرضية البديلة، وإذا كانت ($t^*$) المحسوبة أصغر من (t) الجدولية نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة.

(٥-٣-١) اختبار (t) لمقدرات المربعات الصغرى:

أما في حالة اختيار مقدرات المربعات الصغرى فإنه يلاحظ ما يلي:

$$\because \hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sigma_u^2 \sum X_i^2}{n \sum x_i^2}\right)$$

وأن:

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \hat{\sigma}_\beta^2 = \sigma_u^2 . \frac{1}{\sum x_i^2}\right)$$

وبما أن تباين المتغير العشوائي هو:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} \quad \text{.................................... (24)}$$

إذن:

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{\sum e_i^2}{(n-2)\sum x_i^2}\right)$$

ولإجراء الاختبارات يمكن توضيح قيمة (t) الإحصائية لكل من $\left(\hat{\alpha}\right)$ و $\left(\hat{\beta}\right)$ بما يلي:

$$t^* = \frac{\hat{\alpha} - \alpha^*}{\sqrt{\sigma_x^2}} \quad \text{with (d. f) = (n – 2)}$$

وأن:

$$t^* = \frac{\hat{\beta} - \beta^*}{\sqrt{\sigma_\beta^2}} \quad \text{with (d. f) = (n – 2)}$$

وفي حالة النموذج الاقتصادي ذي المتغيرين.

فإن $\left(\hat{\alpha}\right)$ و $\left(\hat{\beta}\right)$ هي تقديرات القيم الحقيقية لكل مـن ($\alpha$) و ($\beta$) الحقيقيـة أي أن فرضية العدم والفرضية البديلة هي كما يلي:

$$H_0 : \beta = \beta^* = 0$$

$$H_1 : \beta \neq \beta^* \neq 0$$

وعموما فإن فرضية العدم تكتب كالآتي:

$$H_0: \beta \text{ (or } \alpha) = 0$$

$$H_1: \beta \text{ (or } \alpha) \neq 0$$

مقابل الفرضية البديلة (لاحظ اختبار (Z) و (t) السابقتين).

وفي هذه الحالة فإن إحصائية (t) تكون:

$$t^* = \frac{\hat{\beta}}{\sigma_\beta} \text{ أو } t^* = \frac{\hat{\alpha}}{\sigma_\alpha}$$

حيث يمثل $\sigma_\alpha$، $\sigma_\beta$ الانحراف المعياري لكل من معلمات النموذج التقديري.

ولاختبار المعنوية تقارن ($t^*$) المحسوبة مع ($t$) الجدولية مع ($n - 2$) درجات حرية. فإذا وقعت ($t^*$) المحسوبة في المنطقة الحرجة نرفض فرضية العدم ($H_0$) أي نقبل بأن قيمة ($\beta$) تختلف معنويا عن القيمة التي تم اختبارها.

أما إذا وقعت ($t^*$) المحسوبة في منطقة القبول نقبل فرضية العدم ($H_0$) بمستوى معنوية مقداره ٥%، أي أن قيمة ($t^*$) لا تختلف معنويا عن القيمة المراد اختبارها وأن الفروق الموجودة تعود إلى الصدفة.

ومن الناحية العملية والعلمية وخصوصا في التطبيقات القياسية يلاحظ بأنه غالبا ما تتغير قيمة ($t$) الجدولية بصورة بطيئة عندما تكون درجات الحرية أكثر من (٨) مشاهدات فمثلا قيمة ($t$) الجدولية لمستوى معنوية (٠,٠٢٥) ولدرجات حرية مساوية (٨) تأخذ القيمة (٢,٣٠) وتكون قيمة ($t$) الجدولية لنفس المستوى ولدرجات حرية تساوي ما لا نهاية، تساوي ١,٩٦، وعليه فإن التغير من (٢,٣٠) إلى (١,٩٦) بطيء جدا، ولذا نستطيع أن نتجاهل درجات الحرية عندما تكون أكثر من (٨) ولنقل بأن قيمة ($t$) الجدولية تساوي (٢) دائما، بصورة تقريبية وللسهولة العملية خصوصا في التطبيقات التي تحتاج عمليات حسابية متضخمة إذا كانت ($t$) المحسوبة أكبر من (٢) ترفض فرضية العدم بينما تحتم الدقة العلمية ضرورة استخدام قيم ($t$) الجدولية كما هو مذكور في الملحق (ملحق الجداول).

(٤-٥) فترات الثقة*:

إن رفض فرضية العدم (Null Hypothesis) لا تعني أن المقدر $\left(\hat{\alpha}\right)$ هو مقدر صحيح ومطابق للقيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع ($\alpha$)، ولكن الذي تعنيه وببساطه أن هذا المقدر المسحوب من عينة مسحوبة من المجتمع الذي تكون فيه $\left(\hat{\alpha}\right)$ تختلف عن الصفر، وعليه فمعرفة الكيفية أو الوسيلة التي يقترب بها المقدر $\left(\hat{\alpha}\right)$ المسحوب من العينة من

---

* راجع الملحق الإحصائي (D) والملحق الإحصائي (E) وكذلك (F).

معلمة المجتمع الحقيقي ($\alpha$)، نحتاج إلى بناء أو تشكيل فترة ثقة المعلمة الحقيقية ($\alpha$)، أو بطريقة أخرى نحتاج إلى تحديد قيم (Limiting Values) باستخدام المقدر $\left(\hat{\alpha}\right)$ أو $\left(\hat{\beta}\right)$ بحيث تضمن وقوع القيمة الحقيقية للمعلمة ($\alpha$) و ($\beta$) داخل تلك الحدود بدرجة ثقة معينة (Certain Degree of Confidence)، وتسمى الفترة ما بين حدي الثقة بفترة الثقة.

وفي الاقتصاد القياسي نستخدم ٩٥% مستوى ثقة (Confidence Level)، وهذا يعني أنه في ٩٥% من حالات العينة تتطابق وسلوكية المجتمع، أي أن القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع تقع داخل فترة الثقة، وتقع ٥% فقط خارج الثقة، وتكون صيغة (C, I) تعتمد على استخدام اختبار (t) ولدرجة ثقة مقدارها (1- ζ %)، ولكل المعلمات من $\left(\hat{\alpha}\right)$ و $\left(\hat{\beta}\right)$ وهي كما يلي:

فترة الثقة للمعلمة $\left(\hat{\beta}\right)$:

$$C.1 = \hat{\beta} \pm t_{d.f}\, \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2},\ or\ \hat{\beta} \pm t\ E/2\ Var\left(\hat{\beta}\right)$$

فترة الثقة للمعلمة $\left(\hat{\alpha}\right)$:

$$C.1 = \hat{\alpha} \pm t_{d.f}\, \sigma_u^2 . \frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2}$$

(٥-٥) اختبار جودة التوفيق والعلاقة بين معامل الارتباط والانحدار:

كلما كانت المشاهدات أقرب إلى خط الانحدار (أي كلما صغرت البواقي) زاد التباين في (Y) الذي تفسره معادلة الانحدار المقدرة، والتغير (أو التباين) الكلي في ($Y_i$) يساوي التغير (التباين) المفسر زائدا تغير (أو تباين) البواقي فمن المعادلة:

$$Yi = \hat{Y}i + ei$$

والتي يمكن كتابتها في صيغة معادلة الانحرافات التالية:

$$yi = \hat{Y}i + ei$$

وبتربيع القيم وجمعها سنحصل على:

$$\sum y_i^2 = \sum (\hat{Y}_i + e_i)^2$$

$$= \sum y_i^2 + \sum e_i^2 + 2 \sum \hat{Y} ei$$

وبما أن:

$$\sum \hat{Y}_i ei = 0$$

فإن المعادلة السابقة تصبح:

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{Y}_i^2 + \sum e_i^2 \quad ............................ (24)$$

وكما يمكن كتابتها كما يلي:

$$SST = SSR + SSE \quad ................................ (25)$$

وبتعريف مجاميع المربعات على أنها:

١- التغير الإجمالي في:(yi)

$$SST = \sum (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum y_i^2$$

ويعرف بالتباين الكلي في $Y_i$ ويسمى مجموع المربعات الكلي SST أي:

$$SST = SSR + SSE \quad .......................... (25)$$

٢- التغيير المفسر في Yi:

ويعرف الجزء من تباين Yi الذي أمكن تفسيره عن طريق العلاقة المقدرة ويسمى بإجمالي المربعات المفسرة أو مجموع مربعات الانحدار حيث:

$$SSR = \sum\left(\hat{Y} - \overline{Y}\right)^2 = \sum \hat{y}_i^2 = \hat{\beta}\sum x_i^2 = \hat{\beta}\sum x_i y_i$$

٣- تغير البواقي في Yi:

$$SSE = \sum e_i^2$$

ويعرف الجزء من تباين (Y) الذي لم يمكن تفسيره عن طريق العلاقة المقدرة ويسمى بإجمالي مربعات البواقي.

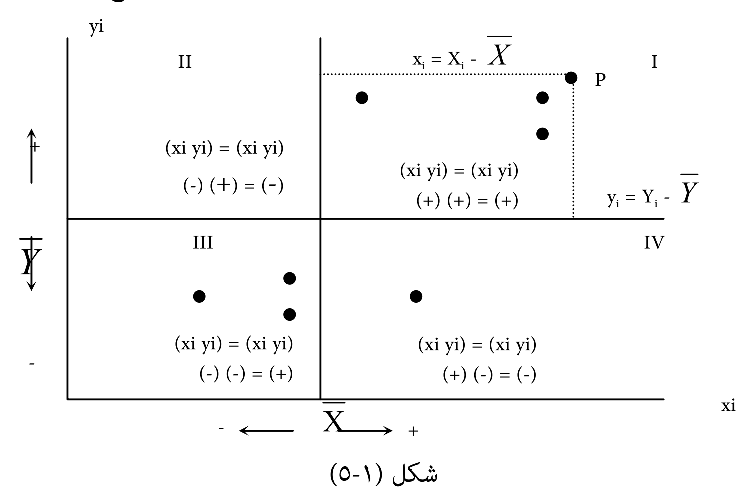
وبالاعتماد على المعادلة (٢٥) السابقة يمكننا الآن بحث الاختبارات والإحصاءات المخصصة لقياس جودة التوفيق ومعنوية النموذج حيث تنقسم هذه الإحصاءات بصورة رئيسية إلى قسمين هما:

١- معامل الارتباط ومعامل التحديد $r^2$.

٢- اختبـار تحليـل التبـاين وهـذا سـيتم التطـرق إليـه في الفصـول الخـامس والسـادس والسـابع بالتفصيل.

(١-٥-٥) معامل الارتباط (r) :

لنفترض وجود عينة تتكون من (n) مـن المشـاهدات لكـل مـن ($X_i$) و ($Y_i$) (المتغـير التـابع والمستقل) ويمكن عرضها بالشكل المذكور أدنـاه حيـث نقسـم الشـكل البيـاني إلى أربعـة أقسـام بواسطة رسم عمودين على المحورين من ($X_i$) و ($Y_i$)، ولأية نقطة مثل (P) والتي أبعـاد إحـداثياتها هي (Y1 و X1) وتصف انحرافاتها بـ: $x_i = X_i - \overline{X}$ و $y_i = Y_i - \overline{Y}$ وكما هو موضح بالشكل (١-٥) :




شكل (١-٥)

شكل الانتشار (Seatter Disgram) إلى (n) من المشاهدات عن المتغيرين المستقل ($Y_i$) والتابع ($X_i$)

ومن تدقيق الشكل البياني أعلاه، فإن حصيلة كل من ($x_i\ y_i$) هي:

موجب (+) في الربع الأول I

سالب (-) في الربع الثاني II

موجب (+) في الربع الثالث III

سالب (-) في الربع الرابع IV

وأن مجموع انحرافات ($X_i, Y_i$) أي ($x_i\ y_i$) توفر مقياسا للعلاقة بين ($X_i$) و ($Y_i$):

فالعلاقة الموجبة (+ Ve) تعني أن معظم المشاهدات تقع في I و III وعليه يتجه ($\sum x_i y_i$) ليكون موجبا، وعندما تكون العلاقة سالبة (- Ve) تعني أن معظم المشاهدات تقع في II و IV، وعليه فإن ($\sum x_i y_i$)، تتجه لتكون سالبة وعندما لا توجد علاقة بين ($X_i$) و ($Y_i$) فإن المشاهدات ستكون منتشرة بصورة مبعثرة على الأقسام الأربعة وأن ($\sum x_i y_i$) يقترب من الصفر، وعليه فإن معامل الارتباط (r) هو مقياس لدرجة العلاقة بين المتغيرين ($X_i$ و $Y_i$) المستقل والتابع، وأن ($\sum x_i y_i$) كمقياس للعلاقة يوجد عليه قيدان هما:

١- القيمة العددية لمقياس العلاقة يمكن زيادتها اعتباطيا بإضافة مشاهدات أخرى.

وهذا القيد يمكن تلافيه وذلك بالقسمة على (n) أي:

$$\frac{\sum x_i y_i}{n} \quad or \quad \frac{n\sum XY - \left(\sum X\right)\left(\sum Y\right)}{n}$$

وهذا يقودنا إلى القول أن التباين المشترك أفضل مقياس للعلاقة من مجرد مجموع الانحرافات.

٢- يتأثر هذا المقياس بشدة بوحدات قياس قيم ($X_i$) و ($Y_i$)، وهذا القيد أيضا يمكن تلافيه باستخدام الانحرافات المعيارية.

والأخذ بهاتين المعالجتين نكون قد حصلنا على معامل الارتباط لبيرسون، أي (Pearsonion or (Product) – Moment Coefficient of Correlation).

والذي يأخذ الصيغة التالية:

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{nS_x S_y} = \frac{CovXY}{\sqrt{\operatorname{var} X}\sqrt{\operatorname{var} Y}} = \frac{Covx_y}{S.D_x.S.D_Y}$$

$$= \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

وحيث إن: $S_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}},\ S_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}}$

تستخدم (r) للدلالة على معامل الارتباط للعينة في حين تستخدم (ρ) للدلالة على معامل الارتباط للمجتمع، ويمكن كتابة الصيغة البديلة (المطولة) للمعامل الارتباط كما يلي:

$$r = \frac{n\sum X_i Y_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2\right]\left[n\sum Y_i^2 - \left(\sum Y_i\right)^2\right]}} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

وإن استخدام هاتين الصيغتين (٢٥ و ٢٦) في الدراسات القياسية يوجد فيهما بعض

القصور (Limitations) منها:

١- إن الصيغة (٢٥) و (٢٦) يمكن استخدامها عندما تكون العلاقة بين المتغيرات خطية.

٢- معامل الارتباط لا يعطي أي سببية للعلاقة بين المتغيرات (Causal Relationship)، ولذا فإن (r) وحده لا يكفي لإعطاء قيم تنبؤية عن المتغيرين (X) و (Y).

٣- يمكن أن تكون العلاقة بين (X) و (Y) تعود إلى عامل الصدفة (Chance).

٤- يمكن أن يكون معامل الارتباط العالي بين المتغيرات سببه الحالات التالية:

i) قد يكون (X) و (Y) معتمدين سوية (Jointly Dependent) .

ii) قد يكون تباين (X) سبب تباين (Y) أو العكس.

ولذا لا يمكن اعتبار معامل الارتباط كمعيار أو معامل مسلم به، ولا يمكن إعطاؤه وزنا كبير في الدراسات القياسية ما لم تكون العلاقة أكيدة وسببيه.

ونحصل على علاقتين أو نتيجتين في غاية الأهمية من إعدادنا لخط المربعات الصغرى المقدر أي:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$$

ولعينة حجمها (n) من المشاهدات فالنتيجة الأولى هي:

$$\hat{\beta} = r.\frac{SY}{SX}$$

ويمكن إثبات ذلك كالآتي:

بما أن:

$$\because \hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

(راجع الفصل الثالث المعادلة (٩) ص (٧٤)،

ومن المعادلة (٢٥) المذكورة أعلاه نجد:

$$\because r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}}$$

وأن:

$$\frac{SY}{SX} = \frac{\sqrt{\sum y_i^2}}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

ولذا فإن:

$$r\,\frac{SY}{SX}=\frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}}\frac{\sqrt{\sum y_i^2}}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

إذن:

$$r\,.\,\frac{SY}{SX}=\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}=\hat{\beta} \quad \text{..................} \; (27)$$

أما النتيجة الثانية فهي:

$$\sum y_i^2=\sum \hat{y}_i^2+\sum e_i^2$$

وبطريقة أخرى فإن مجموع مربعات انحراف قيم $(Y_i)$ عن وسطها يساوي $\sum (Y_i-\bar{Y})^2=\sum y_i^2$ وهذا بدوره ينقسم إلى قسمين هما:

i) مجموع مربعات انحرافات القيم المقدرة $\left(\hat{Y}_i\right)$ عن وسطها الحسابي. (حيث $\bar{\hat{Y}}=\bar{Y}$).

ii) مجموع مربعات الأخطاء (Total Error).

من تعريف خط المربعات الصغرى المقدر فإن:

$$y_i=\hat{Y}_i+e_i$$

وبطرح المتوسط الحسابي لكل متغير:

$$(Y_i-\hat{Y})=(\hat{Y}_i-\bar{Y})+(Y_i-\hat{Y}_i)$$

وبأخذ المجموع نحصل على:

$$\sum (Y_i-\bar{Y})=[\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})+\sum(Y_i-\hat{Y}_i)]$$

وبالتربيع نحصل على:

$$\sum y_i^2=\sum \hat{Y}_i^2+\sum e_i^2+2\sum \hat{Y}_i e_i$$

وبالاستعانة بالمعادلة (٧) من الفصل الثالث ص ٧٤ نحصل على:

$$\sum \hat{Y}_i e_i=\sum[\hat{\beta} x_i e_i]=\hat{\beta}\sum x_i e_i$$

$$=\hat{\beta}\sum[x_i(y_i-\hat{\beta} x_i)]=\hat{\beta}\sum x_i y_i-\beta^2\sum x_i^2$$

$$=\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}.\sum x_i y_i-\frac{\left(\sum x_i y_i\right)^2}{\left(\sum x_i^2\right)}.\sum x_i^2=0$$

بالاستعانة بالمعادلة (٨) الفصل الثالث ص ٧١ نحصل:

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{Y}_i^2 + \sum e_i^2 \text{ …………….. } (28)$$

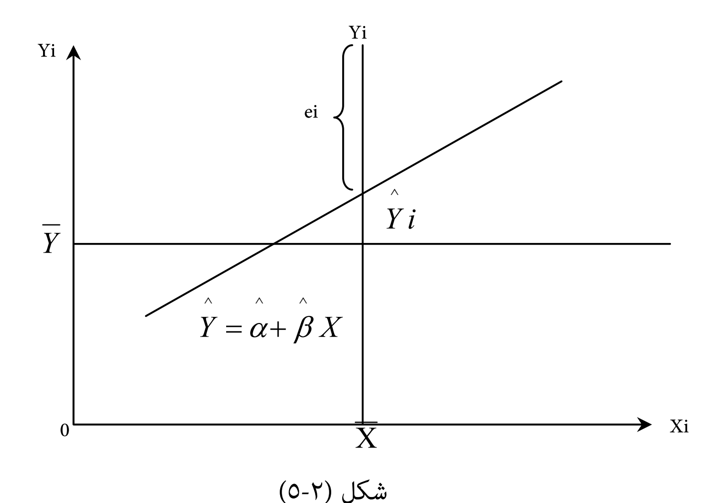
ونستنتج المعادلة التي تشير إلى أن التغيرات غير المفسرة + التغيرات المفسرة = التغيرات الكلية.

الانحراف (التغير) الكلي لقيم $(Y_i)$ عن وسطها الحسابي $\sum (Y_i - \overline{Y})^2$ يساوي $\sum y_i^2$ ويمكن تقسيمه إلى قسمين:

١) انحرافات $(Y)$ عن وسطها الحسابي (علما بأن $\hat{Y} = \overline{Y}$) وهو الذي يشار إليه بمجموع المربعات والانحرافات المفسرة بواسطة التأثير الخطي لاحظ الشكل البياني (٢-٥) أدناه.

٢) أما القسم الآخر فهو البواقي (Residuals)، أو التغير غير المفسر (غير المشروح) لقيم $(Y_i)$ عن خط المربعات الصغرى.

وعليه فإن المعادلة (٢٨) في الحقيقية تعد الأساس في موضوع تحليل التباين (Analysis of Variance) لحالة النموذج ذي المتغيرين وهذا سيتم التطرق إليه بمزيد من التحليل في الفصول (٦)، (٧) اللاحقة.




شكل (٢-٥)

يوضح المتبقي أو الانحرافات غير المفسرة

(٢-٥-٥) مربع معامل الارتباط أو معامل التحديد ($r^2$) Coefficient of Determimstion [*]:

هو عبارة عن نسبة التغيرات المفسرة إلى التغيرات الكلية، أي نسبة مجموع مربعات التغير الذي يعزى إلى المتغير المستقل إلى مجموع المربعات الكلي، وهو يقيس نسبة التغير في المتغير التابع الذي سببها وجود المتغير المستقل.

أي أن:

$$r^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

باستخدام المعادلة:

$$\frac{\sum y_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\sum (xi)^2}{\sum y_i^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

وبما أن:

$$\because" = \hat{\beta}^2 \cdot \frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

من المعادلة (٨):

$$= \frac{\left(\sum x_i y_i\right)^2}{\left(\sum x_i^2\right)^2} \frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}$$

إذن بالتعويض بالمعادلة (٢٨) نحصل على أن:

$$= \frac{\left(\sum x_i y_i\right)^2}{\sum x_i^2 \sum y_i^2} = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

وهو مربع معامل الارتباط أو ما يسمى بمعامل التحديد، ويساوي العلاقة بين انحرافات (Yi) المفسرة بالعلاقة الخطية لتأثير المتغير (Xi) في المجتمع أيضا، فإذا كانت قيمة (r) مثلا تساوي ٠,٨٠ فإنها تشير إلى أن انحدار المربعات الصغرى للمتغير (r) على (X) تفسر

---

[*] حيث يشير $R^2$ إلى معامل التحديد في النموذج الخطي المتعدد.

٦٤% من الانحرافات في (Yi) وهذا يعني أن تربيع r هو:

$$\therefore\ r = 0.08$$

$$\therefore\ r^2 = 0.64$$

وهو دائما موجب.

ومن المعادلات (٢٩) و (٣٠) يمكن الحصول على الاستنتاج التالي:

$$\because\ \sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_1^2$$

وبالقسمة على $\sum y_i^2$ نحصل على:

الحصول على الاستنتاج التالي:

$$\therefore \frac{\sum y_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

وهذا يعني أيضا أن:

$$1 = r^2 + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$\therefore r^2 = 1 - \frac{\sum e^2}{\sum y^2} \quad \text{.......................... (31)}$$

هذه النتيجة الثالثة التي تتضمن كون القيمة القصوى لمعامل التحديد ($r^2$) هي الواحد الصحيح. ومثل هذه القيمة يمكن أن تنتج فيما إذا كانت قيمة ($\sum e_i^2 = 0$) وهذا يعني عندما تقع جميع المشاهدات على خط الانحدار وأن حدود قيمة (r) هي (± ١) والإشارة تتحد بإشارة التغاير ($x_i\ y_i$) في حين قيمة $r^2$ دائما موجبة أقل من الواحدة.

وأخيرا فإن النتيجة التي يمكن التوصل إليها من هذه العلاقات هي كون معامل الارتباط يقيس مقدار الفروق التي تحدث في قيم ($Y_i$) وابتعادها عن وسطها الحسابي. فإذا كانت (Y) دالة لمتغير واحد فإن هذا التغير في قيم ($Y_i$) يعود إلى التغير في قيم ( Xi) ذلك على أن (Xi) هو السبب الأساسي في هذا التغير. ومن خواص $r^2$ أنه يتخذ قيما غير سالبة وأن قيمته تتحدد بين الصفر والواحد الصحيح أي أن : $0 \leq r \leq 1$ حيث إنه يساوي الصفر

عندما لا تفسر معادلة الانحدار. والواحد عندما تقع كل نقاط الانتشار على خط الانحدار ويتم الحصول على معامل الارتباط من معامل التحديد أي $r=\sqrt{r^2}$ .

٢- تحليل جدول التباين ANOVA (Analysis of Variance Table):

من مكونات جدول ANOVA يمكن أن نحصل على إحصاءات F و $r^2$، و r وكما يلي: تكوين جدول تحليل التباين. (راجع التطبيقات ١-٧-٥) لمزيد من التوضيح).

| مصدر التباين (التغير) Source of Variance | مجموع المربعات Sum of Squares | درجات الحرية (V) Degree of Freedom | متوسط مجموع المربعات Mean Sum of Squares | إحصاءات F و $r^2$ و r | |
|---|---|---|---|---|---|
| Variable of Xi المتغيرات المستقلة | SSR | K – 1 = 1 عدد المتغيرات المستقلة | $SSR/1$ | $\therefore F=\dfrac{SSR/1}{SSE/n-2}$ | .. $(31)'''$ |
| Residuals البواقي | SSE | N – 2 | $SSE/n-2$ | $r^2=\dfrac{SSR}{SST}$ | .. $(31)'$ |
| Total Sum of Squares إجمالي المربعات | SST | n – 1 | | $r=\dfrac{\sum xy}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}}$ | .. $(31)''$ |

$$\therefore F=\frac{SSR}{SSE/n-2}=\frac{\sum \hat{y}^2}{\sum e_i^2/n-2} \quad ............ (31)'''$$

ولفهم الاختبارات الإحصائية نأخذ التطبيقات الآتية:

تطبيق (١):

في التطبيق الثالث عن النموذج التقديري لدالة الاستهلاك منه:

١- اختبر معنوية كل من:

i) المعلمة $\hat{\alpha}$.

ii) المعلمة $\hat{\beta}$ .

وذلك باستخدام مستوى معنوية مقداره ٠,٠٥ = $\propto$.

٢- كون فترة الثقة %٩٥ لكل من:

i) المعلمة $\hat{\alpha}$.   ii) المعلمة $\hat{\beta}$.

الإجابة:

قبل الإجابة لابد من التوضيح بأن المقصود بالمعنوية Significant هي الحالة التي يتم التقرير فيها فيما إذا كانت المعلمة $\hat{\alpha}$ أو $\hat{\beta}$ تتساوى أم تختلف معنويا عن Significantly Different الصفر، أي أن الفروض هي:

$$H0 : \hat{\alpha} = 0$$

$$H1 : \hat{\alpha} \neq 0$$

وكذلك الأمر بالنسبة للمعلمة $\hat{\beta}$، أيضا يجب ملاحظة أن المقصود بـ % ζ - 1 مستوى الثقة أو حد الثقة Confidence Limit.

١- لاختبار معنوية كل من:

i) المعلمة α تستخدم الإحصائية (صيغة t) كما يلي:

يقصد بالإحصائية Statistic القيمة الإحصائية المتحصل عليها باستخدام الطرق الإحصائية من العينة وليس المجتمع، وعليه فإن اختبار باستخدام صيغة $t_c$ المحسوبة كالآتي:

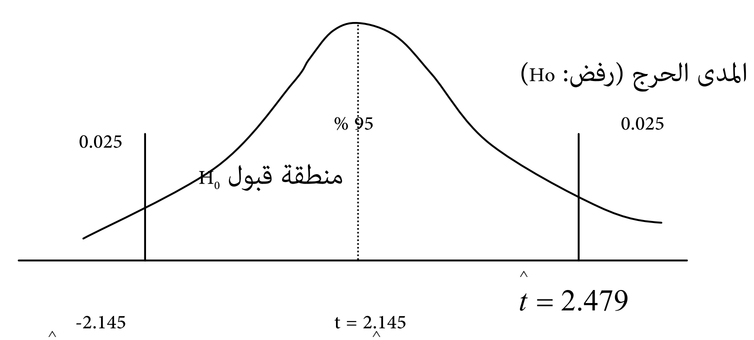
$$\hat{t}_c = \frac{\hat{\alpha}}{s.e\left(\hat{\alpha}\right)}$$

بالتعويض نحصل على:

$$\hat{t}_c = \frac{20.905}{8.44} = 2.479$$

وحيث أن قيمة $\hat{t}$ المحسوبة هي أكبر من قيمة t الجدولية ٢,٧١٤٥ (أو ١,٧٥) وعند مستوى ٥% لاختبار ذي الطرفين وبدرجات حرية v = 16 – 2 = 14.

وعليه فإننا نقرر بأن $\hat{\alpha}$ معنوية إحصائيا عند مستوى ٥% بمعنى أنه يمكننا رفض فرض العدم H0 القائل بأن $\hat{\alpha} = 0$ لصالح الفرض البديل.




ii) لاختبار المعنوية الإحصائية لـ $\hat{\beta}$ فإنه تحت فرض العدم $\hat{\beta} = 0$ مقابل الفرض البديل، $\hat{\beta} \neq ٠$ ستكون الإحصائية المستخدمة هي:

$$\hat{t} = \frac{\hat{\beta}}{s.e\left(\hat{\beta}\right)} = \frac{0.801}{0.036} = 22.25$$

ومن نتيجة قيمة $\hat{t}$ المحسوبة نلاحظ بأن $\hat{\beta}$ معنوية إحصائيا عند مستوى ٥% وبهذا نرفض فرض العدم $\hat{\beta} = 0$، ونقبل الفرض البديل $\hat{\beta} \neq ٠$ بمستوى ٩٥%.

ب- حساب فترات الثقة للمعلمات $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$:

i) فترة الثقة للمعلمة $\hat{\alpha}$ هي:

∵ فترة الثقة تحسب بالصيغة التالية:

$$\hat{\alpha} \pm t_{\infty/2} . Se\left(\hat{\alpha}\right)$$ $\hat{\alpha}$ الجدولية t Se

$\therefore = 20.905 \pm (2.145) . (8.433)$

2.816 , 38.994

وهذا يعني أن: $\hat{\alpha}$ تقع في المدى: ٣٨,٨٨٤ > $\hat{\alpha}$ > ٢,٨١٦

بدرجة ثقة مقدارها ٩٥% نلاحظ اتساع فترة الثقة للمعلمة $\hat{\alpha}$ نوعا ما، غير أنها لا تتضمن الصفر مما يظهر أن $\hat{\alpha}$ معنوية.

ii) فترة الثقة بالنسبة للمعلمة $\hat{\beta}$ هي:

$$\because \hat{\beta} \pm t_{\alpha/2} . Se\left(\hat{\beta}\right)$$

$$\therefore = 0.801 \pm (2.145)\ (0.036)$$

$$= 0.724\ ,\ 0.878$$

أي أن $\hat{\beta}$ تقع في المدى ٠,٨٧٨ > $\hat{\beta}$ > ٠,٧٢٤

بدرجة ثقة ٩٥% نلاحظ أن معامل $\hat{\beta}$ يختلف معنويا عن الصفر إذا كانت القيمة المحسوبة لإحصائية t تقع خارج فترة الثقة أو منطقة القبول رفض فرض العدم وبالتالي يرفض فرض العدم.

تطبيق (٢):

لنفترض بأن إنتاج محصول الحنطة ($Y_i$) يعتمد على متغير واحد هو ($X_i$) عدد ساعات العمل وقد توفرت لدينا البيانات التالية:

وباستخدام النموذج الخطي البسيط وفرضياته:

| Yi | Xi |
|---|---|
| ٣ | 3 |
| 4 | 5 |
| 6 | 6 |
| 11 | 6 |

$$Yi = \alpha + \beta\, xi + e\, i$$

Where ui N $(0, \sigma^2)$

المطلوب:

١- قدر معلمات النموذج $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$.

٢- استخدم الانحراف المعياري Se لاختبار مدى صلاحية كل من $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ لاختبار معنوية النموذج.

٣- استخدام اختبار t لمعنوية النموذج، اشتق فترة ثقة لكل من معلمات النموذج التقديري.

الجواب:

١- لتقدير معلمات النموذج نطبق صيغة كل من:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}$$

وللحصول على هذه القيم تكون الجدول التالي:

| (١) | | (٢) | | (٣) | (٤) | | (٥) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Yi | Xi | xY | $x^2$ | $\hat{Y}_i$ | ei | $e_i^2$ | xi | $x_i^2$ |
| 3 | 3 | 9 | 9 | 2.4 | 0.6 | 0.36 | -2 | 4 |
| 4 | 5 | 20 | 25 | 6.0 | -2.0 | 4.00 | 0 | 0 |
| 6 | 6 | 36 | 36 | 7.8 | 3.2 | 3.24 | 1 | 1 |
| 11 | 6 | 66 | 36 | 7.8 | 3.2 | 10.24 | 1 | 1 |
| $\sum 24$ | $\sum 20$ | $\sum 131$ | $\sum 106$ | 24.0 | | $\sum 17.84$ | 0 | $\sum 6$ |

n = 4

$$\hat{\overline{Y}} = \frac{\sum \hat{Y}i}{n} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\overline{X} = 5,\quad \overline{Y} = 6$$

$$\therefore \hat{\beta} = \frac{4(31)-(24)(20)}{11(106)-(20)^2} = -\frac{524-480}{424-400} = \frac{44}{24} = 1.831 \cong 2$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 6-1.8(5) \\ \therefore \hat{\alpha} &= 6-9=-3 \end{aligned}\right\} \therefore \hat{Y} = -3+1.8X_i + e_i$$

وخطوات حل التطبيق:

١- حقل المعلومات التفصيلية.

٢- حقل المقدرات $(\hat{\beta}, \hat{\alpha})$

٣- حقل القيم التقديرية.

٤- حقل تقدير المتبقي.

٥- حقل $\sigma^2$ و $\sum e_i^2$.

ولإيجاد الانحراف المعياري لكل من:

$$Se\left(\hat{\alpha}\right)=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2}.\sigma^2}$$

$$Se\ .\hat{\beta}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}}$$

نحتاج لإيجاد قيمة كل من:

$$\hat{\sigma}_u^2=\frac{\sum e_i^2}{n-2}=\sigma_u^2$$

ومن استكمال الجدول السابق نحصل على:

$$\sum e_1^2=\sum (Y_i-\hat{Y})^2=17.84\cong 18$$

$$\therefore\ \hat{\sigma}_u^2=\frac{18}{4-2}=9$$

$$\because SE\left(\hat{\alpha}\right)=\sqrt{\frac{\sum x_1^2.\sigma_u^2}{n\sum x_1^2}}=\sqrt{\frac{(20)^2}{4(6)}.9}=\sqrt{\frac{(400)9}{24}}=\sqrt{\frac{3600}{24}}=\sqrt{150}=12$$

$$\because SE\left(\hat{\beta}\right)=\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sum x_i^2}}=\sqrt{\frac{9}{6}}=\sqrt{1.5}=1.2$$

$$\therefore \hat{Y}=-3+18\,Xi+ei$$

S. E : (12) (1.2)

بافتراض أن (S .E) لكل منهما أقل من نصف مقدرات المعلمات، وعليـه نسـتمر في إجـراء الاختبارات كالآتي:

$$\hat{t} = \frac{\hat{\alpha}}{Se,\hat{\alpha}} = \frac{-3}{12} = -0.25 \qquad \hat{t} = \frac{\hat{\beta}}{Se\hat{\beta}} = \frac{1.8}{1.2} = 1.50 \quad \Bigg\} \because \frac{t0.05}{\vartheta = 2} = 4.12$$

بمقارنـة t الجدوليـة (٤,٩٢) أو (١,٧٢) مـع قيمـة ١,٧٠ = $t\hat{\alpha}$ وهـي أقـل مـن القيمـة الجدولية بمستوى ٠,٠٥ ولدرجات حرية قدرها (2) درجات تقع في منطقة رفض فرضية العـدم $H0 : \hat{\alpha} = 0$ وكـذلك نفـس التحليـل بالنسـبة $\hat{\beta}$, إذن يكـون النمـوذج في صـياغته التقديريـة والاختبارية كالآتي:

$$Yi = -3 + 1.8\ Xi + ei$$

$$Se\ \hat{\alpha} : (12)\ (1.2)$$

$$t = 1.72 \rightarrow 4.92$$

$$\hat{t} : (-0.25)\ (1.50)$$

$$\vartheta = 2, \propto = 0.05$$

من الاختبار الأولي للمعلمات (S E) واختبار t نجد أن النموذج التقـديري لا يصـلح للتنبـؤ واتخاذ القرارات.

$$\hat{\beta} \pm \hat{t}_{\vartheta/2} .Se\,\hat{\beta} = 1.83 \pm 1.50\ (1.2) = 1.83 \pm\ 1.80 = 3.63 = 0.03$$

$$\therefore\ C.1\ . =\ 0.03 < \beta < 3.63$$

ونفس التحليل بالنسبة C. 1 للمعلمة $\hat{\alpha}$ ، وهي فترة ثقة طويلة جدا.

تطبيق (٣):

إذا أعطيت البيانات أدناه عن مقدار وحدات رأسمال (xi) المستخدمة في إنتاج كمية مـن الإنتاج (Yi)، وباستخدام النموذج الخطي البسيط فرضياته:

$$Y_i = \alpha + \beta\ x_i + e_i$$

$$U \sim N\ (0, \sigma^2)$$

| 1 | | 2 | | 3 | 4 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| xi | Yi | XY | $x^2$ | $\hat{Y}$ | ei | $e^2_i$ | xi | $x^2_i$ |
| 1 | 6 | 6 | 1 | 5.06 | 0.94 | 0.88 | -2 | 4 |
| 1 | 4 | 4 | 1 | 5.06 | -1.06 | 1.12 | -2 | 4 |
| 2 | 3 | 6 | 4 | 4.53 | -1.53 | 2.34 | -1 | 1 |
| 3 | 5 | 15 | 9 | 4.00 | 1.00 | 1.00 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 8 | 4 | 4.53 | -0.53 | 0.28 | -1 | 1 |
| 4 | 5 | 20 | 16 | 3.47 | 1.53 | 2.34 | 1 | 1 |
| 5 | 3 | 15 | 25 | 2.94 | 0.06 | 0.04 | 2 | 4 |
| 6 | 2 | 12 | 36 | 2.41 | -0.41 | 0.17 | 3 | 9 |
| $\sum xi$ 24 | $\sum Yi$ 32 | $\sum xy$ | $\sum x^2_i$ | $\sum \hat{Y} i$ | 0 | $\sum e^2_i$ | 0 | $\sum x^2_i$ 24 |
| n = 8 | | 86 | 96 | 32 | | 8.17 | | |
| $\overline{X}=3$ | $\overline{Y}=4$ | $\hat{\overline{Y}} = \frac{32}{8} = 4$ $\vartheta = n - 2 = 8 - 2 = 6$ | | | | | | |

المطلوب:

١- أوجد القيمة التقديرية لمعلمات النموذج باستخدام طريقة OLS.

٢- اختبر معنوية المعلمات المقدرة.

٣- حدد حدود الثقة C. 1 لتلك المعلمات.

الجواب:

قبل الإجابة على مضمون السؤال المفروض تكوين جدول للتقديرات يضم كلا من:

١- جدول القيم الحقيقية (Xi, Yi).

٢- جدول لمكونات صيغ التقدير $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$.

٣- جدول تقدير $\hat{y}_i$.

٤- البواقي.

٥- جدول الانحرافات ($x_i$) أي ($x_i - \overline{X}$)

ومن هذه الجداول يتم تقدير واختبار المعلمات للنموذج أعلاه ومـدى صـلاحيتها للتنبـؤ واتخاذ القرارات، والخطوات التقديرية هي:

١- لتقدير معلمات النموذج التقديري نطبق الصيغة التالية:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum XY - \left(\sum y\right)\left(\sum x\right)}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}, \hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}$$

٢- لإيجاد قيمة المقدرات نحتاج لمعرفة كل من مكونات البسط والمقام لصيغة $\hat{\beta}$ وكما هي واردة في الجدول المذكور.

$$\therefore \hat{\beta} = \frac{8(86) - (24)(32)}{8(96) - (24)^2} = \frac{688 - 768}{768 - 576} = \frac{-100}{192} = -0.53$$

أما قيمة المعلمة $\hat{\alpha}$ فهي:

$$\hat{\alpha} = 4 - (-0.53)\ 3$$

$$\therefore \hat{\alpha} = 4 + 1.59 = 5.59$$

$\therefore$ المعادلة التقديرية هي:

$$\hat{Y} = 5.59 + 0.53\ Xi + e_i$$

٣- ولإجراء الاختبارات لمعرفة دقة تلك التقديرات نحتاج لمعرفة القيم التقديرية للخطأ المعياري (Se) لكل من معلمات تلك المقدرات لكي نحصل على الاختبار الأولي وهي:

$$\because Se_{\left(\hat{\alpha}\right)} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_1^2}.\sigma^2}, \because Se_{\left(\hat{\beta}\right)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}}$$

من الصيغتين نجد أن $\hat{\sigma}^2$ مجهولة، وأن قيمتها يمكن الحصول عليها من تطبيق الصيغة التالية وهي:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \sigma_u^2$$

وبما أن $(e_i)$ هي عبارة عن $(Y_i - \hat{Y})$، فإننا نحتاج إلى تكوين جدول يضم قيمة $e_i$ كما هو موضح في جدول (٤) أعلاه، حيث نجد أن:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_1^2}{n-2} = \frac{8.17}{6} = 1.36$$

من بيانات الجدول (٤):

وكذلك باستخدام معلومات الجدول (٥) نستخرج قيمة:

$$\sum x_i^2 = 24$$

ومن الحسابات أعلاه نجد أن $(Se\ \hat{\alpha})$ و $(Se\ \hat{\beta})$ يساوي:

$$Se\ \hat{\alpha} = \sqrt{\frac{96(1.36)}{8(24)}}$$

$$\therefore Se\ \hat{\alpha} = \sqrt{\frac{130.6}{192}} = \sqrt{0.68} = 0.82$$

ونفس الشيء بالنسبة $S.E\left(\hat{\beta}\right)$ هي:

$$Se\ \hat{\beta} = \sqrt{\frac{1.36}{24}} = \sqrt{0.06} = 0.25$$

$\therefore$ النموذج التقديري:

$$\therefore \hat{Y} = 5.59 + 0.53\ Xi + ei$$

$$Se : (0.82)\ (0.25)$$

تشير تقديرات الانحراف المعياري للمعلمات التقديرية إلى أنها تساوي أقل من $\frac{1}{2}$ قيمة المقدر $\left(\hat{\alpha}\right)$ وكذلك $\left(\hat{\beta}\right)$،وعليه يمكن الاستمرار في إجراء الاختبارات القياسية، وسنلجأ إلى اختبار t لمستوى معنوية قدره ٩٥% ولدرجات حرية ٦ = ϑ، وهذا يتطلب تقدير قيمة $\hat{t}$ المحسوبة ومقارنتها مع قيمة t الجدولية والبالغة ١,٧٢ كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} \because \hat{t} &= \frac{\hat{\alpha}}{Se_{\hat{\alpha}}} = \frac{5.59}{0.82} = 6.8 \\ \hat{t} &= \frac{\hat{\beta}}{Se\,\hat{\beta}} = \frac{-0.53}{0.25} = -2.12 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\because \vartheta = 6 \\ &\propto = 0.05 \\ &\therefore t = 1.72 \end{aligned}$$

من مقارنة قيمة $\hat{t}$ مع قيمة t الجدولية لمعرفة معنوية المقدرات $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ يتضح أن

قيم t المحسوبة تقع في منطقة رفض فرضية العدم بمستوى معنوية قدره ٥% وقبول الفرضية البديلة بمستوى ٩٥%.

٤- أما حساب فترات الثقة (C. I) للمعلمات التقديرية فتتم على الشكل التالي:

$$\hat{\alpha} \pm \hat{t}_{\propto/_{2}} Se_{\hat{\alpha}} = 5.59 \pm 6.8\ (0.82)$$

$$= 5.59 \pm 5.57 =$$

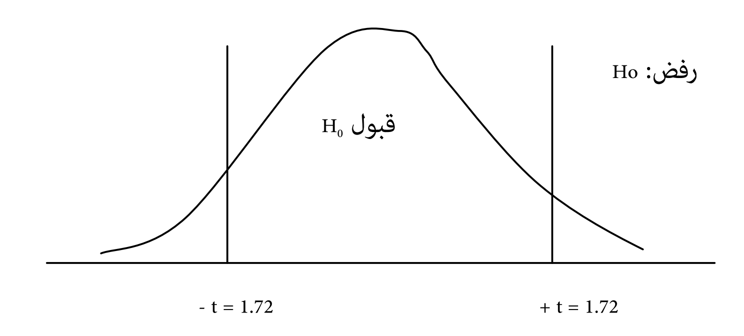
$$\therefore\ 0.02 < \alpha < 11.16$$

بينما C. I لمعلمة $\hat{\beta}$ فهي:

$$\hat{\beta} \pm \hat{t}_{\propto/_{2}} Se_{\hat{\beta}} = -0.53 \pm -2.12\ (0.25)$$

$$= -0.53 \pm 0.53$$

$$= -1.06 < \hat{\beta} < 0$$




٥- التحليل القياسي:

والآن أصبح النموذج التقديري جاهزا لمعرفة العلاقة بين متغيرات النموذج المستقلة ومدى ترابطها مع بعضها في الإطار العام للنموذج أي ما هي درجة الارتباط بين Xi و Yi وهذا يتطلب معرفة قياس الارتباط، وبهذا سيكون محور الفقرة القادمة هو اختبار صورة التوفيق أو الارتباط، أو ما هي القدرة التفسيرية للمتغير المستقل على المتغير التابع التغير في قيم (Xi) وإلى التغير في العنصر العشوائي، وكلما زادت ($r^2$) دل ذلك على أن (Xi) هو السبب الأساسي في هذا التغير، ومن خواص $r^2$ أنه يتخذ قيما غير سالبة أي $0 \leq r^2 \leq 1$.

(٦-٥) التنبؤ:

في النموذج الخطي ذي المتغيرين السابق الذكر والذي يأخذ الشكل التالي:

$$Yi = \alpha + \beta Xi + Ui$$

حيث: $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

وأن (Ui) موزعة توزيعا طبيعيا وبوجود الافتراضات الآتية:

$$E(Ui) = 0$$

$$E(Ui)^2 = \sigma_u^2$$

$$E(Ui\,Uj) = 0 \text{ if } i \neq j$$

ولعرض مشكلة التنبؤ يتطلب الأمر التطرق إلى:

أولا:

إن التنبؤ بقيمة الوسط الحسابي للمتغير (Yi) والتي تقابل قيمة معينة للمتغير (Xi) لتكون مساوية لـ :(X0).

والقيمة التنبؤية للوسط إما أن تكون التنبؤ بقيمة (Point Prediction) أو التنبؤ بفترة (Interval Prediction)، تتضمن الثانية اشتقاق فترات ثقة للوسط الحسابي لقيم (Y) التي تقابل (X0) وهذا يقودنا إلى ضرورة التطرق إلى النقطة التالية:

ثانيا:

للحصول على فترة ثقة لقيمة (Y0) المقابلة لقيمة (X0).

وهذه الحالة يمكن صياغتها بالصورة التالية:

وجود زوج إضافي أو زوج جديد من المشاهدات (X0, Y0) يكونان متواجدين وتظهر المشكلة فيما إذا كانت تعود إلى نفس الهيكل الخطي.

وعليه فإن تنبؤ قيمة الوسط الحسابي لـ: (Y) المقابلة إلى (X0) تتمثل في:

أ- التنبؤ بنقطة.

ب- التنبؤ بفترة.

(٥:٦:١) التنبؤ بنقطة Point of Prediction.

وسنبدأ بالحالة الأولى فنعرف القيمة التي يتم التنبؤ بها ولتكن (Y0) وهي دالة خطية لقيم (Yi) حيث: $i = 1, 2, \ldots, n$ ولذا فإن:

$$\hat{Y}o = \sum_{i=1}^{n} CiYi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(32)}$$

حيث تختار الأوزان (Ci) بطريقة تجعل $\left(\hat{Y}0\right)$ أفضل متنبئ خطي غير متحيز (BLUP)، أي (Best Linear Unbiased Predictor):

وبافتراض أن:

$$Yi = \alpha + \beta\, Xi + Ui \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

وأن:

$$E\,(Y0/\,X0) = \alpha + \beta\, X0$$

وبتعويض معادلة (٣٣) في معادلة (٣٢) نحصل على:

$$\hat{Y}o = \alpha \sum Ci + \beta \sum Ci\, Xi + \sum Ci\, Ui$$

وأخذ القيم المتوقعة فإن:

$$E\,(\hat{Y}o/\,Xo) = \alpha \sum Ci + \beta \sum Ci\, Xi$$

$$\because \sum Ci = 1$$

وحيث E (Ui) = 0، وبقية القيم هي ثوابت.

ولذا فإن $(\bar{\hat{Y}}o)$ سيكون متنبئا خطيا غير متحيز للقيمة $E\,(\hat{Y}o/\,Xo)$، وفقط في حالة وجوده الافتراضات الآتية:

$$\sum Ci = 1$$

$$\sum Ci\, Xi = Xo \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

ومن تعريف التباين فإن تباين (Yo) يساوي:

من التعويض فإن:

$$E\,\{\,[\,\hat{Y}o - E\,(\hat{Y}o/\,Xo^{*})]^{2}\}$$

ومن المعادلات المذكورة أعلاه فإن:

$$= E\,\{\,[\,\alpha \sum Ci + \beta \sum Ci\, Xi + \sum Ci\, Ui) - (\alpha \sum Ci + \beta \sum Ci\, Xi)]^{2}\,\}$$

---

* إن قيمة الحد الجبري $E\,(\hat{Y}o/\,Xo)$ يعامـــــل وكأنه الوسط الحسابي، وعليه فإن القيمة $\left(\hat{Y}o\right)$ مطروحا منها وسطها الحسابي وبأخذ المجموع والتربيع له نحصل على مقدار التباين المذكور أعلاه.

بأخذ الأوزان بنظر الاعتبار نحصل على:

$$= E\,[\,(\sum Ci\ Ui)^2\,]$$

$$= E\,[\,(C_1\,U_1)^2 + (C_2\,U_2)^2 + \ldots + (C_n\,U_n)^2 + 2\,C_1\,C_2\,U_1\,U_2 + \ldots + 2\,_{Cn-1}\,U_{n-1}\,U_n)\,]$$

من حاصل تربيع المقدار نحصل على:

$$= C_1^2\,E\,(U_1)^2 + C_2^2\,E\,(U_2)^2 + C_n^2\,E\,(U_n)^2 + 2\,Ci\,Cj\,E\,(Ui\ Uj)$$

بالاختصار نحصل على:

وبما أن $E\,(Ui\ Uj)$ بموجب الفرضية العامة للنموذج:

$$\therefore = \sigma_u^2\,[\,(C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2)\,]$$

$$\therefore = \sigma_u^2 \sum C_i^2$$

حيث $E\,(Ui)^2 = \sigma_u^2$ بموجب الفرضية العامة للنموذج، وبأخذ دالة لاكرانج نحصل على:

$$Q = \sum C_i^2 - 2\,\lambda\,(\sum Ci - 1) - 2\,\mu\,(\sum Ci\ Xi - Xo)^*$$

أي:

$$Q = \sum C_i^2 - 2\,\lambda \sum Ci + 2\,\lambda - 2\,\mu \sum Ci\ Xi - 2\,\mu\,Xo$$

وبأخذ التفاضل الجزئي وبمساواة النتائج بالصفر نحصل على المعادلات الثلاث التالية:

$$\frac{\delta Q}{\delta Ci} = 2\,Ci - 2\,\lambda - 2\,\mu\,Xi = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (a)$$

$$\frac{\delta Q}{\delta \lambda} = -2 \sum Ci + 2 = 0$$

$$2\,(\sum Ci - 1) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (b)$$

$$\frac{\delta Q}{\delta \mu} = -2 \sum Ci\ Xi + 2\,X0 = 0$$

$$2\,(\sum Ci\ Xi - X0) - 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (c)$$

ومن المعادلتين (a) و (b) نحصل على المعادلة (d):

---

* إن كلا من المقدارين λ، μ يشيران إلى مضاعفات لاكرانج.

$$Ci = \lambda + \mu\, Xi$$

$$\sum Ci = 1$$

بالتعويض نحصل على:

$$\sum Ci = n\,\lambda + \mu \sum Xi = 1$$

وبقسمتها على (n) نحصل على:

$$\lambda + \mu\, X = \frac{1}{n}$$

وبتعويضها في المعادلة (d) نحصل على:

$$C_i = \frac{1}{n} - \mu\overline{X} + \mu X_i$$

وبإعادة ترتيبها نحصل على:

$$C_i = \frac{1}{n} + \mu\left(X_i - \overline{X}\right)$$

وبأخذ الانحرافات نحصل على:

$$C_i = \frac{1}{n} + \mu x_i \quad \text{.............................} \ (35)$$

وبضرب هذه المعادلة في ($X_i$) والجمع (i) لكل ($\sum$) نحصل على:

$$\sum C_i X_i = \overline{X} + \mu \sum x_i X_i$$

ومن استخدام المعادلة (٣٤) فإن:

$$\therefore \sum C_i X_i = X + \mu \sum x_i X_i = X0$$

وبقسمة طرفي المعادلة على ($\sum xi\, Xi$) نحصل على:

$$\mu = \frac{X0 - X}{\sum xiXi}$$

وبما أن:

$$Xi = x_i + \overline{X}$$

إذن بالتعويض نحصل على:

$$\mu = \frac{X0 - \overline{X}}{\sum\left[xi(xi + X\right]}$$

إذن:

$$\mu = \frac{X0 - \overline{X}}{\sum x_1^2}$$

وباستخدام المعادلة (٣٥) نحصل:

$$Ci = \frac{1}{n} + \frac{\left(X0 - \overline{X}\right)}{\sum x_i^2} xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(36)}$$

وبالتعويض في المعادلة (٣٢) نحصل على أفضل مقدر خطي وغير متحيز وهو:

$$\hat{Y}\,0 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n} + \frac{\left(X0 - \overline{X}\right)}{\sum x_i^2}.xi\right] Yi$$

أي أن:

$$\hat{Y}\,0 = \frac{\sum Yi}{n} + \frac{\left(X0 - \overline{X}\right)}{\sum x_i^2}\sum xiYi$$

$$\hat{Y}_o = \overline{Y} + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)\sum x_i.\left(y_i + \overline{Y}\right)}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{Y}_o = \overline{Y} + X_o\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} - \overline{X}\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

وبما أن: $\sum x_i = 0$ (مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي يساوي صفرا).

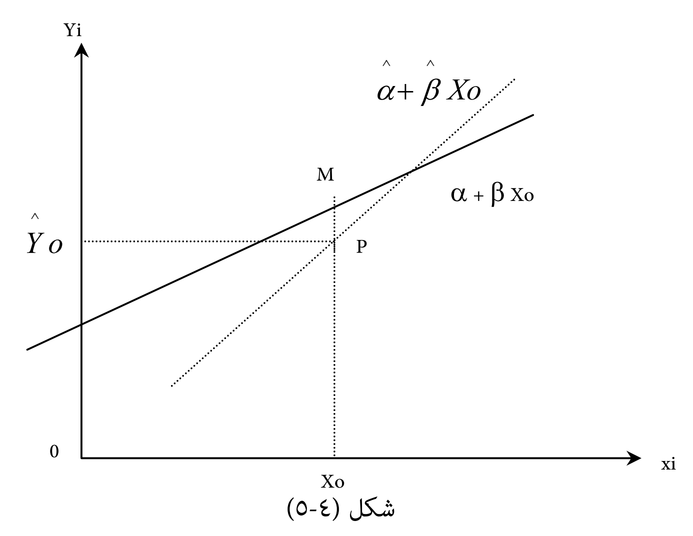
إذن: باستخدام المعادلة (٦) من الفصل الثالث:

$$\hat{Y}_o = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X} + \hat{\beta}\,X_o$$

باستخدام المعادلة (٧) من الفصل الثالث.

$$\hat{Y}_o = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,X_o$$

ومن هذا نستنتج بأن التنـبؤ بنقطة تعطي أفضل مقدر خطي غير متحيز للمقدار ($\alpha + \beta X_o$)، ويساوي $\left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_o\right)$ حيث أن $\left(\hat{\alpha}\right)$، $\left(\hat{\beta}\right)$ هما مقـدرات المربعـات الصـغرى (OLS) ويوضح الشكل البياني التالي التنبؤ بنقطة.




شكل (٤-٥)

يوضح خط التنبؤ بنقطة

حيث ان (M) عبارة عن الوسط الحسابي لـ: (Y) المقابلة لـ: ($X_o$) في المجتمع.

وإن ($\rho = \hat{Y}_o$) متنبئ غير متحيز BLU Predictor للقيمة إن (P) هي نقطة تنبؤ.

ولتوضيح نقطة التنبؤ نأخذ مثالنا السابق عن دالة الاستهلاك. حيث نفترض بأن الدخل القومي قد زاد بمقدار ١٢٠٠ مليون دينار أي أن $X_O = 1200$.

إذن بالتعويض:

$$\hat{Y} = -430 + 1.45\,X$$

ينتج ما يلي:

$$\hat{Y}_o = -430 + 1.45\,(1200) = 1310$$

حيث (١٣١٠) مليون دينار هي قيمة الوسط الحسابي (القيمة المتوقعة) للاستهلاك، التي تقابل دخلا يبلغ ١٢٠٠ مليون دينار (وهذه حالة افتراضية، حيث إن الاستهلاك تجاوز الدخل وقد وردت للتوضيح فقط).

(٢-٦-٥) التنبؤ بفترة Interval Prediction:

من التحليل السابق وجدنا أن تباين $\left(\hat{Y}_o\right)$ هو:

$$(Var)\ \hat{Y}_O = \sigma^2_u \sum C^2_i$$

$$= \sigma_u^2 \sum \left[\frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)x_i}{\sum x_i^2}\right]^2$$

$$= \sigma_u^2 \sum \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \frac{\left(X_o - \overline{X}\right) x_i}{\sum x_i^2} + \left\{ \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)}{\sum x_i^2} \right\}^2 x_i^2 \right]$$

$$= \sigma_u^2 \sum \left[ \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2} \sum x_i + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)^2}{\left(\sum x_i^2\right)^2} \sum x_i^2 \right]$$

$\sum x_i = 0$

$$\therefore (Var) \hat{Y}_o = \sigma_u^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

ويلاحظ أن التباين للتنبؤ يتزايـــد كلما ابتعدت $(X_o)$ عـن الوسـط الحسـابي لقـيم العينـة المستخدم في احتساب كل من $\left(\hat{\alpha}\right)$، $\left(\hat{\beta}\right)$، وأن النظريـة الإحصـائية تـرى بأنـه طالمـا $\left(\hat{Y}_o\right)$ هي دالة خطية في كل مـــن $\left(\hat{\alpha}\right)$، $\left(\hat{\beta}\right)$، ولها توزيع طبيعي ثنائي المتغيرات (Bivariate Normal Distribution)، فسـيكون لهـا توزيـع طبيعـي وسـطه الحسـابي $(\alpha+\beta Xo)$ وتباينـه كـما هـو وارد في المعادلة (٣-٧) أعلاه، وإضافة لذلك فإن الحد التالي:

$\frac{(n-2)\sigma_u^2}{\sigma_u}$) لها توزيع $(x^2)$ المستقل وله $(n-2)$ درجات الحرية وعليه فإن القيمة:

$$\frac{\hat{Y}_o - E(Y_o / X_o)}{\hat{\sigma}_u \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - X\right)^2}{\sum x_i^2}}}$$

تتبع توزيع $(t)$ بدرجات حرية عددها $n - 2$.

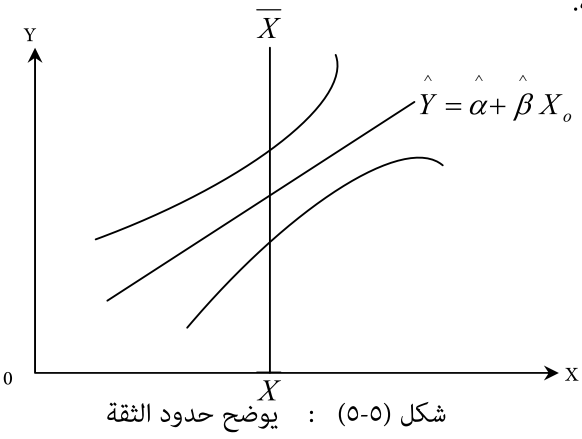
وهكذا فإن (ζ - ١) ١٠٠)، من فترات الثقة لتوقع $E(Y0/Xo)$ يأخذ الصيغة التالية:

$$\left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} Xo\right) \pm t_{\zeta 2} \hat{\sigma}_u \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(Xo - \overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

وكلما زادت $(X_0)$ ابتعادا عن وسط العينـة، كلـما زاد التبـاين المسـتخدم في تكـون حـدود الثقة، وهنا يظهر ما يسمى بنطاق الثقة (Confidence Belt).

ويلاحظ أن هـذا النطـاق يبنـى بالأسـاس عـلى عينـة منفـردة، ولكنـه يظهـر في العينـات الجديدة المختارة، ويكون نطاقا جديد للثقة، ويمكن تفسير نطاق الثقة كما يلي:

إذا افترضنا وجود (١٠٠) عينة مختارة، وتم احتسـاب (١٠٠) نطـاق ثقـة فإنـه يتوقـع أن يتضمن حوالي (٩٥%) منها خط انحدار المجتمـع، وأن نطـاق الثقـة المرسـوم يوضـح واحـدا مـن المائة نطاق ثقة.




شكل (٥-٥) : يوضح حدود الثقة

(٥-٧) تطبيقات وتمارين:

٥-٧-١ تطبيقات على اختبار t وجدول تحليل التباين:

تطبيق (٤):

لنفترض أن إنتاج محصول العنب (Yi) يعتمد على متغير واحـد (xi) عـدد سـاعات العمـل وقد توفرت لدينا البيانات التالية:

| Yi | Xi | Xy | $x^2_i$ | $\hat{Y}_i$ | ei | $e^2_i$ | xi | $x^2_i$ | yi | $y^2_i$ | xiyi | $Y^2_i$ | $\hat{Y}_i$ | $\hat{Y}^2_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 9 | 9 | 2.4 | 0.6 | 0.36 | -2 | 4 | -3 | 9 | 6 | 9 | -3.6 | 12.96 |
| 4 | 5 | 20 | 25 | 6.0 | -2 | 4.00 | 0 | 0 | -2 | 4 | 0 | 16 | 0.0 | 0.0 |
| 6 | 6 | 36 | 36 | 7.8 | 1.8 | 3.24 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 36 | 1.8 | 3.24 |
| 11 | 6 | 66 | 36 | 7.8 | 3.2 | 10.24 | 1 | 1 | 5 | 25 | 5 | 121 | 1.8 | 3.24 |
| $\sum 24$ | $\sum 20$ | $\sum xy$ | $\sum X^2$ | $\sum \hat{Y}_i$ | $\sum e_i$ | $\sum e^2_i$ | $\sum x_i$ | $\sum x^2$ | $\sum yi$ | $\sum y^2_i$ | $\sum xy$ | $\sum Y^2_i$ | $\sum \hat{Y}$ | $\sum \hat{Y}^2_i$ |
| 1=4 | | ١٣١ | 106 | 24 | 0 | 17.84 | 0 | 6 | 0 | 38 | 11 | 182 | 0 | 19.44 |
| $\overline{Y} = 6$ | $\overline{X} = 5$ | | | | | | | | | | | | | |

**ملاحظـــــة:** لإيجاد معامل التحديد $r^2$ ومعامل الارتباط نحتاج إلى تطبيق إحدى الصيغتين وهما:

معامل التحديد $= r^2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_1^2}} = r$

أو:

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x\left(\sum y\right)}{\sqrt{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\sqrt{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}}$$

المطلوب:

١- قدر معلمات النموذج $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$.

٢- استخدم الانحراف المعياري (Se) لاختبار مدى صلاحية كل من $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ لاختبار معنوية النموذج.

٣- استخدم اختبار t لمعنوية النموذج، اشتق فترة ثقة لكل من معلمات النموذج التقديري.

٤- أوجد معامل التحديد ومعامل الارتباط $r, r^2$.

٥- أوجد اختبار F.

٦- ما هو المقصود بجدول تحليل التباين. (ANOVA).

الجواب:

مما سبق تم الحصول على المقدرات للنموذج وبالاستعانة في بيانات الجدول أعلاه نحصل على:

$$\hat{Y} = -3 + 1.8\,Xi + ei$$

$$F = \frac{SSR}{SSE/n-2} = \frac{19.44}{17.54/2} = \frac{19.44}{8.92} = 2.18$$

$Se^i$ (2.7) (1.2)

$\hat{t}$ (-1.00) (1.50), $t_{0.05/2} = 4.92$

$\hat{\sigma}_u^2 = 9$

$\therefore$

لإيجاد قيمة معامل التحديد ومعامل الارتباط نطبق أحدى الصيغتين أدناه، وذلك لأنهما الأكثر عمليا وتطبيقا وكما يلي:

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y_i^2}} = \frac{11}{\sqrt{6}\sqrt{38}} = \frac{11}{(2.5)(6.2)} = \frac{11}{15.5} = 0.70$$

$$\therefore\ r^2 = (0.07)^2 = 0.49$$

نجد أن r يبالغ في تفسير العلاقة بينهما $r^2$ يقلل من عملية المبالغة في تفسير العلاقة أو يمكن استخدام الصيغة التالية وبالاعتماد على بيانات الجدول أعلاه كالآتي:

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x\left(\sum Y\right)}{\sqrt{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\sqrt{n\sum y^2 - \left(\sum n^2\right)}} = \frac{4(131) - (24)(20)}{\sqrt{4(106) - (20)^2}\sqrt{4(182) - (24)^2}}$$

$$= \frac{44}{60} \cong 0.70\ \therefore\ r^2 = 0.49$$

ونفس الشيء بالنسبة للصيغ الأخرى وعند تطبيقها نحصل نفس النتائج، وعليه تستخدم الصيغتان أعلاه وذلك لأنهما أكثر عملية.

تطبيق (٥):

إذا أعطيت البيانات أدناه عن كمية لسماد (xi) وكمية إنتاج العنب (Yi).

المطلوب:

١- أوجد القيمة التقديرية لكل من $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ وبإحدى الطرق التي درستها.

٢- اختبر دقة هذه التقديرات باستخدام مستوى معنوية ٩٥%.

٣- أوجد العلاقة بين المتغير المستقل والمتغير التابع كذلك أوجد معامل التحديد $r^2$ بينهما.

٤- أوجد اختبار F.

٥- كون جدول ANOVA.

الإجابة:

مما سبق فقد تم الحصول على المقدرات التالية:

جدول (٢)

| $x_i$ | $y_i$ | $x^2_i$ | $X_iY_i$ | $\hat{Y}_i$ | $e_i$ | $e^2_i$ | xi | $x^2_i$ | $y_i$ | $y^2_i$ | $Y^2_i$ | $x_iy_i$ | $Y^2_i$ | $\hat{y}_i$ | $\hat{y}^2_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1 | 6 | 4.83 | 1.17 | 1.36 | -2 | 4 | 2 | 4 | 36 | -4 | 36 | 0.83 | 0.69 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 4.83 | -0.83 | 0.69 | -2 | 4 | 0 | 0 | 16 | 0 | 16 | 0.83 | 0.69 |
| 2 | 3 | 4 | 6 | 4.41 | -1.41 | 1.99 | -1 | 1 | -1 | 1 | 9 | 1 | 9 | 0.41 | 0.17 |
| 3 | 5 | 9 | 15 | 3.99 | 1.01 | 1.02 | 0 | 0 | 1 | 1 | 25 | 0 | 25 | -0.01 | 0.00 |
| 2 | 4 | 4 | 8 | 4.43 | 0.43 | 1.18 | -1 | 1 | 0 | 0 | 16 | 0 | 16 | 0.43 | 0.19 |
| 4 | 5 | 16 | 20 | 3.57 | 1.85 | 3.42 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 1 | 25 | -0.43 | 0.19 |
| ٥ | 3 | 25 | 15 | 3.15 | -0.15 | 0.02 | 2 | 4 | -1 | 1 | 9 | -2 | 9 | 0.85 | 0.72 |
| 6 | 2 | 36 | 12 | 2.73 | -0.73 | 0.53 | 3 | 9 | -2 | 4 | 4 | -6 | 4 | -1.27 | 1.61 |
| $\sum xi$ | $\sum yi$ | $\sum x^2_i$ | $\sum xiyi$ | $\sum \hat{Y}_i$ | $\sum e_i$ | $\sum e^2$ | $\sum xi$ | $\sum x^2$ | $\sum y_i$ | $\sum y^2_i$ | $\sum Y^2_i$ | $\sum xy$ | $\sum Y^2_i$ | $\sum \hat{y}_i$ | $\sum \hat{y}^2$ |
| 24 | 32 | 96 | 86 | 32 | 0 | 8.17 | 0 | 24 | 0 | 12 | 140 | -10 | 140 | 0 | 4026 |

$n = 8 \quad \overline{X} = 3, \ \overline{Y} = 4$

$\therefore \hat{Y} = 5.59 - 0.53\, Xi + ei$

t الجدولية $t_{0.05/v=6} = 1.74$

$\zeta e : (0.82)\ (0.25)$

$\sigma^2_u : 1.36$

$\hat{t} : (6.8)\ (-2.12)$

لإيجاد معامل التحديد $r^2$ ومعامل الارتباط نستعين بالمعلومات أعلاه وكما يلي:

$$r = \frac{\sum xiyi}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y_1^2}} = \frac{-10}{\sqrt{24}\sqrt{12}} = \frac{-10}{17}$$

$$= -0.59 \ \therefore \ r^2 = 0.35$$

أو يمكن استخدام الطريقة المباشرة أو المطولة كما يلي:

$$r = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{n\sum x_i^2 - \left(\sum x\right)^2}\sqrt{n\sum y_i^2 - \left(\sum y\right)^2}} = \frac{8(86)-(24)(32)}{\sqrt{8(96)-(24)^2}\sqrt{8(140)-(32)^2}}$$

$$= \frac{688-768}{\sqrt{192}\sqrt{96}}$$

$$r = \frac{-80}{(13.9)(9.8)} = \frac{-80}{136.2} = -0.587 \cong -0.59 \ \therefore \ r^2 = 0.348 \cong 0.35$$

تطبيق (٦):

من البيانات المتوفرة في جدول (١) السابق تم الحصول على المعلومات الآتية:

$$\because\ SSR = \sum\left(\hat{Y}-\overline{Y}\right)^2 = \sum \hat{y}_i^2 = 19.44,\ n = 4$$

$$SSE = \sum e_i^2 = 17.84,\ k = 2$$

$$SST = \sum (Yi - \overline{Y})^2 = \sum y_i^2 = 38.00$$

$$\left.\begin{array}{r} k-1=1 \\ \therefore n-2=2 \\ n-1=3 \end{array}\right\}\vartheta,\ \begin{array}{l} \sum x_i y_i = 11 \\ \sum x_i^2 = 6 \therefore \sqrt{\sum x^2} = \sqrt{6} = 2.45 \\ \sum y_i^2 = 38 \therefore \sqrt{\sum y_i^2} = \sqrt{38} = 6.16 \end{array}$$

مكونات جدول ANOVA .... ومن هذه المعلومات يمكن عندئذ تكوين جدول تحليل التباين كما يلي:

ANOVA Table

| مصدر التباين S. V | مجموع المربعات SS | درجة الحرية $\vartheta$ | متوسط مجموع المربعات SS | إحصائية F، r $r^2$ |
|---|---|---|---|---|
| المتغير Xi | SSR = 19.44 | 1 | $19.44/1$ | F = $\frac{19.44/1}{17.84/2} = \frac{19.44}{8.92} = 2.18$ |
| البواقي $e_i$ | SSE = 17.84 | 2 | $17.84/2$ | $r = \frac{11}{(2.45)(6.16)} = \frac{11}{15} = 0.73$ |
| مجموع المربعات SS | SST ≅ 38 | 3 | $38/3$ | $r^2 = 0.39 \cong 40$ |

أيضا فإن:

$$r^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{19.44}{38} \cong 0.50$$

الاختلاف يعود إلى العمليات التقريبية.

التحليل:

∴ نموذج التقدير للعلاقة الاقتصادية المذكورة في التطبيق (١) سوف يأخذ الشكل التالي:

$$\because \hat{Y}i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Xi + ei$$

$$\because \hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

$$\therefore \hat{Y} i = -3 + 1.8\ Xi + ei$$

Se: (2.7) (1.2)

$\hat{t}$ : (-1.00) (1.50), $t_{\substack{0.05 \\ \vartheta=2}} = 4.92$

$\sigma^2_u = 9.00$

r = 0.78

$r^2 = 0.39$

$\hat{F} = 2.18$ F = 18.51

$\vartheta = 1, 2$

انظر إلى التحليل الاقتصادي في التطبيق ٢.

تطبيق (٧):

من البيانات المتوفرة في جدول (٢) السابق تم الحصول على المعلومات الآتية:

$$\because SSR = \sum \left( \hat{Y} - \overline{Y} \right)^2 = \sum \hat{y}_i^2 = 4.26 \cong 4$$

$$\because SSE = \sum e_i^2 = 8.17 \cong 8$$

$$SST = \sum (Yi - \overline{Y})^2 = \sum y_i^2 = 12.00$$

$$\because \left. \begin{array}{r} k-1 = 2-1 = 1 \\ n-2 = 8-2 = 6 \\ n-1 = 8-1 = 7 \end{array} \right\} \vartheta, \begin{array}{l} \sum xy = -10 \\ \sum x^2 = 24 = \sqrt{\sum x^2} = 4.9 \\ \sum y_i^2 = 12 = \sqrt{\sum y^2} = 3.5 \end{array}$$

وعليه فإن جدول تحليل التباين سيكون بالشكل التالي:

ANOVA Table

| إحصائية F، r<br>$r^2$ | متوسط مجموع المربعات SS | درجة الحرية<br>$\vartheta$ | مجموع المربعات<br>SS | مصدر التباين<br>S. V |
|---|---|---|---|---|
| $F = \frac{4/1}{8/6} = \frac{4}{1.3} = 3.1$ | $4/1$ | 1 | SSR = 4 | المتغير Xi |
| $r = \frac{-10}{(4.9)(3.5)} = \frac{-10}{17.2} = -0.58$<br>$r^2 = 0.34$ | $8/6$ | 6 | SSE = 8 | البواقي $e_i$ |
| | $12/7$ | 7 | SST ≅ 12 | مجموع المربعات SS |

أيضا:

$$r^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{4}{12} = 0.33$$

الاختلاف يعود للتقريب.

التحليل:

∴ نموذج التقدير للعلاقة الاقتصادية المذكورة سابقا تأخذ الشكل التالي:

$$\hat{Y} i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + ei$$

$$\hat{Y} i = 5.59 - 0.53 Xi + ei$$

Se: (0.82) (0.25)

$$\hat{\sigma}^2_u = 1.361$$

حيث إن: $t_{\substack{0.05 \\ v=6}} = 1.74$

$\hat{t}$ : (6.8) (-2.12)

r : 0.58

$r^2 = 0.33$

F = 3.1

الجدولية (النظرية) $\vartheta = 1, 6 = 5.99$

إن العلاقة بين المتغيرين يفسرها معامل الارتباط (r) والذي فسره حوالي ٥٨% من الانحرافات (التغيرات) في $Y_i$ (المتغير التابع)، في معامل التحديد ($r^2$) فسر حوالي ٣٣% من

التغيرات في $Y_i$ وبهذا فإنه ترك حوالي أكثر من ٦٠% من التغيرات التي تحصل في Yi إلى عوامل أخرى لم يأخذها نموذج التقدير.

ولاختبار فرض العدم $Ho: \hat{\beta} = 0$ وعلى مستوى معنوية ٥% نجد أن قيمة F النظرية (الجدولية) لدرجات حرية ١، ٦ هي: ٥,٩٩، وبما أن قيمة F المحسوبة تساوي ٣,١ وهي أقل بكثير من القيمة النظرية لذا نقبل فرضية العدم، وهذا يعني عدم وجود علاقة ارتباط قوية يعتمد عليها بين المتغيرين Xi و Yi.

ملاحظة مهمة:

النماذج الاقتصادية غير الخطية Non-Linear Economics Models لقياس معدلات النمو في أي متغير من المتغيرات يستخدم النموذج الأسي التالي:

$$Y = \alpha\, e^{BT}$$

حيث:

Y = المتغير المراد قياس نموه (التابع).

T = الزمن وهو المتغير المستقل.

e = اللوغاريتم الطبيعي (e = ٢,٧١٨).

$\alpha$ = معلمة الحد الثابت.

$\beta$ = معلمة النمو.

ولأن النموذج السابق غير خطي فإنه يحول إلى نموذج خطي باستخدام اللوغاريتم وذلك لتبسيط عملية القياس حيث إن:

$$\text{Log } Y_i = \text{Log } \alpha + B\, T$$

وبإجراء انحدار على هذا النموذج بوساطة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) حيث المتغير التابع هو $\text{Log } Y_i$ والمتغير المستقل (T)، ومعامل النمو هو $\beta$ يمكن الحصول على التقديرات المطلوبة.

(٥-٧) تطبيقات وتمارين:

**١-٧-٥ تطبيقات على اختبار ANOVA, t*[*] :**

تطبيق (٨):

لنفترض أن ٢٩,٤٨ = $\hat{\beta}$ ، وأن ٣٦,٩ = $\hat{\sigma}_B$ ، والمطلوب اختبار كون (β) الحقيقية تساوي ٢٥,٠ وبمستوى معنوية ٥%.

الجواب:

بتطبيق صيغة (Z) المحولة نحصل على:

$$\because Z^* = \frac{\hat{\beta} - B}{\hat{\hat{\sigma}}_B}$$

$$\because Z^* = \frac{29.48 - 25.00}{36.9} = 0.12$$

ومن الشكل البياني (٥-١) نقبل بفرضية العدم، وذلك لأن ($Z^*$) لا تقع في المنطقة الحرجـة أي أن ١,٩٦ > $Z^*$، أي نقبل الفرضية القائلة بأن ٢٥,٠ = $\hat{\beta}$ وبمستوى معنوية مقداره ٥%.

تطبيق (٩):

لنفترض بأن دالة العرض لعينة حجمها (٧٠٠) مشاهدة مقدرة كما يلي:

$$\hat{Y} = 100 + 4.00\,Xi$$
$$S.\,E{:}\ (20)\ (1.5)$$

ولكي نختبر ما إذا كان ميل الانحـدار يختلـف معنويـا عـن الصـفر نضـع فرضـية العـدم، والفرضية البديلة كما يلي:

$$HO : \beta = 0$$
$$H1 : \beta \neq 1$$

نطبق صيغة ($Z^*$) المحولة كما يلي:

$$Z^* = \frac{\hat{\beta}}{\sigma_{\hat{B}}} = \frac{4}{1.5} = 2.66$$

---

[*] يعتبر فهم واستيعاب هذه التطبيقات الأساس في فهم بقية فصول هذا الكتاب.

بما أن قيمة ($Z^*$) أكبر من قيمة (Z) الجدولية (٢) إذن نـرفض فرضـية العـدم، أي أن ميـل خط الانحدار وهو للمعلمة (β) غير مساو للصفر، وهي معنوية ٥%، وهذا يعني أن (X) يؤثر في المتغير Y وبينهما علاقة خطية، وللتوضيح راجع الشكل البياني (١-٥) السابق الذكر.

ولكي نختبر ما إذا كان ثابت الانحدار (المقطع) يختلف كذلك عن الصفر فإن:

$H0: \hat{\alpha} = 0$

$H0: \hat{\alpha} \neq 0$

وبمستوى المعنوية ٥%.

$$\because Z^* = \frac{\hat{\alpha}}{\sigma_{\hat{\alpha}}}$$

$$\therefore Z^* = \frac{100}{20} = 5$$

وأيضا بما أن قيمة ($Z^*$) الجدولية لذلك نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البـديل القائـل بأن ثابت الانحدار يختلف معنويا عن الصفر بمعنى أنه إذا كانت قيم $X = 0$ فإن (Y) تأخـذ قـيما مختلفة عن الصفر وفي هذا المثال فإن ١٠٠ = $\hat{Y}$ عندما $X = 0$.

تطبيق (١٠):

نفترض أن لدينا عينة حجمها (٢٠) وكان تقدير دالة الاستهلاك هو:

حيث أن: Y = الدخل.

C = الاستهلاك.

$C = 100 + 0.70\ Yi$

S. D (57.5) (0.21)

الجواب:

ولاختبار ما إذا كان:

$H0: \hat{\beta} = 0$

$H1: \hat{\beta} \neq 0$

يتم تطبيق اختبار (t) حيث:

$$t = \frac{\hat{\beta}}{\sigma_{\hat{\beta}}} = \frac{0.70}{0.21} = 3.3$$

$\because$ dF = n – k = 20 – 2 = 18

وبما أن درجات الحرية تساوي (١٨)، ولمستوى معنوية ٠,٠٢٥، فإن (t) الجدولية تساوي (٢,١٠). من هذا نستنتج أن (t*) تقع في المنطقة الحرجة، وعليه نرفض فرضية العدم ($\hat{\beta}$ = ٠) وأن قيمة $\left(\hat{\beta}\right)$ تختلف معنويا عن الصفر.

تطبيق (١١):

نفترض أن لدينا عينة مكونة من (١٢) مشاهدة، وكانت تقديراتنا لدالة العرض كالآتي:

Y = 33.75 + 3.25 X

S. E (8.28) (0.89)

يتم تطبيق اختبار (t) لكل من المعلمات المقدرة، كالآتي:

ولنبدأ بالمعلمة $\hat{\alpha}$، حيث إن:

$$t^* = \frac{\hat{\alpha}}{S_{\hat{\alpha}}} = \frac{33.75}{8.28} = 4.07$$

وإن اختبار $\hat{\beta}$ هو:

$$t^*_{\hat{B}} = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}} = \frac{3.25}{0.89} = 3.62$$

ولاختبار الفروض لكل من $\hat{\beta}$، $\hat{\alpha}$ كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} H0: \left(\hat{\alpha}\, and \beta\right) = 0 \\ H1: \left(\hat{\alpha}\, and \beta\right) \neq 0 \end{aligned}\right\}$$

يتضح لنا بأن كلا من تقدير المعلمة $\left(\hat{\beta}\right)$ و $\left(\hat{\alpha}\right)$ يختلف معنويا عن الصفر،وبمستوى معنوية مقداره ٥%، حيث إن ١٠ = ٢ - ١٢ = (dF) تكون قيمة (t) الجدولية تساوي ٢,٢٢٨، وطالما أن $t^* > t$ أي:

الجدولية t > المحسوبة t:

أي:

$$\left.\begin{array}{l} 4.07 > 2.228 \\ 3.62 > 2.228 \end{array}\right\}$$

فإن كلتيهما معنوية لوقوع $(t^*)$ المحسوبة في المنطقة الحرجة.

تطبيق (١٢):

قدر حدود الثقة (Confidence Intervals) لدالة الاستهلاك إذا علمت أن:

n = 5, Parameters = 2, dF = 3

$\hat{\beta}$ (MPC) = 1.45, t = 3.18 الجدولية

Level of Signitiance = 0.05

الجواب:

$$\because C.1 = \hat{\beta} \pm E/2.\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} = 1.45 \pm 3.18 S.E.$$

وحيث إن:

$$\because S.E = \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{X_i^2}}$$

وعليه فإن (C. 1) تساوي:

$$\because C.1 = 1.45 \pm 3.18.\sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}}$$

تطبيق (١٣):

من النموذج الخطي البسيط الآتي:

وأن:

$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$

وحيث إن (Ui) موزعة توزيعا طبيعيا وإن:

$$E(U_i) = 0$$

$$E(U_i)^2 = \sigma_u^2$$

$$E(U_iU_j) = 0, \text{ if } i \neq j$$

والمطلوب هو:

أ- اشتق (ζ - ١٠٠)% من حدود الثقة لقيمة (Yi) الوسطية والمرتبطة مع القيمة المعطاة للمتغير ($U_i$).

ب- نفترض أن عينة مقدارها (١٩) مشاهدة أخذت لهذا النموذج وقد تم الحصول منها على المقادير التالية:

$$\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 180, \sum(X - \bar{X})^2 = 240, \sum(Y - \bar{Y})^2$$
$$= 169, \sum X = 190, \sum Y = 380$$

قدر قيمة كل من (α) (β)، ومتوسط قيمة (X)، عندما تكون Xo = 16.

حـ- احسب ٩٥% حدود ثقة للوسط الحسابي المشروط والمذكور في (ب).

د- أوجد معامل الارتباط بين ($X_i$) و ($Y_i$)، ومعامل التحديد ($r^2$).

الجواب:

لنفترض أن المخمن $\hat{Y}_o$ يعرف أنه دالة خطية افتراضية لقيم ($Y_i$) أي:

$$\hat{Y}_o = \sum C_i Y_i \text{ ........................ (2)}$$

حيث ($C_i$) تمثل الوزن الذي يتم اختياره ليجعل المخمن يمتاز كونه (BLUE) افضل مخمن خطي غير متحيز، وعليه:

بما أن:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i \text{ .................. (1)}$$

وأن:

$$E(Y_o / X_o) = \alpha + \beta X_o$$

إذن بتعويض المعادلة (١) في (٢) نحصل على:

$$\hat{Y}_o = \alpha \sum C_i + \beta \sum C_i X_i + \sum C_i U_i$$

وبأخذ القيم $\left(\hat{Y}_o\right)$ المتوقعة نحصل على:

$$E(\hat{Y}_o / X_o) = \alpha \sum C_i + \beta \sum C_i X_i$$

وحيث إن:

$$E(U_i) = 0$$

وبقيمة قيم المعادلة المذكورة هي ثوابت (Constants).

إذن ستكون قيمة $\left(\hat{Y}_o\right)$ عبارة عن مخمن خطي غير متحيز للقيمة، $E(\hat{Y}_o / X_o)$ وفقط في حالة توفر الشرطين التاليين:

$$\sum C_i = 1, \sum C_i X_i = X_o$$

وتوضيح ذلك يأخذ النسق الآتي:

بما أن تباين $\left(\hat{Y}_o\right)$ يمكن الحصول عليه من الصيغة التالية:

$$Var\left(\hat{Y}_o\right) = E[(\hat{Y}_o - E(\hat{Y}_o / Y_o)]^2$$

وهذه تساوي (كما تم إثباته في هذا الفصل) القيمة المخمنة مطروحا منها وسطها الحسابي.

وبما أن:

$$Var\left(\hat{Y}_o\right) = E[\sum C_i U_i]^2$$

$$E(U_i)^2 = \sigma_u^2$$

إذن:

$$\therefore Var\left(\hat{Y}_o\right) = \sigma_u^2 \sum C_i^2 \quad \text{.................. (3)}$$

وسبق أن أوضحنا أيضا أن:

$$C_i = \frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)}{\sum x_i^2} x_i$$

إذن:

$$Var\left(\hat{Y}_o\right) = \sigma_u^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)}{\sum x_1^2} . x_i\right]^2$$

وعليه بفك الأقواس والضرب في ($\sum$) نحصل على:

$$\text{Var}\left(\hat{Y}_o\right) = \sigma_u^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - X\right)^2}{\sum x_i^2}\right] \quad ............ (4)$$

ويتضح لنا أن $\left(\hat{Y}_o\right)$ هو دالة خطية لكل مـن $\left(\hat{\alpha}\right)$ و $\left(\hat{\beta}\right)$ ولـه توزيـع طبيعـي مـزدوج (Bivariate)، بالإضافة لما ذكر أعلاه، حيث إن:

$$(n-2)\ \hat{\sigma}_u^2 / \sigma_u^2$$

وهي مستقلة عن توزيع مربع كاي ($\chi^2$)، مع (n - 2) من درجات الحرية فإن المقدار:

$$t = \frac{\hat{Y}_o - E\left(\hat{Y}_o / X_o\right)_\delta}{\sigma_u^2\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2}}} \quad ......................... (5)$$

أما حدود الثقة (ζ - ١٠٠%) لتوقع ($\hat{Y}_{o / X_o}$) فصيغته هي:

$$\left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_o\right) \pm t_{E/2}\ \hat{\sigma}_u \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\sum\left(X_o - \overline{X}\right)}{\sum x_i^2}} \quad .......... (6)$$

وبما أن: $\hat{Y}_o = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_o$

صيغة حدود الثقة هي:

$$\hat{Y}_o \pm t_{r/2}\sigma_u \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)^2}{\sum x_1^2}}$$

ب- لتقدير قيمة كل ($\alpha$)، ($\beta$)، نطبق الصيغة الآتية:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum\left(X - \overline{X}\right)\left(Y - \overline{Y}\right)}{\sum\left(X - \overline{X}\right)^2} = \frac{180}{240} = \frac{3}{4} = 0.75$$

أما قيمة $\left(\hat{\alpha}\right)$ فإنها تساوي:

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}$$

$$\because \overline{Y} = 20, \overline{X} = 10$$

$$\therefore \hat{\alpha} = 20 - 0.75\,(10)$$
$$= 12.5$$

إذن المعادلة التقديرية لانحدار $(Y_i)$ على $(X_i)$ هي:

$$\hat{Y} = 12.5 + 0.75\,X_i$$

ولإيجاد متوسط قيمة $(Y_o)$ عندما تكون قيمة $(X_o)$ تساوي ١٦ نتبع الأسلوب الآتي:

بما أن:

$$X_o = 16$$

بتعويضها في المعادلة أعلاه نحصل على:

$$\hat{Y}_o = 12.5 + 0.75\,(16)$$
$$\therefore \hat{Y}_o = 24.5$$

حـ- ولحساب ٩٥% حدود ثقة نحتاج إلى تطبيق الصيغة الآتية:

$$\hat{Y}_o \pm t_{E/2}\,\hat{\sigma}_u \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2}}$$

وهذه تعني أيضا:

$$\left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_o\right) \pm t_{E0.025}\,\hat{\sigma}_u \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2}}$$

بما أن:

$$\hat{Y}_o = 24.5,\ X_o = 16,\ X = 10,\ \sum x_i^2 = 240,\ n = 19$$

وأن قيمة $(t)$ لـدرجات حريـة مقـدارها (١٧) ومسـتوى معنويـة (٠,٠٢٥) تسـاوي ٢,١١٠ يبقى لدينا مجهول واحد هو $\left(\hat{\alpha}_u\right)$، وهذا يمكن الحصول على قيمته بتطبيق الصيغة التالية:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

وحيث:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \sum \hat{y}_i^2$$

وبالتعويض نحصل على:

$$= \sum (Y - \overline{Y})^2 - \hat{\beta}\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})$$

$$= \sum y_i^2 - \hat{\beta}\sum x_i y_i$$

$$= 169 - 0.75\ (180)$$

$$= 169 - 135$$

$$= 34$$

إذن:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{34}{19-2} = \frac{34}{17} = 2$$

$$\therefore \hat{\sigma}_u = \sqrt{2} \cong 1.4$$

وبهذا نكون قد أوجدنا جميع مجاهيل صيغة حدود الثقة، وعليه:

$$\therefore CI : Y_o \pm t_{r/2}\sigma_u\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(X_o - \overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2}}$$

بالتعويض نحصل على:

$$CI = 24.5 \pm (2.110)\ (1.4)\ \sqrt{\frac{1}{19} + \frac{(16-10)^2}{240}}$$

$$CI = 24.5 \pm 1.298$$

وهذا يعني أن حدود الثقة للقيمة الوسطية المتوقعة تقع بين ٢٣,٢٠٢ إلى ٢٥,٧٩٨.

د- لإيجاد معامل الارتباط بين $(X_i)$، $(Y_i)$ نطبق الصيغة التالية:

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\left(\sum x\right)^2\left(\sum y_i\right)^2}} = \frac{180}{(15.5)(13)} = \frac{180}{201.5} \cong 0.89$$

أما معامل التحديد بين متغيري النموذج فهو:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum e_i}{\sum y_{i82}} = 1 - \frac{34}{169} \cong 1 - 0.20 \cong 0.80$$

وأيضا يمكن الحصول على معامل التحديد من تربيع قيمة معامل الارتباط $(r)$ أي:

$$r^2 = (0.89)^2 \cong 0.80$$

(٢-٧-٥) تمارين:

١- من البيانات المذكورة أدناه عن كمية سقوط الأمطار بالتغيرات $(Y_i)$ ومحصول القمح $(X_i)$.

$Y_i$: 125, 80, 100, 140, 160, 135.

$X_i$: 44, 36, 40, 48, 60, 56.

أ- أوجد معامل الارتباط بين $(X_i), (Y_i)$.

ب- أوجد معامل انحدار $(Y)$ على $(X)$.

حـ- ناقش بالتفصيل الفرق بين معامل الانحدار ومعامل الارتباط؟ أيهما أدق في شرح هذه العلاقة؟

٢- لنفترض وجود القيم التالية عن متغيرات النموذج الخطي البسيط.

حيث إن:

$$\sum (Y - \overline{Y})(X - \overline{X}) = 20, \sum (Y - \overline{Y})^2 = 5, \sum (X - \overline{X})^2 = 150$$

$$\sum Y = 165, \sum X = 700, n = 50$$

أ- أوجد القيم التقديرية لكل من $(\alpha)$، $(\beta)$.

ب- أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين $(X_i), (Y_i)$.

٣- من النموذج الاقتصادي أدناه:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i, (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

حيث إن $(X)$ متغير غير عشوائي وهو السعر، وأن $(U1)$ موزعة توزيعا طبيعيا بوسط حسابي مساو للصفر وتباين ثابت وتباين مشترك مساوي للصفر وتمثل المتغيرات الأخرى غير السعر. اشتق صيغة التباين والتغاير لكل من $\left(\hat{\alpha}\right)$، $\left(\hat{\beta}\right)$.

٤- لو توفرت البيانات المذكورة أدناه عن النموذج أعلاه:

$$\sum (Y - \overline{Y})(X - \overline{X}) = -8480, \sum (Y - \overline{Y})^2 = 108$$

$$\sum (X - \overline{X})^2 = 1060, \sum Y = 120, \sum X = 1200$$

حيث تشير $(Y)$ إلى عدد الوحدات المشتراة، و $(X)$ تشير إلى سعر الوحدة المشتراة بالفلس خلال الأسبوع ومن (١٢) مخزن مختلف في مدينة معينة.

أ- أوجد المرونة السعرية للطلب عند السعر (١٠٠) فلس.

ب- اختبر معنوية $\left(\hat{\beta}\right)$ مع تكوين ٩٥% حدود ثقة لقيمة $(Y_o)$ الوسطية عندما تكون قيمة ١٠٠ = $\overline{X}$.

حـ- ما هو المقصود بالمرونة السعرية، عدد أنواع المرونات، ثم وضحها بيانيا، وما هي علاقة معامل المرونة بمعامل الانحدار في النموذج الخطي البسيط؟

٥- ماذا يقيس معامل الارتباط $(r)$؟ ما هو المدى الذي تقع فيه قيمته؟ ما هي العلاقة بين معامل الارتباط وتحليل الانحدار؟ اشتق الصيغ الآتية:

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}}, r^2 = \frac{SSR}{SST}$$

٦- من بيانات الجدول التالي:

Yi = 4, 3, 0, 4, 4, 4, 3, 0, 4, 3, 1, 3.

$X_i$ = 3, 3, 0, 2, 2, 3, 0, 3, 2, 1, 3, 2.

أثبت أن:

$$\hat{Y}_i = 0.22 + 1.14 X_i$$

$$t^* \ (0.39) \ (4.56)$$

$$r^2 = 0.68$$

أيضا أثبت أن $\left(\hat{\beta}\right)$ معنوية إحصائيا بمستوى معنوية قدره ١% و ٥% حيث $\left(\hat{\alpha}\right)$ لم تكن معنوية إحصائيا بنفس المستويين.

٧- ما هو المقصود بمعامل التحديد $(r^2)$؟ وضح كيفية اشتقاقه، وما هي علاقته بمعامل الارتباط البسيط $(r)$؟

٨- ما هو رأيك بالعبارات الآتية: برر إجابتك.

أ- إذا كان معامل انحدار $(Y)$ على $(X)$ يساوي الصفر، فإن معامل ارتباط $(Y)$ و $(X)$ يساوي الصفر أيضا.

ب- إذا كان معامل انحدار $(Y)$ على $(X)$ يساوي واحدا، فإن معامل ارتباط $(Y)$ و $(X)$ يساوي واحدا أيضا.

حـ- إذا كان $(r^2)$ يساوي صفرا، فإن هذا يعني أنه لا توجد أية علاقة بين المتغير

التفسيري والمتغير التابع.

د- قيمة معامل التحديد لا تختلف باختلاف خط الانحـدار، أي سـواء قـدرنا انحـدار (Y) على (X)، أو انحدار (X) على (Y).

هـ- معامل ارتباط (X) و (Y) يساوي حاصل ضرب معامل انحـدار (Y) عـلى (X) في معامـل انحدار (X) على (Y).

و- تحدد درجات الحرية بحجم العينة فقط.

٩- أوجد معدلات النمو الخاصة بالمتغيرات التالية في اقتصاد معين في الفترة ١٩٨٣-١٩٩٤م، حيث إن:

GDP = إجمالي الناتج المحلي ببلايين الريالات.

C = الاستهلاك الخاص ببلايين الريالات.

I = الاستثمار ببلايين الريالات.

G = الإنفاق الحكومي ببلايين الريالات.

| السنة | الناتج المحلي GDP | الاستهلاك C | الاستثمار I | الإنفاق الحكومي G |
|---|---|---|---|---|
| 1983 | 40 | 8 | 6 | 5 |
| 1984 | 100 | 10 | 8 | 10 |
| 1985 | 140 | 18 | 18 | 16 |
| 1986 | 170 | 24 | 34 | 30 |
| 1987 | 200 | 35 | 51 | 40 |
| 1988 | 230 | 55 | 67 | 47 |
| 1989 | 250 | 64 | 78 | 57 |
| 1990 | 3.90 | 102 | 97 | 78 |
| 1991 | 520 | 115 | 106 | 82 |
| 1992 | 530 | 127 | 122 | 130 |
| 1993 | 415 | 137 | 116 | 126 |
| 1994 | 370 | 145 | 110 | 120 |

وكذلك:

أ- اختبر دقة هذه التقديرات باستخدام مستوى معنوية قدره ٥%.

ب- أوجد العلاقة بين المتغير المستقل والمتغير التابع، كذلك أوجد معامل التحديد $r^2$.

جـ- كون جدول ANOVA ومنه أوجد اختبارF.

١٠- البيانات التالية تختص بكمية النقود ($X_i$) والدخل القومي ببلايين الدولارات في اقتصاد معين خلال الفترة ١٩٩٠-١٩٩٩ م.

| الدخل القومي | كمية النقود | السنة |
|---|---|---|
| ٥٥,٠ | ٧,٠ | ١٩٩٠ |
| ٥٥,٥ | ٧,٥ | ١٩٩١ |
| ٥٦,٠ | ٨,٠ | ١٩٩٢ |
| ٥٧,٠ | ٨,٥ | ١٩٩٣ |
| ٥٧,٠ | ٨,٣ | ١٩٩٤ |
| ٥٨,٩ | ٩,٠ | ١٩٩٥ |
| ٥٨,٣ | ٩,٣ | ١٩٩٦ |
| ٥٩,٠ | ٩,٥ | ١٩٩٧ |
| ٥٩,٧ | ١٠,١ | ١٩٩٨ |
| ٦٠,٠ | ١٠,١ | ١٩٩٩ |

أ- ارسم البيانات على شكل انتشار، ومن ثم أوجد انحدار الدخل القومي Y على كمية النقود X.

ب- ارسم خط الانحدار المقدر على شكل الانتشار، ماذا نستنتج من الشكل البياني.

جـ- كم تبلغ قيمة القاطع؟ وما ميل خط الانحدار؟ وماذا يقيس؟

د- لبلوغ هدف الدخل القومي ٦٥,٠ بليون دولار، كم يجب أن يكون مستوى كمية النقود؟

هـ- كون جدول ANOVA وأوجد الإحصاءات المتعلقة به ($F, r, r^2$).

١١- البيانات التالية تختص بمستويات الاستثمار (k) والمبيعات (S) بآلاف الدنانير من شركات خمس في فترة زمنية معينة:

K: 20, 50, 80, 30, 10

S: 60, 40, 150, 100, 10

أ- قدر الانحدار التالي:

$$K_i = \alpha + \beta S_i + u_i$$

ب- احسب بواقي الانحدار $e_i$ وأوجد فترة ثقة ٩٥% للمعلمة β.

جـ- كون جدول ANOVA ومنه أوجد r، $r^2$، F، وأثبت أن $F = t^2$ لمعلمة β.

١٢- من البيانات التالية عن متغيرين X, Y:

X: -2, 0, 1, 0, 1

Y: -2, -1, 0, 1, 2

وباستخدام النموذج:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

أ- تحصل على تقديرات المربعات الصغرى العادية للمعالم α، β.

$$X_i = \lambda + \gamma_{Yi} + v_i$$

وباستخدام النموذج المغاير:

ب- نحصل على تقديرات المربعات الصغرى العادية للمعالم λ، γ.

جـ- ما هي طبيعة العلاقة التي تربط بين خطي الانحدارين المقدرين المتحصل عليهما باستعمال النموذجين السابقين؟

١٣- من البيانات المذكورة أدناه:

$Y_i$: 75, 30, 50, 90, 100, 80

$X_i$: 14, 6, 10, 18, 30, 20

أ- أوجد معامل التحديد والارتباط بين $Y_i$، $X_i$.

ب- أوجد معامل انحدار $(Y_i)$ على $(X_i)$.

حـ- استخدم اختبار t بمستوى معنوية مقدارها ٩٥%، احسب درجة الثقة لمعلمات $\hat{\beta}$.

١٤- كون جدول تحليل التباين ANOVA.

١٥- لو توفرت البيانات المذكورة أدناه عن النموذج $Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i$ حيث إن (x) متغير غير عشوائي، وإن $(U_i)$ موزعة توزيعا طبيعيا بوسط حسابي مساو للصفر وتباين ثابت مشترك مساو للصفر.

$$\sum (Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X}) = -8480, \sum (Y_i - \overline{Y})^2 = 180$$

$$\sum (X_i - \overline{X})^2 = 1060, \sum Y_i = 120, \sum X = 1200$$

حيث تشير ($Y_i$) إلى عدد الوحدات المشتراة، و (X) تشير إلى سعر الوحدة المشتراة بالقرض خلال الأسبوع, ومن (١٢) مخزنا مختلفا.

أ- أوجد المرونة السعرية للطب عند السعر ١٠٠ قرش.

ب- اختبر معنوية $\hat{\beta}$ مع تكوين ٩٥% حدود ثقة لقيمة (Y) الوسطية عندما تكون ١٠٠ = $\overline{X}$ .

جـ- أوجد معامل التحديد ومعامل الارتباط.

١٦- من بيانات الجدول التالي:

$Y_i$: 4, 3, 0, 4, 4, 4, 3, 0, 4, 3, 1, 3

$X_i$:3, 3, 0, 2, 2, 3, 0, 3, 2, 1, 3, 2

أثبت أن:

$$\hat{Y} = 0.22 + 1.14 X_i + u_i$$

$$\hat{t} : (0.39)\ (4.56)$$

$$r^2 = 0.68$$

أيضا أثبت أن $\hat{\beta}$ معنوية إحصائيا بمستوى ٥% في حين $\hat{\alpha}$ لم تكن معنوية إحصائيا بنفس المستوى من المعنوية، كون جدول ANOVA.

١٧- فيما يلي بيانات بالمساحة المزروعة بنجر وسعر الطن منه في ١١ منطقة من مناطق قطر معين.

المساحة (بالمائة فدان): ٥٠، ٥٥، ٥٠، ٥٥، ٥٧، ٤٩، ٥٢، ٥٤، ٥٦، ٥٣، ٥٢.

السعر (بالدينار للطن): ١٠، ٨، ١٠، ١٢، ١٠، ٦، ١٠، ١٠، ٩، ٧، ٧.

أ- احسب مرونة العرض (معبرا عن العرض بالمساحة المزروعة) بالنسبة للسعر بفرض أن العلاقة خطية.

ب- قدر علاقة انحدار السعر على المساحة، ناقش النتيجة اقتصاديا.

حـ- أوجد معامل التحديد، علق على قيمته.

د- اختبر ما إذا كان معامل انحدار المساحة على السعر المحسوب في (أ) أعلاه مختلفا عن الصفر عند مستوى المعنوية ٥%.

هـ- هل من المعقول افتراض أن معامل انحدار المساحة على السعر يساوي ٠,٧ مقابل الفرض البديل القائل بأن هذا المعامل أقل من ٠,٧ عند مستوى المعنوية ١ %.

و- تنبأ بالمساحة عندما يكون السعر (٢٠) دينارا للطن، هل تعتقد أنه يمكن الوثوق كثيرا بصحة مثل هذا التنبؤ؟ ولماذا؟

١٨- قدرت العلاقة بين الدخل (Y) والثروة (W) من عينة مكونة من (١٥) أسرة فوجد أن هذه العلاقة هي:

$$\hat{Y}_i = 36.9 + 0.437\, W_i$$

$$S.\ E{:}\ (4.98)\quad (0.117)$$

حيث تمثل القيم الموضوعة داخل الأقواس الأخطاء المعيارية للمعلمات، بفرض أن العنصر العشوائي لهذه العلاقة موزع توزيعا طبيعيا.

أ- أوجد ثقة ٩٥% لمعامل تزايد الدخل بالنسبة للثروة $\left(\frac{dy}{dw}\right)$.

ب- اختبر الفرض القائل بأن $\left(\hat{\alpha}\right)$ يساوي (٥٠) وحدة، مقابل الفرض البديل أن $\left(\hat{\alpha}\right)$ أقل من (٥٠) عند مستوى المعنوية ١%.

# الفصل السادس

# تقدير معلمات النموذج الخطي العام (المتعدد المتغيرات)

General Linear Model

**(٦-١) طبيعة النموذج الخطي العام.**

**(٦-٢) فرضيات النموذج الخطي العام.**

**(٦-٢-١) فرضية النموذج.**

**(٦-٢-٢) فرضيات التقدير.**

**(٦-٣) تقدير النموذج الخطي العام باستخدام مقدر المربعات الصغرى.**

**(٦-٤) الوسط الحسابي والتباين لمقدرات معلمات النموذج الخطي العام.**

**(٦-٤-١) الوسط الحسابي للمقدرات.**

**(٦-٤-٢) تحليل التباين والتباين المشترك.**

**(٦-٥) نتائج أساسية.**

**(٦-٦) معامل التحديد ($R^2$).**

**(٦-٧) تطبيقات وتمارين.**

# الفصل السادس

## تقدير معلمات النموذج الخطي العام (المتعدد المتغيرات)

General Linear Model

ويطلق عليه تسـمية الانحـدار المتعـدد Multiple Regression، أو النمـوذج الخطـي المتعـدد (Multiple Linear Model) في حين أطلق عليه البروفسور جونستن تسمية (النموذج الخطي لأكثر مـن متغيرين)[*]، حيث يقتصر اسـتخدام النمـوذج الخطـي البسـيط للعلاقـة بـين متغـيرين أحـدهما مستقل ($x_i$)، والآخر تابع ($y_i$)، إلا أنـه في مجـال علـم الاقتصـاد خاصـة، نجـد أن الأمـر يتطلـب في معظم الأحيان النظر إلى العلاقة بين أكثر من متغيرين، ولذا فإن النموذج الخطي العـام (G. L. M) هو امتداد (للنموذج الخطي البسيط)، وهذا يتطلب استخدام فرضيات جديدة، وطريقة تقـدير أكثر تطورا من الطريقة السابقة، وهذا ما سنوضحه في هذا الفصل.

(٦-١) طبيعة النموذج الخطي العام:

لتبسيط عرض النموذج الخطي العام، نفترض أن الاستهلاك ($Y_i$) هـو دالـة لـدخل العائلـة ($X_{2i}$)، ولعدد أفرادها ($X_{3i}$) ولذا فـإن كميـة الاسـتهلاك للعائلـة (i) تعتمـد عـلى هـذين المتغـيرين، وبأخذ عينة معينة فإن العلاقة يمكن توضيحها كما يلي:

| $X_{3i}$ | $X_{2i}$ | $Y_i$ |
|---|---|---|
| $X_{31}$ | $X_{21}$ | $Y_1$ |
| $X_{32}$ | $X_{22}$ | $Y_2$ |
| $X_{33}$ | $X_{23}$ | $Y_3$ |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| $X_{3n}$ | $X_{2n}$ | $Y_n$ |

حيث (i) تمثل رقم المشاهدة ($i = 1, 2, \ldots, n$).

وبما أن الصيغة العامة تنص على وجود (K) من المتغيرات في هـذا المثـال وعـددها اثنـان، فإن هذا يتطلب صياغة مجموعة من الفرضيات يمكن تلخيصها فيما يلي:

---

[*] قبل الدخول في هذا الفصل والفصول القادمة يفضل مراجعة الملحق (B) الخاص بالمصفوفات، وكـذلك مراجعة بعض كتب الرياضيات في موضوع المصفوفات، لاحظ قائمة المصادر.

(٦-٢) فرضيات النموذج الخطي العام:

تتضمن الفرضيات نوعين هما:

فرضية النموذج (Assumptions of The Model) العامة وفرضيات التقدير (Assumptions of Estimation) الفنية، وسنناقش هذه الفرضيات كما يلي:

(٦-٢-١) فرضية النموذج العامة:

نفترض وجود علاقة خطية بين المتغير التابع $(Y_i)$ و $(K - 1)$ من المتغيرات المستقلة (التوضيحية Explanatory Variables) والتي تتمثل في $(X_2, X_3, X_4, \ldots, X_k)$، وكذلك وجود الخطأ العشوائي (حد الاضطراب Disturbance or Error Term; $U_i$) ولذا فإنه بموجب هذه الفرضية يمكن كتابة الصيغة أعلاه كالآتي:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + U_i \ldots (1)$$

حيث: $(i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n)$.

وبما أن المعلمات $(\beta_s)$ والخطأ العشوائي $(U_i)$ في النموذج الخطي (١) غير معلومة، فالهدف هو إذن الحصول على قيم تقديرية (Estimated Values) لهذه المجاهيل، وهذا ما سيتضمنه هذا الفصل، والفصل السابع معا.

ويمكن اختصار صيغة النموذج (١) جبريا كما يلي:

$$Y_i = \sum_{j=k}^{k} \beta_j X_{ji} + U_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث إن $(j)$ تشير إلى عدد المتغيرات المستقلة وهي: $(J = 1, 2, 3, 4, \ldots, k)$ وإن $(i)$ تشير إلى عدد المشاهدات المدروسة وهي $(i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n)$، وإن سبب كون عدد المتغيرات المستقلة يساوي $(K - 1)$ هو افتراضنا بأن قيمة $(X_{1i})$ مساوية إلى الواحد، أي أن $(X_{1i} = 1)$ بالنسبة لجميع المشاهدات $(i)$ وأن الصيغة (١) هي الأخرى تتضمن مجموعة من المعادلات عددها $(n)$ كما هي مدرجة أدناه:

$$Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_٣ X_{٣1} + \beta_٤ X_{41} + \ldots + \beta_k X_{k1} + U_1$$

$$Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_٣ X_{٣2} + \beta_٤ X_{42} + \ldots + \beta_k X_{k2} + U_2$$

$$\begin{matrix} . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_٣ X_{٣n} + \beta_٤ X_{4n} + \ldots + \beta_k X_{kn} + U_n$$

وبوضع هذه المعادلات جدوليا يمكن معالجتها قياسيا باستخدام المصفوفات*، ويتم ذلك كما هو مبين أدناه:

| $Y_i$ | 1 | $X_{2i}$ | $X_{3i}$ | $X_{4i}$ | … | $XK_i$ | $U_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 1 | $X_{21}$ | $X_{31}$ | $X_{41}$ | … | $XK_1$ | $U_1$ |
| $Y_2$ | 1 | $X_{22}$ | $X_{32}$ | $X_{42}$ | … | $XK_2$ | $U_2$ |
| $Y_3$ | 1 | $X_{23}$ | $X_{33}$ | $X_{43}$ | … | $XK_3$ | $U_3$ |
| . | . | . | .. | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . |
| $Y_n$ | 1 | $X_{2n}$ | $X_{3n}$ | $X_{4n}$ | … | $XK_n$ | $U_n$ |

وباستخدام المصفوفات يمكن إعادة كتابة المعادلات المذكورة أعلاه بصيغة مختصرة كما يلي:

$Y = X B + U$ ..................... [ 3 ]

ومن منظومة المعادلة* [ ٣ ] فإن:

(Y) تشير إلى متجه (vector) عمودي ذي أبعاد (n. 1) أي n من الصفوف وعمود واحد.

(X) تشير إلى مصفوفة (matrix) ذات أبعاد (n. k) أي n من الصفوف و k من الأعمدة.

(B) تشير إلى متجه عمودي ذي أبعاد (K. 1).

(U) تشير إلى متجه عمودي ذي أبعاد (n . 1).

وعليه فإن المنظومة المعادلة [ ٣ ] يمكن كتابتها بالشكل التالي:

---

* اعتبارا من هذا الفصل والفصول القادمة سيكون استخدامنا للمصفوفات الأساس في اشتقاق صيغة المعالجة القياسية للنماذج الاقتصادية المتكونة لأكثر من متغيرين مستقلين، وعليه فإن الطالب ملزم بالتفرقة بين التطبيق الجبري وجبر المصفوفات راجع الملحق (B).

* اعتبارا من هذا الفصل ستكون المعادلات في صورة مصفوفات مميزة بأقواس [ ] ، أما المعادلات التي لا تأخذ شكل مصفوفات فتأخذ أقواسا ( ) عادية.

$$Y=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\.\\.\\.\\.\\Y_n\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}1 & X_{21} & ... & X_{k1}\\1 & X_{22} & ... & X_{k2}\\. & . & . & .\\. & . & . & .\\. & . & . & .\\. & . & . & .\\1 & X_{2n} & ... & X_{kn}\end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\.\\.\\.\\.\\\beta_k\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\.\\.\\.\\.\\U_n\end{bmatrix}$$

$$(n.1)\qquad(n.k)\qquad(k1)\qquad(n.1)$$

ولتوضيح منظومة المعادلة [ ٣ ] وأبعادها فإنها تأخذ النسق الآتي:

وبما أن:

$$Y = X\ \beta + U$$

إذن:

$$(n.1) = (n.k)\ (k.1) + (n.1)$$

(n.1)

وعليه فإن:

$$(n.1) = (n.1)$$

ولإثبات كون أبعاد المتجه [ Y ] هي نفس أبعاد المصفوفة [ X β ]، تجري عملية ضرب المصفوفات وجمعها كما هو مبين أدناه:

$$\begin{matrix}X.\beta\\(n.k)(k.1)\\(n.1)\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & X_{21} & X_{31} & ... & X_{K1}\\1 & X_{22} & X_{32} & ... & X_{k2}\\1 & X_{23} & X_{33} & ... & X_{k3}\\. & . & . & . & .\\. & . & . & . & .\\. & . & . & . & .\\.1 & X_{2n} & X_{3n} & ... & X_{kn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\.\ \ .\\.\ \ .\\.\ \ .\\\beta_k\end{bmatrix}$$

$$(n.k)\qquad(k.1)$$

(n.1)

وبضرب عناصر الصفوف في عناصر العمود [ β ] نحصل على مصفوفة [ x β ] ذات أبعاد (n. 1) كما مبين أدناه:

$$\underset{(n.1)}{X\beta} = \begin{bmatrix} (\beta_1 & +\beta_2 X_{21} & +\beta_3 X_{31} & +...\beta_k X_{k1}) \\ (\beta_1 & +\beta_2 X_{22} & +\beta_3 X_{32} & +...\beta_k X_{k2}) \\ (\beta_1 & +\beta_2 X_{23} & +\beta_3 X_{33} & +...\beta_k X_{k3}) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ (\beta_1 & +\beta_2 X_{2n} & +\beta_3 X_{3n} & +...\beta_k X_{kn}) \end{bmatrix}$$

وعليه وبإضافة [ U ] نحصل على نفس أبعاد المتغير التابع [ Y ]، كما هو موضح أدناه:

بما أن:

$$Y = X\beta + U$$

إذن:

$$\underset{(n.1)}{\therefore Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\beta_1 & +\beta_2 X_{21} & +\beta_3 X_{31} & +... & \beta_k X_{k1}) \\ (\beta_1 & +\beta_2 X_{22} & +\beta_3 X_{32} & +... & \beta_k X_{k2}) \\ (\beta_1 & +\beta_2 X_{23} & +\beta_3 X_{33} & +... & \beta_k X_{k3}) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ (\beta_1 & +\beta_2 X_{2n} & +\beta_3 X_{3n} & +... & \beta_k X_{kn}) \end{bmatrix}}_{(n.1)} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ . \\ . \\ . \\ U_n \\ (n.1) \end{bmatrix}$$

(n. 1)

وعليه نحصل على ما يلي:

$$\begin{array}{llllllll} Y_1 & = \beta_1 & +\beta_2 X_{21} & +\beta_3 X_{31} & +... & +\beta_k X_{k1} & +U_1 \\ Y_1 & = \beta_1 & +\beta_2 X_{22} & +\beta_3 X_{32} & +... & +\beta_k X_{k2} & +U_2 \\ Y_1 & = \beta_1 & +\beta_2 X_{23} & +\beta_3 X_{33} & +... & +\beta_k X_{k3} & +U_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ Y_n & = \beta_1 & +\beta_2 X_{2n} & +\beta_3 X_{3n} & +... & +\beta_k X_{kn} & +U_n \end{array}$$

وهذه تمثل نفس صيغ المعادلات الجبرية (١)، (٢) المذكورة أعلاه:

وعليه يلاحظ بأنه بعـد تحديـد الفرضـية الأولى يتضـح لنـا بـأن مصـفوفة [ X ] لمنظومـة المعادلة [ ٢ ] تمثل محولتها صيغة المصفوفة الاعتيادية، أي أن مـؤشرات كـل عنصرـ مـن عنـاصر المصفوفة (aij) يشير (i) إلى الصف و (j) إلى العمود فمثلا $X_{12}$ يمثل الصف الأول (١) (First Row) وأن (٢) تمثل العمود الثاني (Second Column)، وللتوضيح نأخذ المصفوفة الاعتيادية التالية:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{bmatrix}$$

تمثل المصفوفة [ X ] النسق الاعتيادي في كتابة المصفوفات، ولكن عند افتراضـنا، بـأن ($X_{1i}$) تساوي واحدا، فإن شكل المصفوفة [ X ] وحسب فرضيتنا أعلاه تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} & X_{41} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & X_{42} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{43} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} & X_{44} \end{bmatrix}$$

أي بموجب فرضية النموذج المتعدد المتغيرات، فإن مصفوفة [ X ] الاعتيادية تمثل محولتها وهي [ X′ ]، أي أن ($X = X'$).

(٢-٢-٦) فرضيات التقدير:

لتقدير معلمات النموذج الخطي العام ($\beta$,s) لابـد مـن أخـذ الفرضـيات الأساسـية الفنيـة المتعلقة بمشاهدات النموذج والتي تتمثل فيما يلي:

2.1 $E(U) = 0$

2.2 $E(UU') = \sigma_u^2 . In$
- Constant Variance ثبات التباين
- Zero Covariance صفر التغاير

2.3 X is a fixed set of numbers in repeting sample

2.4 X has a rank of $K < n$

تشير الفرضية الأولى إلى أنه طالما $(U_i)$ موزعة توزيعا طبيعيا، فإن المتغيرات العشوائية $(U_i)$ تكون أوساطها الحسابية، أو قيمها المتوقعة تساوي صفرا، وهذا يعني أن تأثير الأحداث الطارئة، وتأثيرات المتغيرات التي لا يمكن قياسها يكون بعضها بقيم موجبة، والبعض الآخر بقيم سالبة وصفر في بعض الأحيان، بحيث تلغي القيم الموجبة القيم السالبة، وهذا يعني أن الوسط الحسابي للتوزيع الذي تم سحب حد الاضطراب منه $(U_i)$ مساو للصفر، وبصيغة فنية تكون القيمة المتوقعة (Expected Value) لحد الاضطراب مساوية للصفر أو [ $E(U_i) = 0$ ].

والفرضية الثانية تشير إلى ملخص فرضيتين الأولى ثبات التباين والثانية أن قيمة التباين المشترك (التغاير) مساوية للصفر أي [Constant Variance and Zero Covariance ]، ويعني هذا أن جميع الاضطرابات (Ui) التي تخص نموذج الانحدار العام للمجتمع تمتلك نفس التباين، أي أنها ذات تجانس متساو (Homo Scedasticity)*، أو انتشار متساو، وعليه فإن تباين جميع الاضطرابات يساوي مقدار عددي ثابت، وليكن $(\sigma^2_u)$، ولهذا يرمز إلى هذا الافتراض كالآتي:

$$E(U\,U') = \sigma_u^2 \,.\, I_n$$

أي أن ( $\sigma_u^2$ ) عبارة عن عدد ثابت مضروبا في الواحد، فنحصل على نفس التباين الثابت ولأن $(I_n)$ تحتوي على عناصر قطرية مساوية للواحد، هي التي تشكل ثبات التباين بعد عملية الضرب.

وحيث إن: (U) متجه عمودي (Column Vector)، وبأبعاد (n. 1).

$(U')$ (Row Vector)، وبأبعاد (1.n).

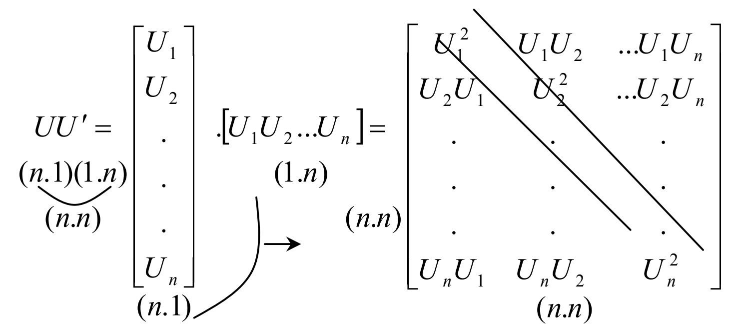
فإن الفرضية (٢,٢) مصفوفة ذات أبعاد (n. n) أي أن:

$(U\,U')$ مصفوفة لها (n) صفا، و (n) عمودا.

وهي مصفوفة متماثلة (Symmetric Matrix)، يمكن استخراجها بإجراء عملية الضرب كالآتي:

---

* يتكون مصطلح التجانس Homoscedssticity من مقطعين هما (Homo) وتعني التجانس و(Scedasticity) التي تعني الانتشار أو التباعد، ومن دمج المقطعين نحصل على تساوي الانتشار أو إثبات التباعد، ويفضل تسميته بالتجانس أو ثبات الانتشار، وعكس التجانس هو عدم التجانس ويطلق عليه Heteroscedastisity.



وبأخذ التوقعات لكل عنصر من عناصر المصفوفة نحصل على:

$$E(UU') = \begin{bmatrix} E(U_1^2) & E(U_1U_2) & ...E(U_1U_n) \\ E(U_2U_1) & E(U_2^2) & ...E(U_2U_n) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ E(U_nU_1) & E(U_nU_2) & ...E(U_n^2) \end{bmatrix}$$

وتسمى هذه المصفوفة بمصفوفة التباين والتباين المشترك (Variance Covariance Matrix)، حيث العناصر القطرية (Elements of Mian Diagonal) هي التباينات لحدود الاضطراب، والعناصر الأخرى خارج هذا القطر هي التباينات المشتركة (التغاير)، وتشير:

$$E(U_i^2) = \sigma_u^2$$

وهذه الصفة تسمى ظاهرة التجانس (Homosecdasticity)، وأما العناصر التي لا تقع على القطر $(U_i\ U_j)$ فهي قيم غير مرتبطة (Non – Correlated)، وهذا يعني عدم وجود ارتباط ذاتي - (راجع الفصل الحادي عشر).

وبما أن:

$$E(U_i^2) = \sigma^2$$

و:

$$E(U_i\ U_j) = 0 \quad i \neq j$$

إذن:

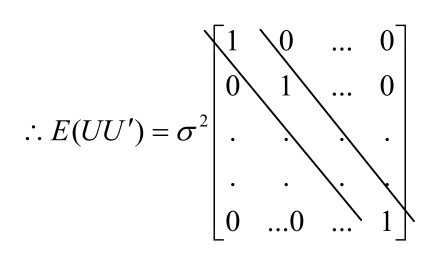
$$\therefore E(UU') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} \Big\} \quad \begin{matrix} Zero\ Covariance \\ (Non - Crrelated\ Elements \end{matrix}$$

ثبات التباين Constant Variance أي:

ثبات التجانس (Homoscedasticity).

وبما أن:

$$E\ (UU') = \sigma^2 I_n$$



وعليه إذن:

$$E\ (UU') = \sigma^2 .\ I$$

$$E\ (uu') = \sigma^2 I$$

وهذه الصيغة سوف تستخدم في حالة تجانس التباين وانعدام الارتباط المتسلسل (الذاتي) (Non – Sorial Correlation) أو (Non – Autcorrelation).

والتحليل أعلاه لحالة التباين والتباين المشترك مشابه لنفس تحليل المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) السابق الذكر، ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

بما أن:

$$Var\ (U) = E\ [\ \{\ U_i - E\ (U_i)\ \}]^2$$

أو:

$$\sigma_u^2 = E\ [\ \{\ U_i - E\ (U_i)\ \}]^2$$

وهذا التربيع يعني أيضا أن:

$$\sigma_u^2 = E\ [\ \{\ U_i - E\ (U_i)\ \}\ .\ \{\ U_i - E\ (U_i)\ \}]^2$$

أي القيمة مطروحا منها وسطها الحسابي وحيث إن:

من الافتراض (٢,١):

$$E\ (U_i) = 0$$

ولذا:

$$\sigma_u^2 = E(U_i - 0)^2$$

إذن:

$$\sigma_{u_\beta}^2 = E(U_i)^2$$

وهـذه تمثـل حالـة التجـانس Homoscedasticity وبـنفس الأسـلوب، ومـن تعريـف التبـاين المشترك نحصل على:

$$\because \ Cov(U_i U_j) = E[\{U_i - E(U_i)\}\{U_j - E(U_j)\}]$$

$$\because \ E(u_i) = 0$$

$$\therefore Cov(U_i U_j) = E(U_i U_j)$$

وهـذا الافـتراض الأخـير يقتضيـ عـدم وجـود ارتبـاط ذاتي (Non – autcorrelation) (في حالـة استخدام بيانات المقاطع العرضية (Cross – Section Data)، أو بيانات السلاسـل الزمنيـة (Time Serise) بين الاضطرابات ($U_i$) الداخلة في دالة الانحدار المتعدد، وبعبارة أخـرى يفـترض النمـوذج الأسـاسي بأن حد الاضطراب المصاحب لأية مشاهدة لا يتأثر بحد اضطراب مصاحب لأية مشاهدة أخرى.

أما بخصوص الفرضية المتعلقة بمصفوفة [ X ] فتعنـي أن عـدد المشـاهدات يتجـاوز عـدد معاملات النموذج ($\beta$, s)كذلك لا توجد علاقة خطية بين متغيرات المصفوفة [ X ] وهذا يعني عدم وجود ارتباط خطي متعدد (No – Multicollinearity) أو تام بين المتغـيرات المسـتقلة نفسـها (Perfect Multi Collinearity)، ومن الملائم التأكيد على أن ($X_{1i}$) تساوي قيمتها دائما واحدا، وتمثل في المصفوفة العمود الأول، وعليه فإن رتبة المصفوفة [ X ] ستكون أقل من (K)، وذلك لضمان إيجـاد معكـوس المصفوفة [X′ X]، حيث لا يمكـن إيجـاد معكوسـها إلا إذا كانـت تتمتـع برتبـة كاملـة (Full Rank)، ولتوضيح هذه الفكرة نفترض وجود متغـير مسـتقل واحـد مـرتبط بمتغـير أو بمتغـيرات مسـتقلة أخرى (أو إذا كان أحد المتغيرات المستقلة دالة للمتغـيرات المسـتقلة الأخـرى)، فـإن رتبـة (Rank) المصفوفة [ X ] ستكون أقـل مـن (K) حيـث أن [X′ X ] هـي مصـفوفة متماثلـة (Symmetric Matrix) برتبة (K)، وأن المصفوفة $(X'X)^{-1}$ ستلعب دورا أساسيا في طريقة تقدير معلمات النمـوذج الخطـي العام كما سنلاحظ ذلك في هذا الفصل والفصول الأخرى اللاحقة.

(٣-٦) تقدير معلمات النموذج الخطي العام باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

من ملاحظة منظومة المعادلة (١) وبوجود الفرضيات (١) و (٢)، وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى لتقدير المعلمات $\left(\hat{\beta}_s\right)$ في النموذج الخطي العام فإننا نشير إلى $\hat{\beta}$ بما يلي:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}_{(k.\ 1)}$$

وهو متجه عمودي لتقدير $\left(\hat{\beta}\right)$ وبأبعاد (K. 1)، لذا فإن المعادلة (١) سوف تكتب بالصيغة التالية:

$\because\ Y = X\beta + u$

$\therefore\ Y = X\hat{\beta} + e$

حيث (e) هو المتجه العمودي (البواقي) Residuals والتي عددها (n) ويشمل القيم المقدرة للمتجه $[U_i]$.

وتمثل [ e ] متجه عمودي بأبعاد (n. 1) وكما يلي:

$$e = Y - X\hat{\beta} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

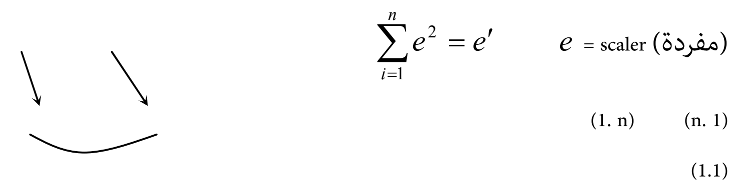
وللحصول على أفضل خط تقديري مستقيم نحتاج إلى تصغير مجموع مربع الانحرافات (SSE) (Sum of Squares of Residuals)، ويتم ذلك باتباع الخطوات التالية:

بما أن:

$$\sum e_i^2 = e' e$$

وحسب قوانين المصفوفات، فإن المتجه العمـودي مضروبا في مبدلتـه (Transpose) مسـبقا يساوي مجموع مربع عناصره، وعليه فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} e^2 = e' \qquad e = \text{scaler}$$ (مفردة)



(1. n)  (n. 1)

(1.1)

وهي قيمة مفردة (Scaler) ويمكن توضيحها كالآتي:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e = \underset{(1.n)}{[e_1 e_2 \ldots e_n]} . \underset{(n.1)}{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix}} = \underset{(1.1)}{[e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2]} = \text{مفردة}$$

وأن القيمـة (المفـردة) $\sum e_i^2$ تختلـف عـن $(U\ U')$ والتـي أبعادهـا (n. n) وهـي مصـفوفة متماثلة (Symmetric Matrix)، ويمكن توضيح ذلك بالمصفوفات كما يلي:

بما أن:

$$\therefore\ e = Y - X\hat{\beta}$$

إذن:

$$\therefore\ e' e = (Y - X\hat{\beta})' . (Y - X\hat{\beta})$$

وهي أيضا تساوي:

$$e' e = (Y' - X'\hat{\beta}') . (Y - X\hat{\beta})$$

وبإجراء عملية الضرب نحصل:

$$e' e = Y' Y - 2 Y' X \hat{\beta} + \hat{\beta}' X' X \hat{\beta} \ \ldots\ldots [4]$$

وأن رتب مصفوفة منظومة المعادلة [ ٤ ] هي:

$$\underbrace{(1.n)(n.1)}_{}=\underbrace{(1.n)(n.1)}_{(1.1)}\underbrace{(1.n)(n.k)}_{(1.1)}(k.1)\underbrace{(1.k)(k.n)}_{(1.K)(k..1)}\underbrace{(n.k)(k.1)}_{(1.n)}\quad (n.1)$$

(1. 1) (1. 1)

وأيضا من منظومة المعادلة [٤] نجد أن المصفوفة $\left(\hat{\beta}X'Y\right)$ مساوية لمبدلتها $\left(Y'X\hat{\beta}\right)$،

وللحصول على قيمة $\left(\hat{\beta}\right)$ التي تقلل البواقي يتم إجراء عملية التفاضل الجزئي للمعادلة [ ٤ ] بالنسبة إلى $\left(\hat{\beta}\right)$، ولتبسيط عملية التفاضل، نأخذ تفاضل حدود المعادلة [ ٤ ] منفصلة وبالشكل التالي:

$$\frac{\delta(e'e)}{\delta\hat{\beta}}=\frac{\delta\left(Y'Y-2\hat{\beta}X'Y+\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}\right)}{\delta\hat{\beta}}$$

ويفضل أن يتم التفاضل حدا بحد كما يلي:

فبأخذ تفاضل الحد الأول والذي هو (Y′ Y) فإنه يتضمن ما يلي:

$$Y' \quad Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$$

(1. n) (n. 1)

وهذا يعني أنه المتجه [ Y′ ] مضروبا في [ Y ] يساوي قيمة مفردها مقدارها $\sum Y_i^2$ وأن تفاضلها يكون مساويا للصفر أي:

$$\frac{\delta Y'Y}{\delta\hat{\beta}}=0$$

أما تفاضل الحد الثاني والذي وهو قيمة مفردة أيضا كما يتضح ذلك أدناه:

$$(-2\ \hat{\beta}'\ X'\ Y)$$

(1. K) (K. n) (n. 1)

$$\underbrace{(1.n)(n.1)}_{(1.1)}$$

فيتم كما يلي:

$$\because -2\hat{\beta}' X'Y = -2\left[\hat{\beta}_1\ \hat{\beta}_2 \ldots \hat{\beta}_k\right] . \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & \ldots & X_{3n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ X_{k1} & X_{k2} & \ldots & X_{kn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix}$$

وبضرب $X'\ Y$ نحصل على:

$$= -2\left[\hat{\beta}_1\ \hat{\beta}_2 \ldots \hat{\beta}_k\right] . \begin{bmatrix} Y_1 & +Y_2 & +\ldots & +Y_n \\ (X_2 Y_1 & +X_{22} Y_2 & .+.. & +X_{2n} Y_n) \\ \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ (X_{k1} Y_1 & +X_{k2} Y_2 & +\ldots & +X_{kn} Y_n) \end{bmatrix}$$

(1. K) (K. 1)

وبضرب الناتج في المتجه $\hat{\beta}'$ 2 - نحصل على قيمة مفردها وتتمثل فيما يلي:

$$\therefore\ \hat{\beta}' X' Y = -2\,[\,\hat{\beta}_1 (Y_1 + Y_2 + \ldots Y_n) + \hat{\beta}_2 (X_2 Y_1 + X_{22} Y_2 +$$

$$+ \ldots + \hat{\beta}_k (X_{k1} Y_1 + X_{k2} Y_2 + \ldots + X_{kn} Y_n)\,]$$

وبأخذ التفاضل الجزئي لهذا المقدار مع كل من $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k$ نحصل على:

$$\frac{\delta(-2\hat{\beta}' X'Y)}{\delta \hat{\beta}_1} = -2\,(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n).\ X'$$

$$\frac{\delta(-2\beta' X'Y)}{\delta \hat{\beta}_2} = -2\,(X_{21} Y_1 + X_{22} Y_2 + \ldots + X_{2n} Y_n)\ X_{2n} Y_n$$

$$\frac{\delta(-2\hat{\beta}' X'Y)}{\delta \hat{\beta} K} = -2 (X_{k1} Y_1 + X_{k2} Y_2 + \ldots + X_{kn} Y_n) X_{kn} Y_n$$

ومن نتيجة التفاضل للحد الثاني وهي (٢-) مضروبة في عنـاصر المتجـه العمـودي [X′ Y] وباختصار فإن:

$$\frac{\delta(-2\hat{\beta}' X'Y)}{\delta \hat{\beta}} = -2 X' Y$$

(K. n) (n. 1)

ورتبة هذا المقدار هي: (K. 1)

وباتباع نفـس خطـوات التحليـل السـابق نجـد أن تفاضـل الحـد الثالـث ($\hat{\beta}' X' X \hat{\beta}$) بالنسبة إلى $\left(\hat{\beta}\right)$ سيكون كما يلي:

$$\frac{\delta(\hat{\beta}' X'X \hat{\beta})}{\delta \hat{\beta}} = 2 X' X \hat{\beta}$$

ومن نتائج التفاضل الجزئي لحدود معادلة [ ٤ ] نحصل على:

$$\frac{\delta e' e}{\delta \hat{\beta}} = - 2 X' Y + 2 X' X \hat{\beta}$$

وبمساواة مصفوفة منظومة المعادلة بالصفر، والقسمة على (٢) نحصل على:

$$2 X' X \hat{\beta} - 2 X' Y = 0$$

$$X' X \hat{\beta} - X' U = 0$$

وعليه فإن منظومة مصفوفة المعادلة [ ٤ ] هي:

$$\therefore X' X \hat{\beta} = X' Y$$

وتمثل هذه الصيغة المعادلات الطبيعية (Normal Equations) وبضرب صيغة المعادلات الطبيعية مسبقا في (Premultiplying (X′ X)-1) لنحصل على قيمة المقدار $\left[\hat{\beta}\right]$ كما يلي:

$$\therefore (X' X)^{-1} (X' X) \hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y \text{ . Pre – multiply by } (X' X)^{-1}$$

وطبقا لجبر المصفوفات فإن:

$$\therefore\ A^{-1} A = I \text{ i.e } (X' X)^{-1} (X' X) = I$$

إذن:

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [5]$$

وتعتبر مصفوفة منظومة المعادلة [ ٥ ] أهم نتيجة لمبدأ المربعات الصغرى حيث $\left(\hat{\beta}\right)$ متجه عمودي يمثل تقديرا لقيم $(\beta_i)$ الحقيقية، وبعد اشتقاق تقدير قيم معلمات النموذج، تبقى لدينا ضرورة معرفة خواص مقدرات $\left(\hat{\beta}\right)$، وهذا يقودنا إلى التطرق إلى الوسط الحسابي والتباين للمقدر $\left(\hat{\beta}\right)$ وكما يلي:

٤-٦ الوسط الحسابي والتباين لمقدرات معلمات النموذج الخطي العام:

إن السبب الأساسي في اشتقاق الوسط الحسابي والتباين لمقدرات معلمات النموذج يكمن فيما إذا كانت مقدرات $\left(\hat{\beta}_i\right)$ متحيزة أم غير متحيزة (Biased or Unbiased Estimators) والتي تجعل البواقي (Residnals) أقل ما يمكن، وللبرهنة على ذلك نبدأ بالوسط الحسابي.

(٦-٤-١) الوسط الحسابي للمقدرات ( The Mean of $\hat{\beta}_s$):

للوصول إلى الوسط الحسابي والتباين نحتاج إلى تعويض منظومة المعادلة [ ٢ ] في منظومة المعادلة [ ٥ ] كما يلي:

$$\therefore\ \hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [5]$$

وأن:

$$Y = X\beta + U \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

إذن:

$$\therefore\ \hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' (X\beta + U)$$

بضرب المصفوفات نحصل على:

$$= (X' X)^{-1} X' X \beta + (X' X)^{-1} X' U$$

$$\therefore \hat{\beta} = \beta + (X' X)^{-1} X' U \text{ ........... [6]}$$

وبأخذ التوقيع للمعادلة [ ٦ ] نحصل على:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = E(\beta) + E(X' X)^{-2} X' U$$

وبما أن (X) تبقى ثابتة من عينة لعينة، (راجع الفرضية ٢,١).

وأن E (U) = 0 (راجع الفرضية ٢,١).

وإذن:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = E(\beta) + E(X' X)^{-1} X' E(U)$$

إذن:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$$

وهذا يعني أن القيمة المتوقعة للمقدر، أو الوسط الحسابي للمقدر مساو للمعلمة الحقيقية (True β)، وعليه فإن مقدرات المربعات الصغرى هي تقديرات غير متحيزة (Unbiased Estimator) للمعلمات في النموذج الخطي المتعدد المتغيرات (وهي نفس الخاصية لمقدرات النموذج الخطي البسيط).

(٢-٤-٦) تحليل التباين والتباين المشترك:

Variance and Covariance Analysis:

نبدأ أولا بإيجاد تباين المقدر $\left(\hat{\beta}_i\right)$ كما يلي:

إن تباين المقدر $\left(\hat{\beta}_i\right)$ هو:

$$Var\left(\hat{\beta}_i\right) = E\left[\hat{\beta}_i - E\left(\hat{\beta}_i\right)\right]^2$$

وسبق أن أثبتنا أن المقدر $\left(\hat{\beta}_i\right)$ غير متحيزة أي أن:

$$E\left(\hat{\beta}_i\right) = \beta_i$$

إذن:

$$Var\left(\hat{\beta}_i\right) = E[(\hat{\beta}_i - \beta_i)^2]$$

ثانيا: بينما التباين المشترك للمقدر هو $\hat{\beta}_j$ ،$\hat{\beta}_i$ هو:

$$Covar(\hat{\beta}_i\ \hat{\beta}_j) = E[\{\hat{\beta}_i - E(\hat{\beta}_i)\}\{(\hat{\beta}_j - E(\hat{\beta}_j)\}]$$

وبما أن:

$$\therefore E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$$

إذن:

$$\therefore Covar(\hat{\beta}_i\ \hat{\beta}_j) = [(\hat{\beta}_i - \beta_i)(\hat{\beta}_j - \beta_j)]$$

وباستخدام المصفوفات فـإن التبـاين والتبـاين المشـترك، تضـمهما معـا مصـفوفة واحـدة وكالآتي:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E[\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

(K. K) (K. 1) (K. 1) (1. K) (1. K)

(K. 1) (1. K)

(K. K)

ويمكن التوصل إلى هذه المصفوفة بالخطوات التالية:

$$\underset{(K.1)}{\underbrace{(\hat{\beta} - \beta)}_{(K.1)(K.1)}} = \underset{(K.1)}{\begin{bmatrix} (\hat{\beta}_1 & - & \beta_1) \\ (\hat{\beta}_2 & - & \beta_2) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ (\hat{\beta}_k & - & \beta_k) \end{bmatrix}}$$

ومبدلة هذا المتجه هي متجه أفقي، بالشكل التالي:

$$(\hat{\beta} - \beta)' = [(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_2) \dots (\hat{\beta}_k - \beta_k)]$$

وهذا المتجه ذو أبعاد (1. K).

وبضرب المتجه العمودي في المتجه الأفقي نحصل على:

$$\underset{\underset{(K.K)}{(K.1)(1.K)}}{[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)]} = \begin{bmatrix} (\hat{\beta}_1 & - & \beta_1) \\ (\hat{\beta}_2 & - & \beta_2) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ (\hat{\beta}_k & - & \beta_k) \end{bmatrix} . [\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2) \dots \dots (\beta_k - \beta_k)]$$

$$[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] =$$

$$\underset{(K.K)}{\begin{bmatrix} (\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 & & (\hat{\beta}_1 - \beta_1) & (\hat{\beta}_2 - \beta_2) & \dots(\hat{\beta}_1 - \beta_1) & (\hat{\beta}_k - \beta_k) \\ (\hat{\beta}_2 - \beta_2) & (\hat{\beta}_1 - \beta_1) & (\hat{\beta}_2 - \beta_2)^2 & & \dots(\hat{\beta}_2 - \beta_2) & (\hat{\beta}_k - \beta_k) \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \text{var}\mathit{iance} & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ (\hat{\beta}_k - \beta_k) & (\hat{\beta}_1 - \beta_1) & (\hat{\beta}_k - \beta_k) & (\hat{\beta}_2 - \beta_2) & \dots(\hat{\beta}_k - \beta_k)^2 & \end{bmatrix}} \quad ..(8)$$

إن منظومة المعادلـة [ ٨ ] تشـير إلى كونهـا مصـفوفة متماثلـة ذات أبعـاد (K. K) أي: (Symmetric Matrix of Order (K. K))، وتمثل التباين والتباين المشترك للمقدر (β) حيث تمثـل العنـاصر القطريـة لهذه المصفوفة التباين بينما تمثل العناصر خارج القطر التباين المشترك Covarince.

ولاشتقاق الصـيغة التـي نحصـل منهـا عـلى قيمـة تبـاين $\left(\hat{\beta}\right)$ نتبـع الخطـوات التاليـة باستخدام منظومة المعادلة [ ٦ ]:

$$\hat{\beta} = \beta + (X' X)^{-1} X' U$$

ومنها نحصل على:

$$(\hat{\beta} - \beta) = \{ \beta + (X' X)^{-1} X' U \} - \beta$$

$$= \beta + (X' X)^{-1} XU - \beta$$

إذن:

$$= (X' X)^{-1} X' U$$

ومن منظومة المعادلة [ ٧ ] فإن تباين $\left(\hat{\beta}\right)$ هو:

$$Var \left(\hat{\beta}\right) = E [ \{ \hat{\beta} - \beta) ( \hat{\beta} - \beta)' \} ]$$

وبالتعويض فإن:

$$Var \left(\hat{\beta}\right) = E [ \{ (X' X)^{-1} X U U' X (X' X)^{-1} \} ]$$

ومن جبر المصفوفات، فإن:

$$\therefore (A B C)' = C' B' A'$$

$$\therefore (X' X)^{-1} = \text{is a symmetric matrix}$$

وكذلك فإن:

$$\therefore (X' X) = \text{is a symmetric matrix}$$

وبذلك ينتج أن:

$$Var \left(\hat{\beta}\right) = (X' X)^{-1} X' E (U U') X (X' X)^{-1}$$

وبما أن:

$$E (U U') = \sigma_u^2 I_n$$

وحسب الفرضية (٢,٢) والتي تشير إلى أن $\sigma_u^2$ قيمة ثابتة.

فإذن:

$$Var \left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 I_n (X' X)^{-1} X' X (X' X)^{-1}$$

وبما أن: $(X' X)^{-1} X' X = 1$

حيث إن: $A^{-1} . A = 1$

إذن:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 \, In \, (X' X)^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [9]$$

وحيث إن $\sigma_u^2$ هي مقدر غير متحيز للتباين الثابت والذي يمكن الحصول على قيمته التقديرية كما يلي:

$$\therefore \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-K} = \frac{e'e}{n-K} = \frac{Scaler}{n-K}$$

وبما أن $\sigma_u^2$ قيمة عددية تمثل تباين المتغير العشوائي (U) فيمكن تحويله إلى بداية المصفوفة وقد تم ذلك في منظومة المعادلة [ ٩ ] المذكورة أعلاه(*):

بعد هذا الاستعراض في اشتقاق قيمة المقدر (β)، ووسطه الحسابي وتباينه والتباين المشترك واشتقاق قيمة تباين المقدر (β)، بقيت هناك جملة من الملاحظات العامة يمكن إجمالها تحت عنوان ملاحظات عامة.

(٥-٦) نتائج أساسية:

من التحليل السابق نستنتج ما يلي:

١- أن تباين أي مقدر لمعلمة يمكن الحصول عليه من العناصر القطرية ($i^{th}$) للمصفوفة $(X' X)^{-1}$ مضروبة في $\sigma_u^2$، والتي هي تباين ($U_i$)، بينما التباين المشترك لأي زوج من المقدرات ($\hat{\beta}_i$) و ($\hat{\beta}_j$) يمكن الحصول عليه من المصفوفة $(X' X)^{-1}$ (عدا العناصر القطرية) مضروبة في $\hat{\sigma}_u^2$ لكل عنصر من عناصر ($ij^{th}$).

٢- لاحظنا في الفصل الرابع بأن مقدر المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) يتضمن خاصيتي الخطية (Linearity) وعدم التحيز (Unbaisedness) ولم نتطرق إلى خاصية الخطية في النموذج الخطي العام (GLM)، ولكن قد تضمنها هذا النموذج في منظومة

---

* أو اختصارا $Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 \, (X' X)^{1}$ وهذه نتيجة في غاية الأهمية وتستخدم في معرفة وجود ظاهرة التداخل الخطي المتعدد أو عدم وجودها. راجع الفصل الثامن (المشاكل القياسية).

المعادلة [ ٥ ]، وأيضا يمكن ملاحظة ذلك من خلال كون هذه المقدرات ذات تباين قليل جدا وغير متحيزة، ولذا فإن النموذج العام يمتلك نفس خصائص (OLS) أي أنه يتصف بكونه (BLUE)، أي أنه (Best Linear Unbiased Estimators) وهي نفس خصائص النموذج الخطي البسيط.

٣- مجموع مربع البواقي (The Sum Squared Residuals):

بما أن:

$$e' e = (Y - X \hat{\beta})' (Y - X \hat{\beta})$$

إذن:

$$e' e = Y' Y - 2 \hat{\beta} X' Y + \hat{\beta} X' X' \beta \; ............... [ 1 ]$$

وبما أن:

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$$

إذن بضرب (Pre – Multiplying) كل من طرفي منظومة المعادلة أعلاه في (X′ X) نحصل على:

$$(X' X) \hat{\beta} = (X' X) (X' X)^{-1} X' Y$$

بما أن:

$$(X' X) (X' X)^{-1} = I$$

إذن:

$$(X' X) \hat{\beta} = X' Y$$

وبتعويض منظومة هذه المعادلة في منظومة المعادلة [ ٢ ] أعلاه نحصل على:

$$e' e = Y' Y - \hat{\beta}' X' Y \; ............... [ 10 ]$$

٤- وكذلك فإن توقع $e' e$ يساوي:

$$E (e' e) = (n - k) \sigma_u^2$$

وهذه النتيجة تم الحصول عليها من كون:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

وهي القيمة التقديرية للبواقي.

وبضرب طرفي المعادلة في (n - k) نحصل على:

$$\sum e_i^2 = \hat{\sigma}_u^2 \ (n-k)$$

إذن:

$$\sum e_i^2 = e' e = (n-k)\, \hat{\sigma}_u^2$$

القيمة التقديرية للبواقي هي:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{e'e}{n-k}$$

وهو مقدر غير متحيز لتباين حد اضطراب.

(٦:٦) معامل التحديد $(R^2)$ Coefficient of Determination:

من جملة النتائج المهمة استخراج معامل التحديد $(R^2)$ حيث يمكن حسابه من منظومة المعادلة التالية:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta} X'Y - \frac{1}{n}(\sum Y)^2}{Y'Y - \frac{1}{n}(\sum Y)^2} = \frac{\hat{\beta} X'Y}{Y'Y} \quad .........[\,11\,]$$

ويشير معامل التحديد إلى أثر مساهمة المتغيرات المستقلة في سلوكية المتغير التابع ويقاس عادة بنسبة مئوية، وتنحصر قيمة معامل التحديد بين الصفر والواحد، وهي دائما تقاس بنسبة مئوية، حيث يتم ضرب القيمة المحسوبة من المعادلة [ ١١ ] في ١٠٠، ويستخدم معامل التحديد في معرفة نسبة التغيرات التي تحدث في المتغير التابع وتتسبب عن التغيرات في المتغيرات المستقلة في النموذج، وكلما زاد معامل التحديد واقترب من (١٠٠)، كلما كان ذلك مؤشرا على حسن اختيار النموذج الممثل للعلاقة من المتغيرات (وذلك صحيح ولكن ليس دائما)، وكما يستخدم معامل التحديد بين النماذج المختلفة ذات المتغيرات المستقلة الواحدة (بالإضافة إلى استخدام معايير أخرى).

وباستخدام معامل التحديد يمكن حساب معامل التحديد المعدل (Adjusted $R^2$)، لأخذ عدد المشاهدات وعدد المعالم المقرر بنظر الاعتبار وسيتم التطرق بشيء من التفصيل لكل من معامل التحديد $R^2$ ومعامل التحديد المعدل $R^2$ في الفصل السابع لاحقا.

٦-٧ تطبيقات وتمارين:

**٦-٧-١ التطبيقات:**

تطبيق (١):

مثال تطبيقي لنموذج خطي بسيط متكون من متغيرين:

لنفترض أنه توجد لدينا معادلة الاستهلاك ($Y_i$) كدالة للدخل ($X_i$) وقد توفرت البيانات أدناه عنهما.

المطلوب:

١- إيجاد المعادلة التقديرية لنموذج الاستهلاك.

٢- تحديد (MPC) والحد الثابت.

٣- اختبار معنوية MPC ولمستوى معنوية ٥%.

٤- إيجاد معامل التحديد $R^2$ ومعامل التحديد المعدل $\overline{R^2}$.

٥- اختبار معنوية النموذج باستخدام F.

$$Y_i = \begin{bmatrix} 400 \\ 625 \\ 700 \\ 975 \\ 950 \end{bmatrix} \quad X_i = \begin{bmatrix} 1 & 600 \\ 1 & 700 \\ 1 & 800 \\ 1 & 900 \\ 1 & 1000 \end{bmatrix}$$

(5.1) (5.2)

الحل:

١- للحصول على القيم التقديرية لمعلمات النموذج نطبق الصيغة الآتية:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$\because$ $X'X$ يساوي:

$$\underset{(2.2)}{\overset{X'X}{(2.5)(5.2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 600 & 700 & 800 & 900 & 1000 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 600 \\ 1 & 700 \\ 1 & 800 \\ 1 & 900 \\ 1 & 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4.000 \\ 4.000 & 3.300.000 \end{bmatrix}$$

وللحصول على $(X'\ X)^{-1}$ نحتاج إلى تطبيق صيغة معكوس المصفوفة وهي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ . adj of A i. e } (X'\ X)^{-1} = \hat{\beta} \text{ . adj } (X'\ X)$$

ويتم ذلك كما يلي:

١- إيجاد مصفوفة المرفقات (Cofactor) لمصفوفة $(X'\ X)$ أي:

$$(X'X)^{C} = \begin{bmatrix} 3.300.000 & -4.000 \\ -4.000 & 5 \end{bmatrix}$$

٢- نجد المصفوفة المحولة Transpose لـ $(X'\ X)^{C}$ كما يلي:

$$(X'X)^{T} = \begin{bmatrix} 3.300.000 & -4.000 \\ -4.000 & 5 \end{bmatrix}$$

٣- نجد محدد مصفوفة $|\ X'\ X\ |$ Determinat، والمفروض هو إجراء هذه الخطوة أولا لمعرفة مـا إذا كانت المصفوفة $(X'\ X)$ لها محدد قيمته تختلف عن الصفر موجبا أو سالبا، فإذا كانت قيمة المحدد تساوي صفرا، فهذا يعني بأن لمصفوفة $(X'\ X)$ لا يوجـد معكـوس لهـا، وعليـه فـإن المحدد لهذا المثال هو:

$$|\ X'\ X\ | = (5 \text{ X } 3.300.000) - (4.000 \text{ X } 4.000)$$

$$|\ X'\ X\ | = (16.500.000 - 16.000.000) = 500.000$$

إذن يوجد معكوس لمصفوفة $(X'\ X)$.

٤- نطبق صيغة معكوس المصفوفة كما يلي:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|\ X'X\ |}.adj\ X'X = \frac{1}{500.000}.\begin{bmatrix} 3.300.000 & -4.000 \\ -4.000 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 6.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

أما الحد الثاني $(X'\ Y)$ من المعادلة $\hat{\beta} = (X'\ X)^{-1}.\ X'\ Y$ فيمكن أن نحصل عليه كما يلي:

$$\because X'Y \quad \underbrace{(2.5)(5.1)}_{2.1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 600 & 700 & 800 & 900 & 1000 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 400 \\ 625 \\ 700 \\ 975 \\ 950 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3650 \\ 3.065.000 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض فإن قيمة المعلمات $\hat{\beta}$ هي:

$$\because \hat{\beta} = (X'X)^{-1} \;.\; X'Y$$

(2.1) (2.5) (5.2) (3.5) (5.1)

2.2 2.1

2.1

$$\therefore \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 6.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.0001 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3650 \\ 3.065.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -430 \\ 1.45 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y} = -430 + 1.45\,X$$

وهي المعادلة التقديرية لنموذج دالة الاستهلاك حيث إن الميل الحدي للاستهلاك:

$$1.45 = MPC = \hat{\beta}_2$$

أما اختبارات المعلمات التقديرية لنموذج الاستهلاك، فستتم كما يلي:

اختبار معنوية معلمات نموذج الاستهلاك:

(راجع الفصل السابع).

ولاختبار فرضية العدم $\hat{\beta}_2 = 0$، نطبق اختبار (t)، وكما يلي:

$$\because \hat{t} = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\frac{\sum e2}{n-k}.a_{ij}}}$$

حيث تمثل $a_{ij}$ القيمة القطرية في مصفوفة $(X'X)^{-1}$ والتابع لمعلمة $\hat{\beta}_2$ والقيمة القطرية هنا هي: $a_{22} = \frac{1}{100.000}$ في حين القيمة القطرية للمعلمة $\hat{\beta}_1$ هي $a_{11}$ وهي تساوي $6\frac{3}{5}$.

ولإيجاد مجاهيل صيغة إحصاء $\hat{t}$ المحسوبة نقوم بالآتي:

$$\therefore \sum e^2 = e'e = Y'Y - \hat{\beta}_2 X'Y$$

$$\therefore e'e = \sum Y_i^2 - \hat{\beta}_2 X'Y$$

ومن الحسابات السابقة نجد أن:

$e'\,e = 229.250 - 1.45\,(145000)$

$\therefore\ e'\,e = 19.000$

وهي قيمة مفردة.

وأن محولتها هي نفسها لأنها Scaler.

$\because$ $a_{ij}$ هي العنصر القطري في مصفوفة $(X'\,X)^{-1}$ وهي تمثل $a_{22}$ ولأن $a_{11}$ تمثل القيمة القطرية للمعلمة $\hat{\beta}_1$، وأن القيمة القطرية $a_{22}$ للمعلمة $\hat{\beta}_2$ هي $\frac{1}{100.000}$، وعليه فإن قيمة $\hat{t}$ هي:

$$\hat{t} = \frac{-1.45}{\sqrt{\frac{19.000}{3}}.\sqrt{\frac{1}{100.000}}} = 5.76$$

التحليل:

طالما أن القيمة $\hat{t}$ المحسوبة تساوي ٥,٧٦ وهي أكبر من قيمة t الجدولية تساوي ٣,١٨٢ وهي مأخوذة من جداول توزيع t الجدولية المقابلة لثلاث درجات حرية ($\vartheta = 3$) وباستخدام ٥% ولاختبار ذي طرفين، فإن $\hat{t}$ تقع في منطقة الرفض $Ho:\ \hat{\beta}_2 = 0$ أي نرفض فرضية العدم وهذا يعني بأن المتغير المستقل $X_i$ (الدخل) يؤثر على المتغير التابع $(Y_i)$ الاستهلاك وأن $\hat{\beta}_2$ معنوية بمقدار ٩٥% وأن تأثير الدخل خطي على الاستهلاك.

تطبيق (٢):

مثال تطبيقي لنموذج اقتصادي متكون من ثلاثة متغيرات:

(دالة الإنتاج) Production Function Model:

بافتراض متغير إنتاج محصول العنب $(Y_i)$، يعتمد على متغيرين، هما كمية الماء $X_{2i}$ وساعات $X_{3i}$ وقد توفرت لدينا البيانات أدناه:

المطلوب:

١- احسب معادلة انحدار $Y_i$ على كل من $X_{2i}$ و $X_{3i}$.

٢- اختبر معنوية $\hat{\beta}_2$، $\hat{\beta}_3$.

٣- ما هي قيمة $R^2$، $\overline{R}'^2$ قارن بينهما.

| ساعات العمل | كمية الماء أنج/ شهر | إنتاج العنب (كغم) |
| --- | --- | --- |
| $X_{3i}$ | $X_{2i}$ | $Y_i$ |
| 5 | ٣ | 3 |
| 10 | 5 | 4 |
| 11 | 6 | 6 |
| 14 | 6 | 11 |
| $\sum 40$ | $\sum 20$ | $\sum 24$ |

الحل:

∵ المعادلة التقديرية لمعلمات النموذج هي:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + ei$$

وباستخدام طريقة الانحرافات عن الأوساط الحسابية فإن قيمة $\hat{\beta}_2$ ، $\hat{\beta}_3$ تقدر باستخدام المصفوفة:

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$$

وأن قيمة $\hat{\beta}_1$ تقدر باستخدام الصيغة الآتية:

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 - \hat{\beta}_3 \overline{X}_3$$

ولهذا نبدأ بإيجاد الأوساط الحسابية كالآتي:

$$\overline{Y} = \frac{24}{4} = 6, \overline{X}_2 = \frac{20}{4} = 5, \overline{X}_3 = \frac{40}{4} = 10$$

وعليه فإن مصفوفة دالة الإنتاج ستكون كالآتي:

| $X_{3i}$ | $X_{2i}$ | $Y_i$ |
| --- | --- | --- |
| -5 | -2 | -3 |
| 0 | 0 | -2 |
| 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 5 |

$$\begin{matrix} \therefore (X'X) \\ (2.4)(4.2) \\ 2.2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (X'X) = \begin{bmatrix} +6 & -15 \\ -15 & +42 \end{bmatrix} \therefore (X'X)^C = \begin{bmatrix} 42 & -15 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} and$$

(X′ X) = 6 (42) – (15) (15)

= 252 – 225 = 27

$$(X'X)^T = \begin{bmatrix} 42 & -15 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (X'X)^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 42 & 15 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} \therefore (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 42/27 & -15/27 \\ -15/27 & 6/27 \end{bmatrix}$$

أما الحد الثاني من المعادلة التقديرية فهو:

$$\underset{2.1}{\overset{X'Y}{(2.4)(4.1)}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 35 \end{bmatrix}$$

∴ وبتطبيق الصيغة التقديرية للمعلمات نحصل على:

$$\hat{\beta} = \underset{2.1}{\overset{(X'X)^{-1} X'Y}{(2.2)(2.1)}} = \begin{bmatrix} 42/27 & \frac{-15}{27} \\ -15/27 & 6/27 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 11 \\ 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\frac{1}{3} \\ 1\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{matrix}$$

$$\therefore \hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 - \hat{\beta}_3 \overline{X}_3$$

$$= 6 - \left[ -2\frac{1}{3}(s) \right] - \left[ \frac{-12}{3}.10 \right]$$

$$\therefore \hat{\beta}_1 = 1$$

وعليه فإن المعادلة التقديرية لنموذج دالة الإنتاج هي:

$$\hat{Y} = 1 - 2\frac{1}{3} X_3 + 1\frac{2}{3} X_3$$

٢- اختبار معنوية معلمات عوامل الإنتاج $X_{2i}$ و $X_{3i}$ نحتاج استخدام اختبار t كالآتي:

$$\because \hat{t} = \frac{\hat{\beta}_k}{\sqrt{\frac{e'e}{n-k}}.\sqrt{a_{ij}}}$$

ولإجراء الاختبار نجد مجاهيل صيغة إحصاء t كالآتي:

$$\therefore e'e = Y'Y - \hat{\beta}' X'Y$$

$$= \sum y_i^2 - \hat{\beta}' X'Y$$

$$= (9 + 4 + 0 + 25) - \begin{bmatrix} -2\frac{1}{3} & 1\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 35 \end{bmatrix} = 38 - 32\frac{2}{3} =$$

$$\underbrace{(1.2)\ (2.1)}$$

مفردة $= \sum e_i^2 = 5\frac{1}{3}$ Scaler (38) – (1. 1) =

ولأن لإجراء الاختبار بالنسبة:

$$Ho: \hat{\beta}_{k1} = -. \hat{\beta}_2 = 0$$

$$\because a_{11} = \frac{42}{27}$$

المحسوبة $\hat{t} = \dfrac{-2\,{}^{1}\!/\!{}_{3}}{\sqrt{\dfrac{5\frac{1}{3}}{4-3}}\sqrt{\dfrac{42}{27}}} = -0.8102$

فإن قيمة $\hat{t}$ المحسوبة هي -٠,٨١٠٢ وباستخدام مستوى معنوية ٥% ولدرجة حرية واحدة فإن قيمة t الجدولية تساوي ١٢,٧٠٦ وباستخدام اختبار ذي الطرفين وبمقارنة $\hat{t}$ مع t الجدولية نقبل فرض العدم والتي هي $\hat{\beta}_2 = 0$ أي أن قيمة $\hat{\beta}_2$ لا تختلف معنويا عن الصفر.

ولاختبار معنوية $\hat{\beta}_3$ أيضا نستخرج قيمة $\hat{t}$ المحسوبة ونقارنها مع قيمة (t) الجدولية وبمستوى معنوية ٥% ودرجة حرية واحدة، نقرر فيما إذا نقبل بفرضية العدم، أو بالفرضية البديلة وكما يلي:

$$\because \hat{\beta}_{ki} = \hat{\beta}_3 = 0$$

$$\therefore \hat{t} = \frac{{}^{5}\!/\!{}_{3}}{\sqrt{5\frac{1}{3}\Big/1}\ \sqrt{\dfrac{6}{27}}}$$

$\therefore \hat{t} = 1.532$

حيث القيمة القطرية لـ $\hat{\beta}_3$ هي $a_{23}$ هي: $\frac{6}{27}$.

ومرة أخرى نقبل بفرضية العدم وهي أن $\hat{\beta}_3 = 0$ أي أنه ليس للمتغير $X_{3i}$ تأثير واضح على المتغير التابع $Y_i$.

٣- أما معامل التحديد $R^2$ فهو:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}' X'Y}{Y'Y} = 32\tfrac{2}{3}/38 = 0.86$$

وهذا يعني أن المتغيرات المستقلة $X_{2i}$، $X_{3i}$ تشكل حوالي ٨٦% من مجموع التغيرات الحاصلة في المتغير المستقل $Y_i$.

ملاحظة:

لغرض فهم التطبيقات الخاصة باختبار الفرضيات يفضل مراجعة الفصل السابع أولا.

التطبيق (٣):

بما أن جدول تحليل التباين للنموذج الخطي العام (ANOVA) يتكون من الفقرات الآتية:

| مصدر التباين | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | إحصائية $R^2, F$ |
|---|---|---|---|---|
| Regression | $\hat{\beta}' X'Y$ | K - 1 | $\frac{\hat{\beta}' X'Y}{k-1} = \frac{SSR}{k-1}$ | $\frac{SSR/k-1}{SSE/n-k}$ |
| $X_2, x_3, \ldots, x_k$ | SSR | | | |
| Residuals | $e'e$ | | | $R^2 = \frac{SSR}{SST}$ |
| | $\sum e_i^2 = SSE$ | n - k | $\frac{e'e}{n-k} = \frac{SSE}{n-k} = \hat{\sigma}^2$ | |
| Total Sum | SST | | | $\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}(1 - R^2)$ |
| | $Y'Y$ | n - 1 | | i. e $\bar{R}^2 < R^2$ |

وعليه فمن بيانات النموذج التطبيقي لدالة الإنتاج المتكونة من ثلاثة متغيرات نحصل على جدول ANOVA التالي:

| مصدر القياس | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | إحصاءات ANOVA |
|---|---|---|---|---|
| SSR | $\hat{\beta}' X'Y=32.8$ | 3-1=2 | $\frac{\hat{\beta}' X'Y}{k-1} = \frac{32-8}{2} = 16.4$ | $F = \frac{16.4}{5.3} = 3.09$ |
| SSE | $e'e=5.3=\sum e_i^2$ | 4-3=1 | $\frac{e'e}{1} = 5.3$ | $R^2 = \frac{32.8}{38} = 0.86$ |
| SST | $Y'Y=38=\sum y_i^2$ | 4-1=3 | $Y'Y = \frac{38}{3} = 12.6$ | $R'^2 = 1 - \frac{3}{1}(1-0.86)$ |
| | | | | $= 1-3 + 2.58 =$ |
| | | | | $= -2 + 2.58 = 0.58$ |
| | | | | $\therefore R'^2 < R^2$ |
| | | | | $0.58 < 0.86$ |

ولقد تم الحصول على هذا الجدول بعد إجراء الحسابات التالية:

$$\because \hat{\beta}' X'Y = \begin{bmatrix} -2.3 & 1.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 32.8 = \hat{\beta}' X'Y$$

$$\underbrace{(1.2)\quad(2.4)}_{1.4}\quad \underbrace{1.4\quad(4.1)}_{1.1}$$

Scaler

$$\underset{\text{Scaler}}{\underset{1.1}{\underbrace{(1.4)(4.1)}}} \overset{Y'Y}{} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 9 + 4 + 0 + 25 = 38 = \sum y_i^2$$

ومن حسابات النموذج فإن:

$$e'e = \sum e_i^2 =$$

$$\therefore e'e = Y'Y - \hat{\beta}' X'Y$$

$$= 38 - 32.8 = 5.2$$

$$\because R^2 = \frac{32.8}{38} = 0.86 \therefore \overline{R}^2 = 1 - \frac{3}{1}(1 - R^2) = 0.58$$

أكثر منطقية وقبولا وقربا إلى الواقع من معاملات الارتباط الجزئية ومعامل التحديد.

٢-٧-٦ تمارين:

١- في دراسة قياسية لإحدى المناطق في بلد معين، جمعت بيانات عن معدل التغير في الإيـرادات ($Y_i$) ومستوى البطالة ($X_{2i}$)، ومعدل تغير الأسعار ($X_{3i}$) لعينة مكونة من (٢٠) مشاهدة، وكانـت الأوساط الحسابية لهذه المتغيرات الثلاثة هي: $\overline{X}_3 = 2$ ، $\overline{X}_2 = 4$ ، $\overline{Y} = 3$ وباسـتخدام طريقـة الانحرافات عن الأوساط الحسابية تم الحصول على المعلومات الآتية:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 60 & -25 \\ -25 & 30 \end{bmatrix} X'Y = \begin{bmatrix} -60 \\ 40 \end{bmatrix}, \quad Y'Y = \sum y_i^2 = 80, \quad |X'X| = 1175$$

المطلوب:

" ناقش تأثير كل من مستوى البطالة $X_{2i}$ ومستوى الأسعار $X_{3i}$ على معدل تغـير الإيـرادات $Y_i$".

وأوجد $R^2$، ثم ناقش النتائج.

٢- أخذت عينة عشوائية متكونة من (٢٥) مشاهدة للنموذج الآتي:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + ui$$

وباستخدام طريقة الانحرافات عـن الأوسـاط الحسـابية للمتغـيرات، تـم الحصـول عـلى المعلومات الآتية:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 15 \end{bmatrix}, X'Y = \begin{bmatrix} 35 \\ 12 \end{bmatrix}, Y'Y = 235$$

وكانت الأوساط الحسابية للمتغيرات الثلاثة (K) هي:

$$\overline{Y} = 20, \ \overline{X}_2 = 30, \ \overline{X}_3 = 22$$

أ- أوجد القيمة التقديرية لمعلمات هذا النموذج.

ب- اختبر معلمة $\hat{\beta}_2$ و $\hat{\beta}_3$ بمستوى معنوية ٥%.

٣- في دراسة قياسية لمحددات المصروفات الاستهلاكية في منطقـة معينـة جمعـت بيانـات لعينـة متكونة من (٣٢) عائلة عن الاستهلاك ($Y_i$) والدخل $X_{2i}$ والموجودات السائلة $X_{3i}$ (Liquid Assets) والبيانات أخذت بطريقة انحرافات القيم عن أوساطها الحسابية وكانت كالآتي:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1000} & \frac{-1}{1000} \\ \frac{-1}{1000} & \frac{3}{1000} \end{bmatrix}, X'Y = \begin{bmatrix} 700 \\ 600 \end{bmatrix}, Y'Y = 4220$$

المطلوب:

١- اختبر كون الموجودات السائلة $X_3$ تؤثر معنويا على الاستهلاك.

٢- احسب معامل الارتباط المتعدد $R^2$ (معامل التحديد).

٣- أثبت قياسيا أن معلمات النموذج الخطي العام هي Blue.

٤- اشتق صيغة مصفوفة التباين والتغاير لمقدرات معلمات النموذج الاقتصادي الخطي المتعدد المتغيرات المستقلة والتي صيغتها كالآتي:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{e'e}{n-k}$$

٥- أثبت أن:

$$e'e = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

ملاحظة:

يتضمن الفصل السابع اللاحق تطبيقات وتمارين تخص كلا من الفصل السادس والسابع معا.

الفصل السابع

# الطريقة البديلة لتقدير معلمات النموذج الخطي العام واختبار فرضياتها

**(٧-١) طبيعة صيغة الانحرافات للنموذج الخطي العام .**

**(٧-٢) اشتقاق الطريقة المختصرة.**

**(٧-٣) مقارنة طريقة الانحرافات مع الطريقة الأساسية.**

**(٧-٤) اختبار الفرضيات وجدول تحليل التباين (ANOVA).**

**(٧-٥) اختبار المعنوية وفترات الثقة لمعلمات الانحدار الخطي العام .**

**(٧-٥-١) اختبار (t).**

**(٧-٥-٢) اختبار (F) لحسن المطابقة باستخدام ANOVA.**

**(٧-٦) معامل التحديد المعدل ($R^{-2}$) لحسن المطابقة باستخدام ANOVA.**

**(٧-٧) المعالجة القياسية بالحاسوب.**

**(٧-٨) تطبيقات وتمارين.**

# الفصل السابع

## الطريقة البديلة لتقدير معلمات النموذج الخطي العام

## واختبار فرضياتها

(Deviations Method and Testing Hypothesis of (GLM))

في الفصل السابق تم عرض الطريقة المطولة للنموذج الخطي العام، وسنتناول في هذا الفصل الطريقة البديلة، أو الطريقة المختصرة لمعالجة تقديرات النموذج الخطي العام، وتسمى هذه الطريقة بصيغة الانحرافات (Deviations Formula)، وهي أكثر عملية واستخداما من سابقتها، كذلك فإن النسق العلمي لبقية الفصول هذا الكتاب سيعتمد على هذه الطريقة، وذلك لسهولة توضيحها لمفاهيم الاشتقاق المتعلقة بالمشاكل الاقتصادية القياسية.

(٧-١) طبيعة صيغة الانحرافات للنموذج الخطي العام:

تعتمد هذه الطريقة في الاشتقاق بالأساس على صيغة المعادلة (١) وذلك بأخذ أوساطها الحسابية فنحصل على معادلة (٢)، وبقسمة هذه المعادلة على عدد المشاهدات (n) نحصل على معادلة (٣)، والتي تمثل الانحرافات، وثم نستخدم المصفوفات ونطبقها على هذه المعادلة للحصول على تقديرات كمية للمعلمات التي يراد معرفة قيمها.

(٧-٢) اشتقاق الطريقة المختصرة :

بما أن الصورة العامة للنموذج الخطي العام المعطاة في الفصل السادس هي:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + U_i \quad \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

وبأخذ مجموع قيم المتغيرات لجميع المشاهدات (n) نحصل على:

$$\sum Y_i = n\,\beta_1 + \beta_2 \sum X_{2i} + \dots + \beta_k \sum X_{ki} + \sum U_i$$

وبالقسمة على (n)، أي بأخذ الوسط الحسابي لمتغيرات المعادلة (١) نحصل على:

$$\frac{\sum Y_i}{n} = \frac{n}{n}\beta_1 + \beta_2 \frac{\sum X_{2i}}{n} + \dots + \beta_k \frac{\sum X_{ki}}{n} + \frac{\sum U_i}{n}$$

أي أن:

$$\overline{Y} = \beta_1 + \beta_2 \overline{X}_2 + \ldots + \beta_k \overline{X}_k + \overline{U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) نحصل على:

$$(Y_i - \overline{Y}) = (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + U_i) - (\beta_1 + \beta_2 \overline{X}_2 + \ldots + \beta_k \overline{X}_k + \overline{U})$$

إذن:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + U_i - \beta_1 - \beta_2 \overline{X}_2, \ldots, - \beta_k \overline{X}_k - \overline{U}$$

حيث تمثل ($y_i$) انحرافات قيم المتغير ($Y_i$) عن وسطها الحسابي ( $\overline{Y}$ ) أي (Deviations)، ومن إجراء عملية الطرح فإن الحد الثابت ($\beta_1$) سوف يختفي فنحصل على:

$$y_i = \beta_2 X_{2i} - \beta_2 \overline{X}_2 + \ldots + \beta_k X_{ki} - \beta_k \overline{X}_k + U_i - \overline{U}$$

وبإعادة الترتيب نحصل على:

$$y_i = \beta_2 (X_{2i} - \overline{X}_2) + \ldots + \beta_k (X_{ki} - \overline{X}_k) + U_i - \overline{U} \quad ..$$

وباستخدام الانحرافات نحصل على:

$$y_i = \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + U - \overline{U}$$

حيث: $i = 1, 2, .., n$.

و ($x_i$) تشير إلى انحرافات قيم المتغيرات المستقلة عن أوساطها الحسابية.

وباستخدام المصفوفات فإن المعادلة (٣) تكتب بالصورة.

$$Y = X\beta + U - \overline{U}$$

وإذا عبرنا عن ( $U - \overline{U}$ ) بالمتجه (e)، فإن المعادلة أعلاه تأخذ الشكل التالي:

$$Y = X\beta + e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [4]$$

حيث تمثل:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} & \ldots & x_{k1} \\ x_{22} & x_{32} & \ldots & x_{k2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_{2n} & x_{3n} & \ldots & x_{kn} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

تشير (x) وليس (X) إلى الانحرافات، (y) وليس (Y) إلى الانحرافات.

أيضا فإن:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix}, \overline{U} = \begin{bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{U}_n \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

من هذا نجد أن:

(Y): عبارة عن متجه عمودي ذي أبعاد (n. 1)، ويمثل عناصر المتغير التابع.

(X): عبارة عن مصفوفة ذات أبعاد (n. k – 1)، حيث يختفي عمود ثابت الانحدار (راجع المعادلة ٣)، وتمثل انحرافات قيم المتغيرات المستقلة $(x_i)$ عن أوساطها الحسابية $(\overline{X})$.

(β): عبارة عن متجه عمودي ذي أبعاد (K – 1. 1)، وتختفي أيضا فيه $(\beta_1)$ لنفس السبب أعلاه، ويمثل معلمات النموذج الخطي العام.

$\left(\hat{\beta}\right)$: عبارة عن متجه عمودي ذات أبعاد (K – 1. 1)، ويمثل المعلمات التقديرية للنموذج الخطي العام.

(U), $(\overline{U})$: عبارة عن متجهات عمودية ذي أبعاد (n. 1)، ويمثل حد الاضطراب ووسطه الحسابي.

$(e_i)$ عبارة عن متجه عمودي ذي أبعاد (n. 1)، ويمثل تقدير الخطأ العشوائي أو البواقي (Residuals)، أو (Error Term).

(٣-٧) مقارنة طريقة الانحرافات مع الطريقة الأساسية (Original Formula):

١- عناصر كل من المتجه العمودي [ Y ] والمصفوفة [ X ] هي عبارة عن انحرافات عن أوساط الحسابية، وعادة يشار إليهم بالرموز الصغيرة أي $(x_i)$، و $(y_i)$.

٢- عمود ثابت الانحدار يساوي دائما واحد (يختفي من مصفوفة [ x ]).

٣- المتجه العمودي [ β ] ذو أبعاد ((K – 1). 1)، وليس كما في الصيغة الأصلية والتي

تكون ذات أبعاد (K. 1)، حيث اختفى الحد الثابت (Constant Term).

ويمكن أن نوضح بأن صيغة اشتقاق $\left(\hat{\beta}\right)$ وتباين $\left(\hat{\beta}\right)$ و $(e' \ e)$ هي نفس الصيغ التي تم اشتقاقها في صيغ منظومة المعادلات الأصلية التي سبق توضيحها في الفصل السابق وهي كما يلي:

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$$

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 \ (X' X)^{-1}$$

$$e' e = Y' Y - \hat{\beta}' X' Y$$

وأن صيغة معامل التحديد $(R^2)$ تأخذ الشكل التالي:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}' X'Y}{Y'Y} = \frac{SSR}{SST}$$

أو أحيانا تكتب بالصيغة التالية:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}' X'Y}{\sum y_i^2}$$

حيث أن $\sum y_i^2 = Y' Y$ (لاحظ الفصل السادس).

(٧-٤) اختبار الفرضيات وجدول تحليل التباين:

(Test of Hypotheses and Analysis of Variance):

إن الهدف الأساسي من استخدام اختبار الفرضيات للنموذج الخطي العام هو استبعاد أثر المتغيرات المستقلة $(X_i)$ التي ليس لها تأثير على التغير في المتغير التابع $(Y_i)$، ويتم ذلك بالرغم من أن العنصر المستقل قد يكون ذا قيمة تقديرية أكبر من الصفر، وذلك لوجود أخطاء في عملية المعاينة، وتشير فرضية العدم (Null Hypothesis) للنموذج الخطي العام إلى عدم وجود علاقة بين المتغيرات المستقلة $(X_{2i}, X_{3i}, X_{4i}, \ldots, X_{ki})$ والمتغير التابع $(Y_i)$ وكما يلي:

$$H_o: \beta_k = 0$$

$$H_1: \beta_k \neq 0$$

فإذا قبلنا بفرضية العدم، فيعني هذا بأن المتغير العشوائي $(U_i)$ هو المصدر الوحيد

للتغير الذي حدث في المتغير التابع ($Y_i$)، أي أن ($Y_i$) لا تتأثر بقيم المتغيرات المستقلة، أما في حالة رفض فرضية العدم أي قبول الفرضية البديلة، والتي يمكن صياغتها كما يلي:

$H_1: \beta_k \neq 0$

أي أن: $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \neq 0$

وهذا يعني بأن هناك تأثيرا من المتغيرات المستقلة على المتغير التابع، وتوجد عدة طرق للاختبارات أهمها اختبار (t) واختبار (F)، وهذا سنوضحه في الفقرة القادمة من هذا الفصل حيث يعتمدان في تطبيق صيغهما على جدول تحليل التباين.

١-٤-٧ جدول تحليل التباين (ANOVA):

يستند عادة في تحليل أثر المتغيرات المستقلة في المتغير التابع إلى جدول تحليل التباين (Table of Analysis of Variance) أو جدول الانحدار الخطي (Table of Linear Regression) ويطلق على هذا النوع من التحليل بتحليل التباين أو اختصارا بأنوفا (ANOVA) ويتكون جدول أنوفا من العناصر المذكورة في الجدول التالي:

جدول (١-٤-٧)

توضيح مكونات تحليل التباين أنوفا (ANOVA)

| Source of Variation<br>مصدر التباين | Sum of Squares<br>مجموع المربعات (SS) | d.e<br>درجات الحرية | Mean SS<br>متوسط مربع الخطاء | Statistics of ANOVA<br>إحصاءات |
|---|---|---|---|---|
| $X_{2i}, X_{3i}, \ldots, X_{ki}$<br>المتغيرات المستقلة | $\hat{\beta}'X'Y$ (SSR)<br>$\hat{\beta}'X'Y = Y'Y - e'e$ | k-1 | $\hat{\beta}'X'Y / k-1$ | $F = \frac{\hat{\beta}'X'Y / k-1}{e'e / n-k}$ |
| Residuals<br>البواقي | $e'e$ (SSE)<br>$e'e = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$ | n-k | $\frac{Y'Y}{n-1}$ | $R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y}$ |
| Total Variation<br>الانحرافات الكلية | $Y'Y = e'e + \hat{\beta}'X'Y$ | n -1 | | $R'^2 = \frac{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}{Y'Y} \cdot \frac{n-1}{k-n}$ |

* أيضا يلاحظ بأن $\hat{\sigma}^2 = e'e / n-k$.

يستعمل تحليل التباين في حالة النموذج الخطي المتعدد لأمرين هما:

١- لاختبار المعنوية الكلية للانحدار أو لاختبار فرضية العدم لمعلمات النموذج أي:

$H_o: \beta_2, \beta_3, ..., \beta_k = 0$

مقابل الفرضية البديلة $H_1: \beta_2, \beta_3, ..., \beta_k \neq 0$

٢- لتحديد القوة التفسيرية للمتغيرات التوضيحية $X_k$.

ومن جدول تحليل التباين (ANOVA) يمكن أن نحصل على قيمة F الإحصائية المقدرة، فإذا افترضنا أنها تساوي $\hat{F} = 162.25$ وتجري مقارنة هذه القيمة المحسوبة مع القيمة النظرية لإحصائية F الجدولية والمتحصل عليها من جداول توزيع (F) (راجع الملحق الإحصائي) باستعمال (٢) و (١٢) درجات حرية وبمستوى معنوية مقداره ٥% نجدها تساوي:

$F^2_{12}\,(0.05) = 3.89$

وحيث أن القيمة المحسوبة تقع في المنطقة الحرجة $Ho: \hat{\beta}_i = 0$ حيث يتم رفض فرضية العدم ($H_o$) وهذا يدلل على معنوية المتغيرين المستقلين $X_{2i}$، $X_{3i}$ في تفسير التباين في المتغير التابع $Y_i$.

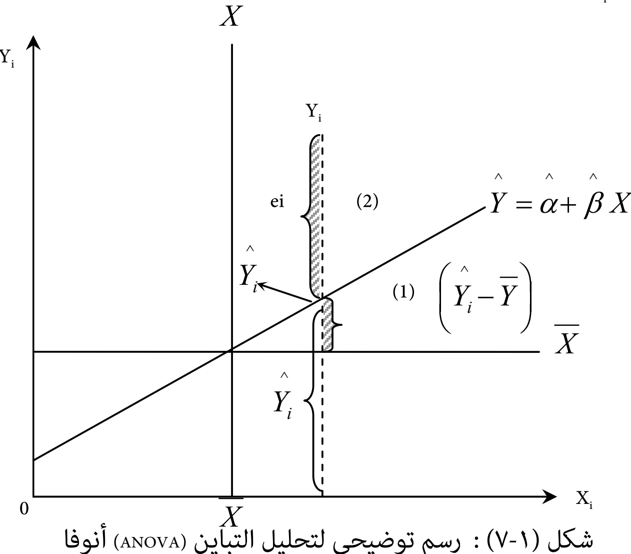
ويستند بناء هذا الجدول على التحليل والشكل البياني أدناه:

بما أن: القيمة الفعلية = القيمة المقدرة + المتبقي.

أي: $\therefore\ Y_i = \hat{Y}_i + e_i$

وللتوضيح انظر الشكل (١-٧)، وبطرح الوسط الحسابي للمتغيرات فإن:

$$Y_i - \overline{Y} = \hat{Y}_i - \overline{Y} + e_i$$




شكل (١-٧) : رسم توضيحي لتحليل التباين (ANOVA) أنوفا

وحيث أن الوسط الحسابي لحد الاضطراب يساوي صفرا أي $E(u_i) = 0$ وبأخذ $\sum$ وبالتربيع نحصل على:

$$\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum e_i^2$$

والحد الثالث في المفكوك يساوي صفرا.

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

وبالمصفوفات تكون الصيغة كالآتي:

وهذا يعني:

$$Y' Y = \hat{\beta}' X' Y + e' e$$

أي:

$$SST = SSR + SSE$$

وبمعنى آخر فإن:

مجموع مربعات الأخطاء + مجموع مربعات الانحدار = مجموع المربعات الكلي.

وقد تسمى أحيانا:

SST = Explained Sum of Squares (SSR) + Unexplained Sum of Squares (SSE)

واختصارا تعني مجموع المربعات غير المفسرة + مجموع المربعات المفسرة = مجموع المربعات الكلي.

$$SST = SSR + SSE \ldots$$

وباستخدام انحرافات القيم عن وسطها الحسابي في النموذج الخطي البسيط يمكن كتابتها على الصورة:

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

ومن الشكل البياني (١-٧) فإن:

$$\sum \hat{y}_i = (1) + (2)$$

وباستخدام المصفوفات في النموذج الخطي المتعدد فإن (SST) تساوي:

$$\therefore\ Y' Y = \hat{\beta}' X' Y + e' e$$

أي أن:

$$\therefore \; SST = SSR + SSE$$

وهذه سبق برهنتها كالآتي:

$$\therefore \; e' e = Y' Y - \hat{\beta}' X' Y$$

بما أن:

$$e' e = [ Y - X \hat{\beta} ]' [ Y - X \hat{\beta} ]$$

إذن:

$$e' e = Y' Y - 2 \hat{\beta}' X' Y + \hat{\beta}' X' X \hat{\beta}$$

وبما أن:

$$(X' X) \hat{\beta} = X' Y$$

وبالتعويض نحصل:

$$e' e = Y' Y - 2 \hat{\beta}' X' Y + \hat{\beta}' X' Y$$

إذن:

$$e' e = Y' Y - \hat{\beta}' X' Y$$

وبإعادة الترتيب فإن:

$$Y' Y = \hat{\beta}' X' Y + e' e$$

وهذا يعني:

$$SST = SSR + SSE$$

(٥-٧) اختبار المعنوية وفترات الثقة لمعلمات الانحدار الخطي العام:

لاختبار معنوية الفرضيات لابد من استخدام أحد معايير الاختبارات، وسوف نعطي اهتمامنا لاختبار كل من (t) و (F)، كما يلي:

٧-٥-١ اختبار (t) (t – Test):

بافتراض أن المتغير العشوائي ($U_i$) موزع توزيعا طبيعيا، ومع وجود الفرضيات السابقة للنموذج الخطي العام فإن:

$$\hat{\beta}_k \text{ is } N (\beta_j, a_{ij} \sigma^2) \text{ Where: } j = 2, 3, \ldots, k$$

حيث $(a_{ij})$ تمثل العناصر القطرية (Diagonal Elements) في المصفوفة $[X' X]^{-1}$.

وأن:

$(U)$ is $N(0, \sigma^2 . I_n)$

Where:

$i = 1, 2, 3, .., n.$

وبما أن: $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ تتبع توزيع مربع كاي $(x^2)$ بدرجات حرية عددها $(n - k)$، إذن يمكن تعريف صيغة اختبار (t) كما يلي:

$$\hat{t} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k}} . \sqrt{a_{ij}}} \quad ............ [ 15 ]$$

وبما أن $(\beta_j)$ تساوي صفرا وهذا ما تنص عليه فرضية العدم أي المتغيرات المستقلة لا تؤثر في المتغير التابع، إذن صيغة $\left(\hat{t}\right)$ تكون كما يلي:

$$\hat{t} = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k}} . \sqrt{a_{ij}}} \quad ............ [ 16 ]$$

فإذا كانت قيمة $\left(\hat{t}\right)$ المحسوبة (Calculated) أكبر من قيمة (t) الجدولية (Tabulated t) وبمستوى معنوية معين، نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة، وهي أن $(\beta_j)$ لا تساوي صفرا، وهذا يعني بأن المتغير المستقل $(X_j)$ يؤثر على المتغير التابع $(Y_i)$، وإذا كانت قيمة $(\beta_j)$ تساوي صفرا فهذا يعني بأن المتغير المستقل $(X_j)$ ليس له تأثير على المتغير التابع $(Y)$، ولاختبار معنوية $(\hat{\beta}_1)$ فنطبق الصيغة [ ٦ ] كما يلي:

$$\hat{t} = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{(n-k)}} . \sqrt{a_{ii}}}$$

وكذلك استكمالا للاختبار، لابد من الأخذ بنظر الاعتبـار حـدود الثقـة لمعلـمات النمـوذج الخطي التعدد والتي تعطي بالصيغة التالية:

$$C.1 = \beta_j \pm t_{\substack{E/2 \\ (N-K)}} \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k}} . \sqrt{a_{jj}} \quad ........ [7]$$

أو:

$$C.1 = \beta_k \pm t_{\substack{\frac{\alpha}{2} \\ n-k}} . \sqrt{\frac{e'e}{n-k}} . \sqrt{a_{ij}}$$

(٢-٥-٧) اختبار (F) لحسن المطابقة (F Test For Goodness of Fit):

أما تحليل استخدام اختبار (F) فيمكن تلخيصه بالصيغة التالية:

$$F = \frac{\text{(التباين المشروح بواسطة الانحدار) Variance Explained by Regression}}{\text{(التباين غير المشروح) Unexplained Variance}}$$

ومن جدول تحليل التباين (ANOVA) السابق الذكر (العمود الأخير، يمكن أن نحصل عـلى البسط من عملية قسمة الانحرافات المشروحة (الموضحة) عـلى درجـات الحريـة، في حـين يـتم الحصول على المقام من عملية قسمة الانحرافات غير الموضحة (المشروحة) على درجات الحريـة، وبعبارة أخرى فإن:

$$F = \frac{\hat{\beta}' X'Y / K-1}{e'e / n-K} \quad ............. [8]$$

وإلحاقا بهذه الصيغة ومن جدول أنوفا فإن اختبار ($R^2$) يأخذ الصيغة التالية:

بما أن:

$$R_2 = \frac{\hat{\beta}' X'Y}{Y'Y} \frac{\text{الانحرافات المفسرة}}{\text{إجمالي الانحرافات}} = \frac{SSR}{SST}$$

فإن:

$$\hat{\beta}' X' Y = (Y' Y) R^2$$

وبما أن:

$$e' e = Y' Y - \hat{\beta}' X' Y$$

وبالتعويض فإن:

$$e'e = Y'Y - (Y'Y)R^2$$

إذن:

$$e'e = Y'Y(1 - R^2)$$

وبالتعويض في الصيغة [ ٨ ] نحصل على:

$$F = \frac{R^2 / K - 1}{(1 - R^2) / n - K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [9]$$

ولفهم هذه المنظومات من المعادلات يمكن الرجوع لجدول أنوفا.

(٧:٦) معامل التحديد المعدل (Adjusted $R^2$ or ($R^{-2}$):

إن الصيغة السابقة لمعامل التحديد ($R^2$) قد تبالغ (تضخم) حقيقة تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع أو من حقيقة شرح مقدار التغير الذي يحدثه المتغير المستقل في المتغير التابع، ولهذا نلجأ إلى معامل التحديد المعدل (Adjusted $R'^2$) لإزالة التحيز ويتم ذلك كما يلي:

بما أن:

$$\because R^2 = \frac{\hat{\beta}' X'Y}{Y'Y} = \frac{Explained\ Sum\ of\ Squares}{Total\ Sum\ of\ Squares} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2}$$

وكذلك:

$$\therefore R^2 = 1 - \frac{Y'Y - \hat{\beta}' X'Y}{Y'Y} = \frac{e'e}{Y'Y} = \frac{\sum e_1^2}{\sum y_i^2}$$

وأيضا:

$$\because R^2 = 1 - \frac{Residuals\ Sum\ of\ Squares}{Total\ Sum\ of\ Squares} = \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

لذا يمكن أن نحصل على ($R'^2$) بطريقة بديلة تأخذ الصيغة التالية:

$$R'^2 = 1 - \frac{Y'Y - \hat{\beta}' X'Y}{Y'Y} . \left( \frac{n-1}{n-K} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [10]$$

والصيغة [ ١٠ ] تقلل من تحيز (تضخم) معامل التحديد وهذا ما تم توضيحه في

جدول تحليل التباين ANOVA والذي منه تم الحصول عـلى الاختبـارات F، $R^2$، $R'^2$ (راجـع الملحق (D) والملحق (E)).

٧-٧ المعالجة القياسية بالحاسوب:

الدارس للأسلوب القياسي سيسـتخدم حـتما الحاسـب الآلي (The Computer)، حيـث تتـوفر عدة برامج جاهزة تستوفي جميع متطلبات التقدير في الاقتصاد القياسي، ومن بين البرامج ما يلي:

1- Statistical Analysis System / Econometrics and Time Series.

أو ما يعرف اختصارا بـ SAS/ ETS.

2- Statistical Package for Social Sientists.

أو بـ "SPSS ".

وهذا البرنامج الأكثر استخداما من قبل الاقتصاديين/ الإداريين ورجال الأعمال، وهـو متـوفر ومستخدم في مختبرات كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية، وسيتم تطبيقه في حل التمارين والتطبيقات التي سيتم ذكرها في هذا الكتاب.

3- Time Series Processor.

أما بـ (TSP).

4- Regression and Time Series.

أو ما يعرف اختصارا بـ (RATS).

وهناك عشرات أخرى من البرامج الأخرى، وهذه البرامج تشـترك جميعهـا في إجـراء مسـائل الانحدار الأساسية بوساطة المربعات الصغرى وتختلف عن بعضها في الإضافات والتفاصيل الدقيقة.

وتتوفر هذه البرامج في أجهزة الكمبيوتر الرئيسية الضخمة (Main Frains)، كما تتوفر صـورة منها في أجهزة الكمبيوتر الشخصي (Personal Computer).

ولا يستلزم استخدام هذه البرامج أية معرفة بلغات برمجة الحاسب الآلي، بل إنها تعتمـد على مجموعات من الجمل والأوامر السهلة الكتابة والتنفيذ التـي تسـتعمل لإجـراء حسـابات أو تقديرات معينة مطلوبة، وبعد الحصول على نتائج التقدير من الحاسب الآلي يشرـع الباحـث في وضعها حسب نمط معين متعارف عليه، إما في شكل معادلة انحدار مقدر

أو في شكل جداول تحتوي المعالم المقدرة والمخرجات الأخرى ذات العلاقة التي تم التوصل إليها خلال مرحلة التقدير، فبالنسبة للنموذج الحقيقي التالي وعلى سبيل المثال:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + ui$$

فإنه عادة ما تتم كتابة النموذج المقدر المقابل والمتحصل عليه على النحو التالي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta} X_{3i}$$

S. E ( ) ( ) ( )

$\hat{t}$ ( ) ( ) ( ) $t_{\hat{}\,\alpha/\vartheta} =$

$R^2 =$

$R'^2 =$

$F =$

$\hat{\sigma} =$

d. w = , d L = , d u =

(٧-٨) تطبيقات وتمارين:

**(٧-٨-١) تطبيقات اقتصادية[*] :**

تطبيق (١): (مثال تطبيقي لنموذج اقتصادي بسيط متكون من متغيرين):

لنفترض أنه توجد لدينا معادلة الاستهلاك ($Y_i$) كدالة للدخل ($X_i$)، وقد توفرت لدينا البيانات أدناه عن كل منهما، والمطلوب هو:

١- إيجاد المعادلة التقديرية لنموذج الاستهلاك بطريقتي المباشرة والانحرافات.

٢- إيجاد القيمة التقديرية لكل من الميل الحدي للاستهلاك ($\hat{\beta}_2$)، والقيمة الثابتة ($\hat{\beta}_1$).

٣- اختبار معنوية الميل الحدي للاستهلاك وبمستوى معنوية ٥%.

٤- إيجاد معامل التحديد ($R^2$) ومعامل التحديد المعدل ($R'^2$).

---

[*] يضاف إليها تطبيقات الفصل السادس السابقة الذكر.

البيانات الأولية:

$$Y_i = \underset{(5.1)}{\text{الاستهلاك}} \begin{bmatrix} 400 \\ 625 \\ 700 \\ 975 \\ 950 \end{bmatrix} \quad X_i = \underset{(5.2)}{\text{الدخل.}} \begin{bmatrix} 1 & 600 \\ 1 & 700 \\ 1 & 800 \\ 1 & 900 \\ 1 & 1000 \end{bmatrix}$$

الحل الأول:

للحصول على القيمة التقديرية لمعلمات النموذج أعلاه نطبق المعادلة التالية:

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$$

ويتم ذلك كما يلي:

بما أن $(X' X)$ يساوي ما يلي:

$$\underset{\substack{(2.5)(5.2) \\ \therefore (2.2)}}{(X'X)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 600 & 700 & 800 & 900 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 600 \\ 1 & 700 \\ 1 & 800 \\ 1 & 900 \\ 1 & 1000 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1+1+1+1+1)(600+700+800+900+1000) \\ (600+700+800+900+1000)(600+700+800+900+1000) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underset{(2.2)}{(X'X)} = \begin{bmatrix} 5 & 4.000 \\ 4.000 & 3.000.000 \end{bmatrix}$$

وللحصول على المصفوفة $(X' X)^{-1}$ نحتاج إلى تطبيق الصيغة التالية:

$$(X' X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} \cdot \text{Adj } (X' X)$$

وتمثل هذه الصيغة إيجاد معكوس المصفوفة، ولتطبيقها نتبع الخطوات التالية:

١- نجد المصفوفة المرافقة Co – Factor Matrix وكما يلي:

$$(X' X)^{C} = \begin{bmatrix} 3.300.000 & -4.000 \\ -4.000 & 5 \end{bmatrix}$$

٢- نجد المصفوفة المحولة Transpose Matrix $(X' X)^{C}$ كما يلي:

$$(X'\,X)^{T} = \begin{bmatrix} 3.300.000 & -4.000 \\ -4.000 & 5 \end{bmatrix}$$

٣- نجد محدد المصفوفة | X′ X | (Determinant)، والمفروض هو إجراء هذه الخطوة أولا لمعرفة ما إذا كانت المصفوفة (X′ X) لها محدد قيمته تختلف عن الصفر موجبا أو سالبا، فإذا كانت قيمة المحدد تساوي صفرا، فهذا يعني بأن المصفوفة (X′ X) لا يوجد معكوس لها، وعليه فإن المحدد لهذا المثال هو:

$$| X'\,X | = (5 \text{ X } 3.300.000) - (4.000 \text{ X } 4000)$$

$$= 16500000 - 16000000$$

إذن المحدد هو:

$$| X'\,X| = 500000$$

إذن يوجد معكوس للمصفوفة (X′ X) لأنه قيمة موجبة غير صفرية.

٤- تطبيق صيغة معكوس المصفوفة كما يلي:

$$(X'\,X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|}.(Adj\, X'X) = \frac{1}{500000}$$

$$(X'\,X)^{-1} = \frac{1}{500000}.\begin{bmatrix} 3.000.000 & -4.000 \\ -4.000 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 6\frac{3}{5} & -\frac{1}{125} \\ -\frac{1}{125} & \frac{1}{100000} \end{bmatrix}$$

أما الحد الثاني (X′ Y) من المعادلة $\hat{\beta} = (X'\,X)^{-1}.\,X'\,Y$ فنحصل على قيمته كما يلي:

$$\because X'Y \quad \underbrace{(2.5)(5.1)}_{(2.1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 600 & 700 & 800 & 900 & 1000 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 400 \\ 625 \\ 700 \\ 975 \\ 950 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} (400 + 625 + 700 + 975 + 950) \\ (600 \times 400) + (700 \times 625) + (800 \times 700) + (900 \times 975) + (1000 \times 950) \end{bmatrix}$$

وعليه فإن:

$$\therefore X'Y = \begin{bmatrix} 3650 \\ 3.065.000 \end{bmatrix}$$
$$(2.1)$$

بما أن أبعاد المصفوفة التالية هي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$
$$(2.1)\ (2.5)\ (5.2)\ (2.5)\ (5.1)$$
$$(2.2)\qquad (2.1)$$
$$(2.1)$$

إذن بالتعويض نحصل على:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\frac{3}{5} & -\frac{1}{125} \\ -\frac{1}{125} & \frac{1}{100000} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3650 \\ 3.065.000 \end{bmatrix}$$
$$(2.1)$$

إذن:

$$\begin{bmatrix} (\hat{\beta}_1) \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(6\frac{3}{5} \times 3650\right) & -\frac{1.(3.065.000)}{125} \\ \left(-\frac{3650}{125}\right. & \left.+\frac{3.065.000}{100000}\right) \end{bmatrix}$$
$$(2.1)$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} (24.090 - 24.520) \\ (-2920 + 30.650) \end{bmatrix}$$
$$(2.1)$$

إذن:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -430 \\ 1.45 \end{bmatrix} \begin{cases} \hat{\beta}_1 = -430 \quad (\text{الحد الثابت}) \\ \hat{\beta}_2 = 1.45 \quad (\text{معلمة } MPC) \end{cases}$$

وعليه فإن معادلة خط الانحدار التقديرية تأخذ الشكل التالي:

$$\therefore \hat{Y} = -430 + 1.45\, X_1$$

وهي المعادلة التقديرية للنموذج الاقتصادي لدالة الاستهلاك.

الحل الثاني:

باستخدام طريقة الانحرافات عن أوساطها الحسابية:

ولتوضيح الطريقة المختصرة، نأخذ نفس النموذج لتقدير معلماته بالخطوات الآتية:

نجد انحرافات $(Y_i)$ و $(X_i)$ عن أوساطهما الحسابية كما يلي:

$$Y = \begin{bmatrix} -330 \\ -105 \\ -30 \\ 245 \\ 220 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -200 \\ -100 \\ 0 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

وبما أن المعادلة التقديرية هي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

ولتقدير قيمة $\hat{\beta}_2$ (وذلك لاختفاء $\hat{\beta}_1$ كما أوضحنا ذلك سابقا) نجد قيمة حدود منظومة المعادلة أعلاه مبتدئين بالحد الأول وكما يلي:

$$\underset{1.1}{\underbrace{\overset{(X'.X)}{(1.5)(5.1)}}} = [-200 -100\ 0\ 100\ 200] \begin{bmatrix} -200 \\ -100 \\ 0 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = [(-200)^2 + (-100)^2 + 0^2 + 100^2 + 200^2]$$

$\therefore$ قيمة $(X'X)$ (منفردة) Scaler وهي:

$$(X'X) = 100.000$$

وأن معكوس القيمة المنفردة هو عبارة عن:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{(X'X)}$$

إذن:

$$\therefore (X'X)^{-1} = \frac{1}{100000}$$

أما قيمة الحد الثاني من منظومة معادلة المعلمات فهي:

$$\underbrace{\overset{(X'Y)}{(1.5)(5.1)}}_{1.1} = \begin{bmatrix} -200 & -100 & 0 & -100 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -330 \\ -105 \\ -30 \\ 245 \\ 220 \end{bmatrix}$$

$$= (-200 \text{ X} - 330) + (-100 \text{ X} - 105) + 0 + (100 + 245) + 200 \text{ X } 220$$

إذن:

$$(X' \text{ Y}) = 145.000$$

وهي قيمة مفردة أيضا.

إذن قيمة منظومة المعادلة هي مفردة:

$$\hat{\beta} = (X' \text{ X})^{-1} \text{ X}' \text{ Y} = \hat{\beta}_2$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{100000}.145000 = \frac{145000}{100000} = 1.45 = \hat{\beta}_2$$

إذن:

$$\hat{\beta}_2 = 1.45$$

ولتقدير قيمة الحد الثابت ($\hat{\beta}_1$) أو المقطع (Intercept Term)، نستخدم المعادلة التالية:

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\therefore \hat{\beta}_1 = 730 - 1.45\ (800)$$

$$= -430$$

حيث إن:

$$\overline{Y} = 730$$

$$\overline{X} = 800$$

إذن المعادلة التقديرية لدالة الاستهلاك بالطريقة المختصرة، هي نفسها بالطريقـة المطولـة وهي:

$$\therefore \hat{Y} = -430 + 1.45 \text{ X}$$

٣- اختبار معنوية معلمات نموذج الاستهلاك:

ولاختبار فرضية $\hat{\beta}_2 = 0$، نطبق اختبار (t).

بما أن صيغة t المحسوبة هي:

$$\hat{t} = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\sum e_i^2 / n-K}.\sqrt{a_{ij}}} = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\sum e_i^2 / n-K}\sqrt{a_{22}}}$$

ولتطبيق الصيغة نجد مجاهيل إحصاء اختبار ( $\hat{t}$ ) كما يلي:

$$\therefore \sum e_i^2 = e' e = Y' Y - \hat{\beta}' X' Y$$

بما أن:

$$e' e = \sum Y^2 - \hat{\beta}' X' Y$$

وبالتعويض فإن:

$$\sum e_i^2 = 229250 - 1.45\ (145000)$$

$$= 19.000$$

حيث إن محول المقررة هي نفسها وعليه:

$$\therefore e' e = 19.000$$

وبما أن ($a_{ij}$) عبارة عن العناصر القطرية في مصفوفة $(X' X)^{-1}$ وهي في هذه الحالة عبارة عن قيمة منفردة مقدارها $\frac{1}{100000}$ وهي العنصر القطري لمعلمة $\hat{\beta}_2$، إذن $a_{22} = \frac{1}{100000}$ وبتعويض النسبة نحصل على قيمة (t) المحسوبة (Calculated t) كما يلي:

لمعلمة $\hat{\beta}_2$ أما بالنسبة لقيمة $\hat{\beta}_1$ فهي $a_{11}$ وتساوي $6\frac{3}{5}$ .

$$t^* = \frac{1.45}{\sqrt{\frac{19000}{3}}.\sqrt{\frac{1}{100000}}} = 5.76$$

التحليل:

وطالما أن القيمة (t*) المحسوبة (٥,٧٦) وهي أكبر من قيمة (t) الجدولية والتي تساوي ٣,١٨٢ (مأخوذة من جداول توزيع (t) المقابلة لثلاث درجات حرية) وباستخدام مستوى

معنوية قدره ٥% ولاختبار ذي طرفين، فإن (t) المحسوبة تقع في منطقة الـرفض ($\hat{\beta}_2 = 0$) ، أي نرفض فرضية العدم، وأن المتغير المستقل يؤثر على المتغير التـابع، وإن ($\hat{\beta}_2$) معنويـة، وهـذا يعني أن الدخل ($x_i$) له تأثير خطي على الاستهلاك ($Y_i$).

أما تقدير حدود الثقة للمعلمة ($\hat{\beta}_2$) لمستوى معنويـة ٥% فـيمكن الحصـول عليهـا مـن تطبيق المعادلة (١٧) والتي هي:

$$C.\ I = \beta_2 \pm \left(\frac{0.05}{2}.3\right)\sqrt{\sum e_i^2/n-K}.\sqrt{a_{22}}$$

وبالتعويض، بالنتائج التي حصلنا عليها نحصل على:

$$= 1.45 \pm t\ (0.05/\ 2.3)\ \sqrt{\frac{19.000}{3}}.\sqrt{\frac{1}{100000}}$$

$$= 1.45 \pm 3.182\ (79.58)\ \left(\frac{1}{3162}\right)$$

$$C.\ I = 1.45 \pm 0.80$$

$$C.\ I = 2.25 - 0.65$$

التطبيق الثالث: مثال تطبيقي لنموذج اقتصادي متكون من ثلاث متغيرات:

لنفترض أن إنتاج محصول العنب ($Y_i$) يعتمد على متغيرين، هما كمية الماء ($X_{2i}$) وسـاعات العمل ($X_{3i}$)، وقد توفرت لدينا البيانات الأولية أدناه:

| ساعات العمل $X_{3i}$ | كمية الماء (انج/ شهر) $X_{2i}$ | محصول العنب $Y_i$ |
|---|---|---|
| ٥ | ٣ | ٣ |
| ١٠ | ٥ | ٤ |
| ١١ | ٦ | ٦ |
| ١٤ | ٦ | ١١ |

المطلوب:

١- احسب معادلة انحدار ($Y_i$) على ($X_{2i}$), ($X_{3i}$).

٢- اختبر معنوية ($\hat{\beta}_2$), ($\hat{\beta}_3$) واشتق ٩٥% فترة ثقة لكل معلمات النموذج التقديرية.

٣- ما هي قيمة $R^2, \overline{R^2}$ ؟ قارن بينهما؟

الحل:

∴ معادلة الانحدار التقديرية هي:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta} X_3 + e$$

وباستخدام طريقة الانحرافات عن الأوساط الحسابية فإن قيمة المعلمات $(\hat{\beta}_3)$ $(\hat{\beta}_2)$ تقدر باستخدام الصيغة التالية:

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$$

وأن قيمة $(\hat{\beta}_1)$ تقدر بالصيغة التالية:

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 + \hat{\beta}_3 \overline{X}_3$$

ولذا فإن:

$$\overline{Y} = \frac{24}{4} = 6, \overline{X}_2 = 5, \overline{X}_3 = 10$$

وحيث إن:

$$Yi - \overline{Y} = y_i$$

$$X_i - \overline{X} = x_i$$

∴ ستتحول بيانات الجدول أعلاه إلى المصفوفات الآتية:

$$\therefore y = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} . x = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

وللحصول على قيمة المعلمات $(\hat{\beta},s)$ نستخرج قيمة المصفوفة $(X' X)^{-1}$، والمصفوفة $(X' Y)$ ثانيا كما يلي:

أولا: إيجاد المصفوفة $(X' X)^{-1}$.

بما أن:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} (4+0+1+1) & (10+0+1+4) \\ (10+0+1+4) & (25+0+1+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 42 \end{bmatrix}$$

ومن الضروري احتساب $(X'X)^{-1}$ كما يلي:

إيجاد مرافق المصفوفة هو:

$$(X'X)^E = \begin{bmatrix} 42 & -15 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

وأن $adj\ (X'X)^T$ هو:

$$(X'X)^T = \begin{bmatrix} 42 & -15 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

إيجاد محدد المصفوفة $(X'X)$ وهو:

$$\det |X'X| = |X'X| = (42 \times 6) - (15 \times 15)$$

$$= 252 - 225$$

$$= 27$$

وبما أن معكوس المصفوفة هو عبارة عن:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} adj\ (X'X)$$

بالتعويض فإن:

$$\therefore (x'x)^{-1} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 42 & -15 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (x'x)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{42}{27} & -\frac{15}{27} \\ -\frac{15}{27} & \frac{6}{27} \end{bmatrix}$$

أما الحد الثاني من منظومة المعادلة التقديرية فهو:

$$\underset{(2.1)}{\underset{(2.4)(4.2)}{(X'Y)}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6+0+0+5) \\ (15+0+0+20) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 35 \end{bmatrix}$$

وبهذا نكون قد أوجدنا الحد الأيمن من منظومة المعادلة التقديرية للمعلمات ( $\hat{\beta}_i$ ) وهي:

$$\hat{\beta} = \underset{(2.1)}{\underset{(2.2)(2.1)}{(X'X)^{-1}.X'Y}} = \begin{bmatrix} \frac{42}{27} & -\frac{15}{27} \\ -\frac{15}{27} & \frac{6}{27} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 11 \\ 35 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{(42 \times 11)}{27} & -\frac{15 \times 35}{27} \\ -\frac{15 \times 11}{27} & +\frac{6 \times 35}{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{462}{27} & -\frac{525}{27} \\ \frac{-165}{27} & +\frac{210}{27} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{63}{27} \\ \frac{45}{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\frac{1}{3} \\ 1\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{matrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\frac{1}{3} \\ 1\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

أما القيمة التقديرية للحد الثابت ( $\hat{\beta}_1$ ) فيمكن استخراجها بتطبيق المعادلة التالية:

$$\therefore \overline{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 + \hat{\beta}_3 \overline{X}_3$$

إذن:

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} + \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 + \hat{\beta}_3 \overline{X}_3$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\hat{\beta}_1 = 6 - \left[ \left( -2\frac{1}{3} \right) .5 \right] - \left[ 1\frac{2}{3} \times 10 \right]$$

$$= 6 - \left( -11\frac{2}{3} \right) - 16\frac{2}{3}$$

$$= 6 + 11\frac{2}{3} - 16\frac{2}{3}$$

إذن:

$$\therefore \hat{\beta}_1 = 1$$

وعليه فإن منظومة معادلة الانحدار التقديرية هي:

$$\therefore \hat{Y} = 10 - 2\frac{1}{3}X_2 + 1\frac{2}{3}X_3$$

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_3$$

١- ولاختبار معنوية المعلمات نحتاج إلى تطبيق اختبار (t).

بما أن:

$$t^* = \frac{\hat{\beta}_k}{\sqrt{e'e/n-K}\sqrt{a_{kj}}}$$

وبما أن:

$$e'e = Y'Y - \overline{\hat{\beta}}'X'Y$$

أو:

$$e'e = \sum Y_i^2 - \hat{\beta}'X'Y$$

$$\therefore e'e = (9 + 4 + 0 + 25) - \begin{bmatrix} -2\frac{1}{3} & 1\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 35 \end{bmatrix}$$

$$= 38 - \left(-25\frac{2}{3} + 58\frac{1}{3}\right)$$

$$e'e = 38 - 32\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$$

وهي بنفس الوقت تشير إلى $\sum e_i^2$.

ولاختبار دقة معنوية المعلمة ($\hat{\beta}_2$) فإن:

$$H_o: \hat{\beta}_2 = 0$$

$$H_i: \hat{\beta}_2 \neq 0$$

وبالتعويض فإن:

$$t^* = \frac{-2\frac{1}{3}}{\sqrt{5\frac{1}{3}/4.3}\sqrt{\frac{42}{27}}} = \frac{-2\frac{1}{3}}{\sqrt{5\frac{1}{3}}\sqrt{1\frac{5}{9}}}$$

$$= \frac{-2\frac{1}{3}}{2.880} = -0.8102$$

وإن قيمة ($t^*$) المحسوبة هي (-٠,٨١٠٢).

وباستخدام (٥%) مستوى معنوية ودرجة حرية واحدة فإن قيمة (t) الجدولية تساوي ١٢,٧٠٦، ولاختبار ذي طرفين وبمقارنة ( $\hat{t}$ ) المحسوبة مع (t) الجدولية نقبل بفرضية العدم والتي هي $\hat{\beta}_2 = 0$، أي أن قيمة ( $\hat{\beta}_2$ ) لا يختلف معنويا عن الصفر.

ولاختبار معنوية ( $\hat{\beta}_3$ ) أيضا نستخرج قيمة ($t^*$) المحسوبة ونقارنها مع قيمة (t) الجدولية وبمستوى معنوية (٥%) ودرجة حرية واحدة نقرر ما إذا كنا نقبل بفرضية العدم، أو بالفرضية البديلة، كما يلي:

$$H_o: \hat{\beta}_3 = 0$$

$$H_i: \hat{\beta}_3 \neq 0$$

$$t^* = \frac{5/3}{\sqrt{5\frac{1}{3}1}\sqrt{\frac{6}{27}}} = \frac{5/3}{(2.310)(4714)} = 1.532$$

ومرة أخرى نقبل بفرضية العدم وهي أن ( $\hat{\beta}_3 = 0$ ) أي أنه ليس للمتغير ($X_{3i}$) تأثير واضح على المتغير التابع ($Y_i$).

٣- أما معامل التحديد ($R^2$) فإن قيمته تساوي:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}' X'Y}{Y'Y} = 32\frac{2}{3}/38 = 0.86$$

أي أن العلاقة قوية وطردية وهي عالية.

ومن هـذا نسـتنتج بـأن تـأثير المتغـيرات المسـتقلة $(X_{2i})$ و $(X_{3i})$ يشـكل حـوالي (٨٦%) مـن التغييرات (Variations) في المتغير التابع $(Y_i)$، أما معامل التحديد المعدل $(R'^2)$ فإنه يقدر بما يلي:

$$R'^2 = 1 - \frac{X'Y - \hat{\beta}'X'Y}{Y'Y} \cdot \left(\frac{n-1}{n-k}\right)$$

$$R'^2 = 1 - \left(0.14 \times \frac{3}{1}\right)$$

$$= 1 - 0.42$$

$$= 0.58$$

أي أن (٥٨%) من التغيير الـذي يحـدث في المتغـير التـابع $(Y_i)$ يعـود إلى المتغـيرين (X2i)، (X3i)، ومن هذا نستنتج أن معامـل التحديـد المعـدل يقلـل مـن التضـخم لدرجـة العلاقـة التـي يعطيها معامل التحديد $R^2$ والذي كان يساوي ٠,٨٦.

(٨-٧) تمارين:

١- في دراسة قياسية لإحدى المناطق في قطر معين جمعت بيانات عن معدل التغير في الإيـرادات $(Y_i)$، ومستوى البطالة $(X_{2i})$، ومعدل تغير الأسعار $(X_{3i})$ لعينة حجمها (٢٠) مشـاهدة، وكانـت الأوساط الحسابية لهذه المتغيرات هي:

$$\overline{Y} = 3, \overline{X}_2 = 4, \overline{X}_3 = 2$$

وباستخدام طريقة الانحرافات عن الأوساط الحسابية تم الحصول على المعلومات الآتية:

$$X'X = \begin{bmatrix} 60 & -25 \\ -25 & 30 \end{bmatrix} X'Y = \begin{bmatrix} -60 \\ 40 \end{bmatrix}, Y'Y = 80$$

نـاقش تـأثير كـل مـن مسـتوى البطالـة $(X_2)$، ومسـتوى الأسـعار $(X_3)$ عـلى معـدل تغـير الإيرادات $(Y)$.

٢- المصفوفة المذكورة أدناه توضح التباينات والتباينات المشتركة لثلاثـة متغـيرات هـي $X_1$ ويشـير إلى لوغاريتم استهلاك غذاء الفرد الواحد.

$X_2$ ويشير إلى لوغاريتم سعر الغذاء.

$X_3$ ويشير إلى لوغاريتم الدخل القابل للتصرف.

$$\begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & 7.59 & 3.12 & 26.99 \\ X_2 & & 29.16 & 30.80 \\ X_3 & & & 133.00 \end{array}$$

وبافتراض أن دالة الطلب يمكن تمثيلها بالشكل الآتي:

$$Y_1 = A\, Y^{\alpha}_2\, Y^{\beta}_3$$

حيث إن $(X_i = \log Y_i)$.

أ- أوجد القيمة التقديرية لمرونة الدخل على الطلب.

ب- احسب ٩٥% حدود ثقة للمعلمات، بالاعتماد على عينة حجمها (٢٠) مشاهدة.

٢- أخذت عينة عشوائية متكونة من (٢٥) مشاهدة للنموذج الآتي:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + U_i$$

وباستخدام طريقة الانحرافات عن الأوساط الحسابية للمتغيرات، تم الحصول على المعلومات الآتية:

$$X'X = \begin{bmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 15 \end{bmatrix}, X'Y = \begin{bmatrix} 35 \\ 12 \end{bmatrix}, Y'Y = 235$$

وكانت الأوساط الحسابية للمتغيرات هي:

$$\overline{Y} = 20, \overline{X}_2 = 30, \overline{X}_3 = 22$$

أ- أوجد القيمة التقديرية لمعلمات هذا النموذج مع تباين كل من $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$.

ب- اختبر فيما إذا كانت $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ معنويين ومختلفين عن الواحد.

٣- في حالة وجود نموذج خطي متعدد وكون متغيراته مقاسة بالانحراف عن أوساطها الحسابية اشرح المقصود بتحليل تباين عينة $(Y)$.

$$Y'Y = \hat{\beta}' X' Y + e' e$$

حيث $(e' e)$ يمثلان مجموع مربعات البواقي.

٤- في دراسة قياسية لمحددات المصروفات الاستهلاكية في منطقة معينة، جمعت بيانات لعينة متكون من (٣٢) عائلة عن الاستهلاك $(Y)$، الدخل $(X_2)$، والموجودات السائلة

(Liquid Assets) $(X_3)$، والبيانات أخذت بطريقة انحرافات القيم عن أوساطها الحسابية وكانت كالآتي:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1000} & \frac{-1}{1000} \\ \frac{-1}{1000} & \frac{3}{1000} \end{bmatrix}, X'Y = \begin{bmatrix} 700 \\ 600 \end{bmatrix}, Y'Y = 4220$$

أ- اختبر فرضية كون الموجودات السائلة $(X_{3i})$ تؤثر معنويا على الاستهلاك $(Y_i)$.

ب- احسب معامل الارتباط المتعدد $(R^2)$ واشرح العلاقة بين $(R^2)$ و $(R^{-2})$، حيث إن $(R^2)$ و $(R^{-2})$ تم تعديلهما لدرجات الحرية.

٥- في دراسة للطلب على سلعة معينة وبالاعتماد على بيانات سلسلة زمنية متكونة من (٢١) سنة، تم الحصول على النتائج التالية:

| الأوساط الحسابية | الانحرافات المعيارية | معاملات الارتباط |
|---|---|---|
| $\overline{X} = 51.843$ | $S_X = 9.205$ | $r_{xy} = -0.9158$ |
| $\overline{Y} = 8.313$ | $S_Y = 1.780$ | $r_{YT} = -0.8696$ |
| $\overline{T} = 0$ | $S_T = 6.057$ | $r_{XT} = 0.9304$ |

أ- احسب معلمة الزمن (Time) من معادلة العلاقة بين (Y) وكل من (X) و (T).

ب- اختبر كون تلك المعلمة تختلف معنويا عن الصفر.

حـ- اشرح باختصار الأهمية الاقتصادية في إدخال عنصر الزمن كمتغير توضيحي في النموذج.

٦- في دراسة (٨٩) شركة كان العنصر المعتمد $(X_1)$ يمثل إجمالي التكاليف، مع المتغيرات التفسيرية المتمثلة في معدل الإنتاج $(X_2)$ ومعدل البطالة $(X_3)$. وكانت أوساطهم الحسابية كما يلي: $X_1 = 5.8, X_2 = 2.9, X_3 = 3.91$.

والمصفوفة أدناه توضح مجاميع المربعات وإجمالي المنتجات معدله حسب الأوساط.

$$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 113.6 & 36.8 & 39.1 \\ & 50.5 & -66.2 \\ & & 967.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

أ- أوجد القيمة التقديرية للعلاقة بين $(X_i)$ والمتغيرات الأخرى.

ب- كون جدول تحليل التباين / التغاير ليوضح التناقص في إجمالي مجموع المربعات بسبب ضبط $(X_2)$، والتناقص الإضافي يعود إلى ضبط $(X_2)$، وإجمالي التناقص يعود إلى $(X_2)$ و $(X_3)$ سوية.

حـ- اختبر تأثير جميع المتغيرات، ثم اختبر جزئيا تأثير $(X_3)$ عندما يكون $(X_2)$ معلوما.

٧- إذا أعطيت البيانات الآتية التي تمثل النموذج الخطي العام:

| $Y_i$ | $X_{2i}$ | $X_{3i}$ |
|---|---|---|
| 3 | 3 | 5 |
| 1 | 1 | 4 |
| 8 | 5 | 6 |
| 3 | 2 | 4 |
| 5 | 4 | 6 |

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + U_i$$

المطلوب:

١- حساب المتجه $(\beta)$ باستخدام المعادلة الطبيعية، وما هو معامل الانحدار؟

٢- باستخدام معكوس المصفوفة، احسب المتجه $\hat{\beta}$ وما هي معادلة الانحدار؟

٣- حساب تباين/ تغاير المتجه $\hat{\beta}$.

٤- حساب معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$.

٥- ما هو رأيك بالنتائج؟.

٨- ناقش بدقة مفهوم واشتقاق كل من معامل الارتباط $(r)$، معامل التحديد $(R^2)$ ومعامل الارتباط المعدل $(R'^2)$، اذكر الفرق بين كل معامل من هذه المعاملات.

٩- ناقش بدقة مفهوم كل من معامل الارتباط ومعامل الانحدار؟ ما هو الفرق بينهم.

١٠- اشتق صيغة معامل التحديد $R^2 = \dfrac{\hat{\beta}' X'Y}{Y'Y}$.

١١- اشتق صيغة معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2 = 1 - (1 - R^2).\dfrac{n-1}{n-k}$.

١٢- ما هي مكونات جدول ANOVA وما هو دوره في الاقتصاد القياسي.

١٣- اشتق صيغة مصفوفة البواقي $e' e = Y' Y - \hat{\beta}' X' Y$.

١٤- أوضح كيف تم التوصل إلى مصفوفة البواقي التالية:

$$e' e = Y' Y (1 - R^2)$$

١٥- اشتق صيغة مصفوفة التباين - التغاير لمقدرات معلمات النموذج الخطي العام أي:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{e'e}{n-k}$$

١٦- اشتق صيغة $R^2 = \frac{e'e}{Y'Y}$.

# الجزء الثاني

# الاقتصاد القياسي التحليلي التطبيقي

ويشتمل هذا الجزء على دراسة التوسع في النماذج القياسية المتضمنة لأكثر من متغيرين ومناقشتها في الفصول التالية:

الفصل الثامن : الارتباط الخطي المتعدد (التداخل الخطي المتعدد).

الفصل التاسع : الارتباط الذاتي أو الارتباط المتسلسل.

الفصل العاشر : عدم التجانس

الفصل الحادي عشر : المتغيرات المتباطئة زمنيا (المتخلفة زمنيا).

الفصل الثاني عشر : المتغير الوهمي (المصطنع).

الفصل الثالث عشر: التحيز الأني ونماذج المعادلات الآنية.

الفصل الرابع عشر : التشخيص.

# الفصل الثامن

# الارتباط الخطي المتعدد (التداخل الخطي المتعدد)

(Multicollinearity)

**(٨-١) طبيعة الارتباط الخطي المتعدد.**

**(٨-٢) أسباب وجود الارتباط الخطي المتعدد.**

**(٨-٣) وسائل معالجة ظاهرة الارتباط الخطي المتعدد.**

**(٨-٤) ظهور مشكلة الارتباط الخطي المتعدد رياضيا في نموذج الانحدار الخطي البسيط.**

**(٨-٥) ظهور الارتباط الخطي المتعدد في النموذج الخطي العام.**

**(٨-٦) الدرجة العليا في الارتباط الخطي المتعدد.**

**(٨-٧) طريقة قياس (أو الكشف عن) الارتباط الخطي المتعدد.**

**(٨-٨) نموذج سيلفي للارتباط الخطي المتعدد.**

**(٨-٨-١) فرضيات نموذج سيلفي لمعالجة الارتباط الخطي المتعدد.**

**(٨-٨-٢) التباين في النموذج.**

**(٨-٨-٣) التوسع في النموذج.**

**(٨-٩) تطبيقات وتمارين.**

# الفصل الثامن

## الارتباط الخطي المتعدد (التداخل الخطي المتعدد)

Multicollinearity

إن فرضيات نموذج الانحدار الخطي البسيط والعـام إذا تحققـت فـإن معلـمات التقـدير بموجب (OLS) تمتاز بكونها (BLUE)، وعند عدم تحقق أيـة فرضـية مـن الفرضـيات السـابقة تـبرز مشكلة دقة التقدير التي يتوجب على الباحث المستخدم للأسلوب القياسي معالجتها، وأولى هذه المشاكل هي عدم استقلالية المتغيرات المستقلة، وإنما قد يحدث ارتباط أو تـداخل بيـنهما وهـذا يكون ظهور مشكلة الارتباط أو التداخل الخطي المتعدد.

(٨-١) طبيعة الارتباط الخطي المتعدد **Multicollinearity**:

يطلق عليه الدكتور عادل عبد الغني محبوب مصطلح الارتباط الخطـي المتعـدد في حـين يطلق عليه الدكتور عصام عزيز شريف التداخل الخطي المتعدد. والارتباط الخطـي المتعـدد هـو مصطلح مركب من Multi (متعدد) و (Co) مشترك أو متداخل أو مرتبط و (Linearity) خطي.

ويعد الإحصائي النرويجي راكنر فريش (R. Frisch) أول من لاحظ ظاهرة التـداخل الخطـي المتعدد عند تحليله لبيانات السلاسل الزمنية، حيث اتضح له أنه في معظم الحالات توجد درجـة من التداخل بين المتغيرات المستقلة (Intercorrelation Between Dependent Variables)، ويعود التـداخل الخطي المتعدد في تحليل بيانات السلاسل الزمنية الخاصة بالمتغيرات الاقتصادية إلى كـون بعـض المتغيرات المستقلة قد تتطور خلال الفـترة الزمنيـة، وتتـأثر بعوامـل اقتصـادية متعـددة، ولفهـم مشكلة الارتباط الخطي المتعدد نأخذ النموذج الاقتصادي التالي:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + U_i$$

ومن وجود الفرضيات التي يقوم عليها النموذج الخطي المتعدد، والتـي تتمثـل اختصـارا بأن كل من $(X_{2i})$ و $(X_{3i})$ متغيرات غير عشوائية (غـير تصـادفية) Non – Stochastic Variables، وأن $(U_i)$ المتغير العشوائي (حد الاضطراب) مستقل وذو توزيع

طبيعي بوسط حسابي صفر، وتباين ثابت مقداره $(\sigma_u^2)$، وتباين مشترك مساو للصفر، وأن الفرضية الأساسية هي عدم الترابط التام Perfect Correlated بين أي متغير مستقل وأي متغير آخر أو بين أي متغير مستقل، وأية تشكيلة خطية (Linear Combination) بين المتغيرات المستقلة (التوضيحية أو المفسرة)، أي أن هذه الفرضية تنص على حالة غياب الارتباط الخطي المتعدد أي (Absence of Multicollinearity).

والحالة التي تهم الباحث المستخدم للأسلوب القياسي هي الكشف عن الدرجات العليا من الارتباط الخطي المتعدد (High Degree of Multicollinearity) الذي يكون عنده متغير مستقل واحد مرتبط بصورة قوية مع متغير مستقل آخر، أو مع تشكيلة خطية من المتغيرات المستقلة الأخرى، وعموما فالذي يمكن ملاحظته هو:

١- إن مشكلة الارتباط الخطي المتعدد (M. c) تتمثل في درجة الارتباط الخطي المتعدد، وليست المشكلة هي وجود (Presence)، أو عدم وجود (Absence) تداخل خطي متعدد، أي المشكلة هي في الدرجة (Degree)، وليست مشكلة في النوعية (Kind)، وفي معظم الحالات الاعتيادية توجد درجة من التداخل الخطي المتعدد بين المتغيرات المستقلة.

٢- طالما أن هذه المشكلة تشير إلى كون المتغيرات التوضيحية تعمل بموجب فرضية (Non - Stochastic)، فهي إذن تدرس العينة (Sample)، وليس المجتمع أو (Population)، وعليه فنحن لا نجري اختبارا للارتباط الخطي المتعدد، ولكن نلجأ إلى إمكانية قياس درجته في العينة المدروسة.

(٢-٨) أسباب وجود الارتباط الخطي المتعدد (Mc):

إن قوة النموذج الخطي العام (GLM) تعتمد أساسا على فرضية استقلالية كل متغير من المتغيرات المستقلة (Independency)، والسبب في ذلك هو أن أسلوب مقدرات المربعات الصغرى (OLS) والمستخدمة لمنظومة المعادلة:

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$$

وحيث أن المصفوفة (X′ X) ذات أبعاد (n. K)، ورتبة مقدارها (K)، فإن الأمر يتطلب إيجاد معكوس لهذه المصفوفة، ولا يمكن أن يتم ذلك إلا إذا كانت هذه المصفوفة تتمتع برتبة (Rank) كاملة مقدارها (K) أي يجب أن تكون المصفوفة (X′ X) (Non-Singular) وحتى يمكن إيجاد معكوسها $(X' X)^{-1}$، وذلك راجع لأسباب رياضية، وتتعلق بالعمليات الحسابية كالقسمة على صفر، كذلك فإن برامج الحاسب الإلكتروني المعدة لهذا الغرض

سوف ترفض بيانات النموذج الذي يحتوي على علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة.

وإذا لم يتحقق هذا الشرط، فإن النموذج الخطي العام (GLM) سوف يبطل العمل به، ولا يمكن اعتباره جيدا لعملية تقدير المعلمات، والحالة الأقل حدية من ذلك هي وجود الارتباط الخطي وبدرجة عالية، ولكن ليست كاملة (Perfect)، أي أن $r_{23} \neq 1$ فقد تكون $r_{23} = 90$.

وإذا استطاع المحلل الاقتصادي أن يجمع بيانات من تجارب يمكنه التحكم بها، فعندئذ يمكن السيطرة على ظاهرة الارتباط الخطي المتعدد، من خلال تصميم تجريبي يجعل المشاهدات متعامدة مع بعضها، أي (Orthogonal)، وطالما أن الاقتصادي في معظم الحالات لا يستطيع أن يجمع بيانات من تجارب يمكنه التحكم بها لأسباب منها:

١- قد تشترك جميع المتغيرات المستقلة في اتجاه زمني عام.

٢- أو من الممكن أن تتغير بعض المتغيرات المستقلة سوية بسبب عدم جمع البيانات من قاعدة واسعة وبشكل كاف.

٣- أو أنه توجد علاقة تقريبية بين بعض المتغيرات المستقلة كما هي الحالة في استخدام متغير التباطؤ الزمني (Lag Variable) (راجع الفصل الثاني عشر).

لذا نجد ظاهرة الارتباط الخطي المتعدد تشير إلى الحالة التي يكون فيها متغيران أو أكثر مرتبطين بقوة مع بعضهما، وهذا يجعل من الصعب جدا معرفة تأثير كل متغير منفردا على المتغير التابع، وقد تظهر مشكلة الارتباط الخطي المتعدد بالرغم من كون معلمات النموذج الخطي معنوية إحصائيا، وبالرغم من كون ($R^2$) عالية، وهنا يتطلب الأمر معالجة هذه الظاهرة.

(٣-٨) وسائل معالجة ظاهرة الارتباط الخطي المتعدد:

عند التأكد من وجود التداخل الخطي المتعدد فأمام الباحث المستخدم للأسلوب القياسي الخيارات التالية:

١- جمع بيانات إضافية:

كلما كبر حجم العينة عن طريقة إضافة بيانات جديدة كلما ساعد ذلك على تخفيض حجم التباينات، وهذا يقلل من أثر الارتباط الخطي المتعدد، وعموما فإنه ينصح في البحوث القياسية أن لا يقل حجم العينة عن (٢٥) مشاهدة، وأن لا يزيد عدد المتغيرات عن خمس متغيرات مستقلة.

٢- الاستعانة بمعلومات خارجية:

إذا كان هناك تقدير لمعلمة أحد المتغيرات الذي يتصف بكونـه مرتبطـا ارتباطـا متعـددا، فيمكن استخدام هذا التقدير الذي تم خارج إطار البحث مع نتائج دراسة البحث قيـد الـدرس، فمثلا يمكن استخدام تقدير معلمة الميل الحدي للاستهلاك لفترة معينة، ولقطر معين المستخرجة من دراسات المقاطع العرضية لدراسـة العلاقـة بـين الـدخل والأسـعار لـنفس الفـترة، والقطـر في دراسات السلاسل الزمنية[1].

٣- تحويل العلاقة الدالية:

ويتم ذلك عن طريق استخدام الأدوات والمفاهيم الرياضية، كأن يكون المتغير ($X_2$) مقامـا وضرب المعادلة في ($YX_2$)، وبهذا نحصل على علاقة دالية جديدة والخطورة في هذا الإجراء هي في وجوب ملاحظة النتائج عند تحليلها وتفسيرها، ومدى تطابقها ومنطوق النظرية الاقتصادية.

٤- حذف أو إضافة متغير:

قد يلجأ الباحث المستخدم للأسلوب القياسي إلى حذف المتغير الذي يمتاز بالارتباط العالي مع بقية المتغيرات المستقلة للتخلص من (Mc) التداخل الخطي المتعدد وقد لا يعد هـذا الإجـراء مقبولا، فبدلا من الحذف قـد يلجـأ الباحـث إلى إضـافة متغـير آخـر جديـد قـد أغفـل الباحـث أهميته.

٥- لا حاجة للتعديل:

قد لا يلجأ الباحث إلى التعديل عند وجود مشكلة الارتباط الخطي المتعـدد وفي الحـالات الآتية:

i- عندما تكون درجة الارتباط الخطي المتعدد (MC) لا تسبب القلق، أي غير عالية، أو غير كاملة.

ii- عندما تكون درجة (MC) عاليـة ولهـا تـأثير عـلى مقـدرات معلـمات لا تهـم الباحـث كثـيرا في التحليل.

iii- عندما تكون درجة (MC) عالية، ولكن على أن لا تؤثر على نتائج الدراسة.

---

(1) لمزيد من الإطلاع حول هذا الموضوع راجع:
A. Koutsoyannis; "Theory of Econometrics"; Happer and Row Publishers, Inc, New York, 1973.

مثال توضيحي على مشكلة (Mc) الارتباط الخطي المتعدد:

لنفترض أن $(Y_i)$ تمثل مستوى الاستيرادات (Imports)، وأن $(X_{2i})$ تمثل إجمالي الناتج القومي (GNP)، وهذان المتغيران مقاسان بملايين الدنانير، وأن $(X_{3i})$ تمثل الرقم القياسي العام لأسعار المستهلك، ولاقتصاد معين، وخلال الفترة ١٩٨١ إلى ١٩٩٧، والمتوقع هو أن مستوى الاستيرادات سوف يكون أكبر عندما يزداد إجمالي الناتج القومي، والأسعار المحلية، ومن البيانات المعطاة تم تقدير معادلة أثر كل من $(X_{2i})$ و $(X_{3i})$ على $(Y_i)$ وكما يلي:

$$\hat{Y} = -10.49 + 0.08\ X_{2i} + 0.76\ X_{3i}$$

$$\hat{t} = (1.40)\ (1.00)$$

$$R'^2 = 0.970$$

$$R^2 = 0.985$$

$$r_{23} = 0.997 < 1$$

من المعادلة التقديرية أعلاه، اتضح لنا بأن كل من $\hat{\beta}_2$ ,$\hat{\beta}_3$ قيمة غير معنوية إحصائيا، بمستوى معنوية مقداره ٥%، بينما يتضح بأن $(r_{23})$ يشير وبكل وضوح إلى وجود الارتباط الخطي المتعدد (Mc) بين $(X_{2i})$, $(X_{3i})$ والذي يسند هذه العلاقة هو أن معامل الارتباط البسيط بين $(r_{23})$ عال جدا، وتقريبا هو مساو الواحد (أي $r_{23} \cong 1$)، وهذا يعني وجود ارتباط خطي تام (Perfect Mc)، وعليه فعند إعادة التقدير بإهمال $(X_{2i})$ مرة و $(X_{3i})$ مرة أخرى نحصل على المعادلات التقديرية التالية:

النموذج التقديري بإهمال $(X_{3i})$ ...

$$\hat{Y} = -69.03 + 0.13\ X_2$$

$$t^* = (-12.00)\ (31.87)$$

$$R^2 = 0.986$$

النموذج التقديري بإهمال $(X_{2i})$ ...

$$\hat{Y} = -14.52 + 1.82\ X_3$$

$$t^* = (-17.58)\ (30.79)$$

$$R^2 = 0.985$$

ويلاحظ أن التقدير باستخدام النموذج الخطي البسيط لكل من ($X_{2i}$) و ($X_{3i}$) إحصائيا معنوي بمستويات معنوية ١%، ٥%، وعلى كل حال فإن سحب متغير واحد من النموذج العام يؤدي إلى أن تكون تقديرات (OLS) متحيزة، وذلك لأن النظرية الاقتصادية تقترح أن تكون الاستيرادات دالة (Imports Function) لكل من النتائج القومي والأسعار المحلية (P) و (GNP) وأن سحب متغير من الدالة يعتبر خروجا عن التسلسل العلمي والمنطقي لمفهوم النظرية الاقتصادية

ومن هذا نستنتج أن الحالة التقليدية التي يظهر لها الارتباط الخطي المتعدد في النموذج البسيط عندما لا يوجد أي متغير من المتغيرات المستقلة معنويا إحصائيا، بالرغم من كون ($R^2$) عال، أي يقع بين الواحد و (٧٠%)، وفي بعض الأحيان فإن معامل الارتباط للنموذج الخطي العام قد يستخدم معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرات المستقلة كمقياس للتداخل الخطي المتعدد، وأيضا يجب ملاحظة أن الارتباط الخطي المتعدد (Mc) لا يعتمد ظهوره في بيانات السلاسل الزمنية (Time Series) فقط، فهو كثيرا ما يظهر في بيانات المقطع العرضي (Cross – Section)، ومثال ذلك في حالة أخذ عينة من العمال ورأس المال كمتغيرات أساسية في إنتاج سلعة معينة في شركة صناعية كبيرة، نجد بأن هذين العنصرين متداخلان بصورة عالية مع بعضهما، والسبب يعود إلى أن الشركات الضخمة تتجه نحو استخدام كميات كبيرة من العمل ورأس المال عكس الشركات الصغيرة.

(٤-٨) ظهور التداخل الخطي المتعدد (Mc) رياضيا في نموذج الانحدار الخطي البسيط:

يكون ظهور التداخل الخطي بين المتغيرات المستقلة، على نوعين:

التداخل الخطي التام Perfect Multicollinearity:

يكون التداخل بين المتغيرات المستقلة تاما (Perfet) إذا كان $rx_ix_j = 1$ وفي هذه الحالة فإن النتائج هي:

i- تقدير معلمات النموذج غير ممكنة.

ii- الخطأ المعياري للمعلمات يصبح كبيرا جدا ما لانهاية (Large Infinitely)، وللبرهان على ذلك نأخذ الحالة أولا.

أ- لنفترض بأن العلاقة تأخذ الصيغة التالية:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + U_i$$

وأن $X_2$ و $X_3$ مرتبطان بعلاقة خطية تامة أي أن:

$$X_3 = K\,X_2$$

حيث تمثل (K) أي عدد ثابت (Constant) لا يساوي الصفر، وعليه فإن صيغة تقدير كل من معلمات $(\hat{\beta}_2)$، $(\hat{\beta}_3)$ وبأخذ صيغة الانحرافات سيكون كما يلي:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\left(\sum x_2 y\right)\left(\sum x_3^2\right) - \left(\sum x_3 y\right)\left(\sum x_2 x_3\right)}{\left(\sum x_2^2\right)\left(\sum x_3^2\right) - \left(\sum x_2 x_3\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\left(\sum x_3 y\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_2 y\right)\left(\sum x_2 x_3\right)}{\left(\sum x_2^2\right)\left(\sum x_3^2\right) - \left(\sum x_2 x_3\right)^2}$$

وبتعويض $(Kx_3)$ لقيم $(x_3)$ نحصل على:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{K^2\left(\sum x_2 y\right)\left(\sum x_2^2\right) - K^2\left(\sum x_2 y\right)\left(\sum x_2^2\right)}{K^2\left(\sum x_2^2\right)^2 - K^2\left(\sum x_2^2\right)^2} = \frac{0}{0}$$

وهذا يعني أن القيمة التقديرية لمعلمة $\hat{\beta}_2$ مساوية للصفر:

$$\hat{\beta}_3 = \frac{K^2\left(\sum x_2 y\right)\left(\sum x_2^2\right) - K^2\left(\sum x_2 y\right)\left(\sum x_2^2\right)}{K^2\left(\sum x_2^2\right)^2 - K^2\left(\sum x_2^2\right)^2} = \frac{0}{0}$$

من هذا نستنتج أن تقديرات المعلمات لا يمكن تحديدها، ولا يوجد طريق لإيجاد قيم منفصلة لكل معلمة.

ii- أيضا إذا كان $rx_ix_j = 1$.

فإن الخطأ المعياري للمعلمات يصبح كبيرا ما لا نهاية، ففي حالة النموذج السابق فإن:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + U_i$$

وإذا كان $(X_2)$، و $(X_3)$ مرتبطين تماما أي $(X_3 = KX_2)$، فإن تباين كل من $(\hat{\beta}_2)$، $(\hat{\beta}_3)$ سيكون بالشكل التالي:

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}_2\right) = \sigma_u^2 \frac{\sum x_2^2}{\sum x_2^2 \sum x_2^2 - \left(\sum x_2 x_3\right)^2}$$

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}_3\right) = \sigma_u^2 \frac{\sum x_3^2}{\sum x_2^2 \sum x_3^2 - \left(\sum x_2 x_3\right)^2}$$

وبتعويض $Kx_2$ for $x_3$ نحصل على:

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}_2\right) = \sigma_u^2 \frac{K^2 \sum x_2^2}{K^2 \sum x_2^2 \sum x_2^2 - K^2 \left(\sum x_2 x_2\right)^2}$$

$$= \sigma_u^2 \frac{K^2 \sum x_2^2}{K^2 \left(\sum x_2^2\right)^2 - K^2 \left(\sum x_2^2\right)^2} = \frac{K^2 \sum x_2^2}{0} = \propto$$

وهكذا نجد أن تباين كل من مقدرات النموذج يساوي ما لا نهاية ولا يوجد سبب أساسي أن لجعل التباين مساويا للصفر في حالة التداخل الخطي بين متغيرات النموذج المستقلة.

ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة باستخدام معادلة النموذج الخطي العام وبطريقة انحرافات القيم عن وسطها الحسابي كالآتي:

طالما تهتم ظاهرة (Mc) الارتباط الخطي المتعدد التام بالعلاقة بين $(X_2)$ و $(X_3)$، والتي تساوي واحدا فيمكن توضيح ذلك بأخذها كمعادلة خطية بسيطة، تأخذه الصيغة التالية:

$X_{2i}$ a + b $X_{3i}$ ………………………. (1)

وحيث إن $b \neq 0$، بقسمة المعادلة (١) على (n)، وأخذ المجموع لجانبي المعادلة نحصل على:

$$\frac{\sum X_{2i}}{n} = \frac{na}{n} + b\frac{\sum X_{3i}}{n}$$

وهذه تعني أن:

$$\overline{X}_2 = a + b\overline{X}_3 \quad \text{……………………. (2)}$$

وبطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) نحصل على:

$$(X_{2i} - \overline{X}_2) = a + b X_{3i} - (a + b\overline{X}_3)$$

$$(X_{2i} - \overline{X}_2) = b X_{3i} - b\overline{X}_3$$

$$x_{2i} = b\, x_{3i} \quad \text{……………………………. (3)}$$

وبما أن معامل الارتباط بين (x2i), (x3i) يأخذ الصيغة التالية:

$$\therefore\ r_{23} = \frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sqrt{\sum x_{2i}^2 . \sum x_{3i}^2}} \quad \text{………….. (4)}$$

وبتعويض المعادلة (٣) في معادلة الارتباط (٤) نحصل على ما يلي:

$$r_{23} = \frac{b\sum x_{3i}x_{3i}}{\sqrt{b^2\sum x_{3i}^2\sum x_{3i}^2}} = \frac{b\sum x_{3i}^2}{\sqrt{b^2\left(\sum x_{3i}^2\right)^2}} = \frac{b\sum x_{3i}^2}{b\sum x_{3i}^2} = 1$$

وهذا يعني كما ذكرنا سابقا بأن تباين كل من $\hat{\beta}_2$، $\hat{\beta}_3$ يساوي ما لا نهاية أي:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \infty$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_3) = \infty$$

حيث المقام يكون مساويا للصفر.

(٥-٨) ظهور الارتباط الخطي المتعدد في النموذج الخطي العام:

أما في حالة النموذج الخطي المتعدد، فإن مشكلة التداخل الخطي التام تظهر أيضا وبصورة أكثر وضوحا وواقعية خاصة إذا كان النموذج يتكون من أكثر من متغيرين مستقلين، ويمكن تبيان ذلك كما يلي:

لنفرض أن نموذجنا العام هو:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_3 i + \ldots + \beta_k X_{ki} + U_i \ldots\ldots [1]$$

وباستخدام انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يمكن كتابة النموذج على الصورة:

$$y_i = \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_3 i + \ldots + \beta_k X_{ki} + U_i \ldots\ldots [2]$$

وباستخدام المصفوفات فإن المعادلة التقديرية للنموذج الخطي العام تأخذ الصيغة التالية:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

وبضربها مسبقا في الحد $(X'X)$ نحصل على الصيغة التالية:

$$(X'X)\,\hat{\beta} = X'Y \ldots\ldots [3]$$

وبتطبيق صيغة الانحرافات فإن مكونات منظومة المعادلة [ ٣ ]* تكون كما يلي:

$$X = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ x_{22} & x_{32} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_{2n} & x_{2n} \end{bmatrix} \quad \therefore \underset{2.2}{\underbrace{(X'X)}_{(2.n)(n.2)}} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & \ldots x_{2n} \\ x_{31} & x_3 2 & \ldots x_{3n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ x_{22} & x_{32} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_{2n} & x_{3n} \end{bmatrix}$$

---

* راجع الملحق (B).

$$\therefore (X'X) = \begin{bmatrix} (x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{2n}^2) & (x_{21}x_{31} + x_{22}x_{32} + \ldots + x_{2n}x_{3n}) \\ (x_1x_{31} + x_{22}x_{32} + \ldots + x_{2n}x_3n) & (x_{31}^2 + x_{32}^2 + \ldots + x_{3n}^2) \end{bmatrix}$$

وبالجمع نحصل على:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{bmatrix}$$

وأما بالنسبة للحد $(X'Y)$ من المنظومة [ ٣ ] فإنه يساوي:

$$\underset{(2.1)}{\overset{X'Y}{(2.n)(n.1)}} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & \ldots & x_{3n} \end{vmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

وبالضرب نحصل على:

$$= \begin{bmatrix} x_{2i}y_1 + x_{22}y_2 + \ldots + x_{2n}y_n \\ x_{3i}y_1 + x_{32}y_2 + \ldots + x_{3n}y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{2i}y_i \\ \sum x_{3i}y_i \end{bmatrix}$$

ولذا فإن منظومة المعادلة [ ٣ ] تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \sum x_{21}^3 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{2i}y_i \\ \sum x_{3i}y_i \end{bmatrix}$$

وهذا يعني:

$$\left. \begin{array}{ll} \sum x_{2i}y_i = \hat{\beta}_2 \sum x_2^2 + \beta_3 \sum x_2x_3 & \ldots(a) \\ \sum x_{3i}y_i = \hat{\beta}_2 \sum x_2x_3 + \hat{\beta}_3 \sum x_3^2 & \ldots(b) \end{array} \right\} \ldots(4)$$

وهذه النتيجة عبارة عن المعادلتين الطبيعيتين اللتين تستخدمان في تقدير معلمات النموذج أعلاه ومن افتراضنا بأن:

$x_{2i} = b\, x_{3i}$ ................................................ (2)

إذن:

$x_{2i}\, y_i = bx_{3i}\, y_i$

وعليه فإن: $\sum x_{2i} x_{3i} = b \sum x^2_{3i}$

وبتعويض هذه النتائج في المعادلة (٤) نحصل على:

$$b \sum x_3 y_i = b ( \hat{\beta}_2 \sum x^2_3 + \hat{\beta}_3 \sum x^2_3)$$

$$\sum x_3 y_i = \hat{\beta}_2 \sum x^2_3 + \hat{\beta}_3 \sum x^2_3$$

وهكذا نجد أن كل من المعادلة الأولى مساوية تماما المعادلة الثانية مضروبة في (b) وعليه فإن كلتهما غير مستقلة بل مرتبطة، وكذلك فإن قيمة كل من ($\hat{\beta}_3$) و ($\hat{\beta}_2$) مرتبطتان وغير مستقلتين، كما افترضهما النموذج الخطي العام.

(٦-٨) الدرجة العالية من الارتباط الخطي المتعدد High Degree of Mc:

وهذه تمثل الحالة الأكثر ظهورا وتطبيقا في البحوث والدراسات القياسية، لأن الارتباط الخطي التام نادر الحدوث وخاصة في الدراسات الاقتصادية، وعندما يكون معامل الارتباط ($r_{23}$) قريبا من الواحد فإن مصفوفة التباين/ التباين المشترك (Variance and Covariance Matrix) لمعلمات $\left(\hat{\beta}\right)$ تتجه إلى ما لا نهاية، والمهم في هذا الموضوع هو اختبار فيما إذا كانت $\left(\hat{\beta}\right)$ معنوية أم غير معنوية، ويتم ذلك بمقارنة قيمة $\left(\hat{t}\right)$ المحسوبة مع قيمة (t) الجدولية عند مستوى معنوية معين، وكما نعلم بأن مصفوفة التباين والتباين المشترك تأخذ الصيغة التالية:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2_u \ (X' X)^{-1} \ \text{..............} \ [5]$$

فإن الارتباط الخطي المتعدد يكون عاليا إذا كانت المصفوفة ($X' X$) تتكون من تشكيلة متعامدة أو أكثر، ويتضمن ذلك أيضا كون المحدد للمصفوفة $|X' X|$ صغيرا جدا بحيث يكون $(X' X)^{-1}$ كبيرا جدا، وهذا يعني أن (Mc) الارتباط الخطي المتعدد عال عندما تكون $r23 \cong 95\%$ أي أن: $|X' X|$ يكون صغيرا، وعندئذ سيكون تباين $\left(\hat{\beta}\right)$ كبيرا جدا ويترتب على ظاهرة الارتباط الخطي المتعدد والمرتفع ما يلي:

١- تحتفظ مقدرات المربعات الصغرى بخواص الخطية وعدم التحيز، وتظل هذه المقـدرات غـير متحيزة حتى لو كان الارتباط بين المتغيرات شديد الارتفاع.

٢- إذا كان الهدف الأساسي هو التنبؤ، فإن الارتباط الخطي المتعدد لا يشكل مشكلة أساسية شريطة أن يستمر نمط الارتباط المتعدد خلال فترة التنبؤ على ما كان عليه خلال فترة التقدير.

وللتأكد من صحة هذا التحليل نأخذ الحالة التالية:

لو فرضنا وجود النموذج الخطي العام التالي:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + U_i$$

وباستخدام الانحرافات عن الأوساط الحسابية نحصل على:

$$y_i = \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + U_i$$

وأن تباين التقديرات هو:

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 \ (X'X)^{-1}$$

ومن تحليلنا إلى هذه المعادلة نجد أن $(X'X)^{-1}$ تتكون من:

$$X = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ x_{22} & x_{32} \\ x_{23} & x_{33} \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

إذن:

$$\therefore (X'X) = \begin{bmatrix} \sum x_{21}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{bmatrix}$$

وللحصول على $(X'X)^{-1}$ نطبق صيغة المعكوس وهي:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} \cdot A_{dj}\,(X'X)$$

ولتطبيق $(A_{dj})$ نأخذ المرافق (Cofactor) لمصفوفة $(X'X)$، ثم التبديل (Transpose) لنحصل على:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \sum x_{31}^2 & -\sum x_{2i}x_{3i} \\ -\sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

ويتم حساب محدد المصفوفة $| X' X |$ كما يلي:

$$| X' X | = \sum x^2_{2i} - (\sum x_{2i}\, x_{3i})^2$$

وبحصولنا على $(X' X)^{-1}$، وقسمته على المقدار $(\sum x^2_{3i}\, x^2_{2i})$ نحصل على ما يلي:

$$| X' X | = \left( \frac{\left(\sum x_{3i}^2 \sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2 \sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{2i} x_{3i}\right)^2}{\sum x_{3i}^2 \sum x_{2i}^2 \quad \sum x_{3i}^2 \sum x_{2i}^2} \right) . \sum x^2_{3i} \sum x$$

$$\sum x^2_{3i} \sum x^2_{2i}$$

وبما أن معامل الارتباط $X_3, X_2$ هو عبارة عن:

$$r_{23} = \frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sqrt{\sum x_{2i}^2 . \sum x_{3i}^2}}$$

وبالتعويض في صيغة المحدد $| X' X |$ أعلاه نحصل على:

$$| X' X | = \sum x^2_{3i} \sum x^2_{2i} - r^2_{23} (\sum x^2_{3i} \sum x^2_{2i})$$

وعليه ستكون قيمة المحدد $| X' X |$ بعد ترتيب الصيغة أعلاه كما يلي:

$$| X' X | = \sum x^2_{3i} . \sum x^2_{2i} (1 - r^2_{23})$$

ولتسهيل الاشتقاقات القادمة لنفترض أن المحدد:

$$| X' X | = D$$

إذن $(X' X)^{-1}$ سيكون كما يلي:

$$(X' X)^{-1} = \frac{A_{dj}(X'X)}{|X'X|}$$

وهذا يعني بأن:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \sum x_{3i}^2 & -\sum x_{2i} x_{3i} \\ -\sum x_{2i} x_{3i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum x_{3i}^2}{D} & -\frac{\sum x_{2i} \sum x_{3i}}{D} \\ -\frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{D} & \frac{\sum x_{2i}^2}{D} \end{bmatrix}$$

وبما أن:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 \ (X' X)^{-1}$$

إذن:

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \frac{\sum x_{3i}^2}{D} & -\frac{\sum x_{2i} \sum x_{3i}}{D} \\ -\frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{D} & \frac{\sum x_{2i}^2}{D} \end{bmatrix}$$

ويتكون تباين $\left(\hat{\beta}\right)$ من العناصر القطرية مضروبة في $\left(\sigma_u^2\right)$، أما العناصر الباقية فهـي عبارة عن التغاير لكل من $(\hat{\beta}_2), (\hat{\beta}_3)$.

وعليه فإن:

$$\text{Var}\ (\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma_u^2 \sum x_{3i}^2}{D} = \frac{\sigma_u^2 \sum x_{3i}^2}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 (1 - r_{23}^2)}$$

$$\therefore\ \text{Var}\ (\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_{2i}^2 (1 - r_{23}^2)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (a)\ [\ 6\ ]$$

وبنفس الأسلوب نحصل على تباين $(\hat{\beta}_3)$ وكما يلي:

$$\therefore\ \text{Var}\ (\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_{3i}^2 (1 - r_{23}^2)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (b)\ [\ 6\ ]$$

أما معامل التباين المشترك لكل من $(\hat{\beta}_2), (\hat{\beta}_3)$، فهو عبارة عن العناصر غـير القطريـة في مصفوفة $(X'\,X)^{-1}$ مضروبة في $\left(\sigma_u^2\right)$ وكما يلي:

$$\text{Covar}\ (\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \frac{\sigma_u^2\left(-\sum x_2 x_{3i}\right)}{\sum x_{21}^2 \sum x_{31}^2 (1 - r_{23}^2)} = \frac{-\sigma_u^2 \sum x_{21} x_{31}}{\sum x_2^2 \sum x_3^2 (1 - r_{23}^2)} \ ..\ [\ 7\ ]$$

وبما أن $\left(\sigma_u^2\right)$ مجهولة فيتم اشتقاقه باستخدام الصيغة التالية:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} = \frac{e'e}{n - k}$$

ومما سبق نستطيع أن نستنتج ما يلي:

في حالة النموذج الاقتصادي الذي يضم متغـيرين مسـتقلين فـإن مقيـاس درجـة التـدخل الخطي المتعدد (Mc) هو $(r_{23})$ حيث يشكل موقعا مهما في مقام صـيغة التبـاين لكـل $(\hat{\beta}_2), (\hat{\beta}_3)$ لاحظ منظومة المعادلة [ ٥ ]، وهذا يعني كلما كبر التباين ارتفعت درجة التداخل

الخطي المتعدد (Mc) أو ($r_{23}$)، وعليـه فكلـما ارتفعـت قيمـة ($r_{23}$) زاد التبـاين للمعلـمات، وبكلام آخر:

إذا كان $r_{23}$ = ١ فإن تباين ($\hat{\beta}_i$) يساوي ما لا نهاية.

إذا كان $r_{23} \cong$ ٠,٩٥ فإن تباين ($\hat{\beta}_i$) يكون مساويا لقيمة عالية.

وقد لاحظ بروفيسر جونسـتن "أن البـاحثين أحيانـا يحـذفون بعـض المتغـيرات خطـأ مـن التحليل، والسبب هو أن معلمات النموذج أو المتغير المحذوف غـير معنويـة، ولكـن في الحقيقـة ربما يكون المتغير المحذوف له تأثير قليل بسبب عدم حصولنا على بيانات دقيقة وكافيـة عنـه"[1]، ومنطق جونستن يقودنا إلى ضرورة ملاحظة وتقدير المعنوية باستخدام اختبار (t).

في هذه الحالة فإن اختبار (t) هو:

$$t^* = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{Var\left(\hat{\beta}_i\right)}} = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum x_2^2\left(1-r_{23}^2\right)}}}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{e'e/n-k/\sum x_2^2(1-r_{23}^2)}}$$

وعليه فإنه كلما كبر تباين ($\hat{\beta}_i$) كلما صغرت قيمـة $\left(\hat{t}\right)$ المحسـوبة، وهـذا يعنـي رفـض فرضية العدم Null hupsthesis ومثال ذلك:

فإذا كانت:

$$t^* = \frac{12}{6} = 2$$

ونفترض تضاعف التباين: فإن:

$$t^* = \frac{12}{12} = 1$$

[1] J. John ston; “Econometric Methods”, Op. Cit. P. 160. P. 195.

وإذا كانت قيمة (t) الجدولية تساوي (١,٥٠) ففي هذه الحالة الأولى نرفض فرض العدم، بينما نقبله في الحالة الثانية، وقد تغير القرار نتيجة لتضاعف التباين، ذلك التضاعف الذي يعزى إلى وجود الارتباط الخطي المتعدد بين $(X_3), (X_2)$ وزيادة في الإيضاح نأخذ المثال التالي:

لنفترض النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_i = \beta_2 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + U_i$$

وباستخدام انحرافات القيم عن وسطها الحسابي نحصل على:

$$\therefore y_i = \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + U_i - U$$

$$\left.\begin{array}{l} \because \sum x_{2i} = 0 \\ \because \sum x_{3i} = 0 \end{array}\right\}$$

والسبب يعود إلى كون المتغيرات $(X_3)$ في صيغة انحرافات، وبما أن هي متغيرات ثابتة، نفترض أن العلاقة بين المتغير $(x_2), (x_3)$ كما يلي:

$$x_{3i} = \alpha x_{2i} + \gamma$$

$$\sum x_{2i} = \sum x^2_{3i} = 1$$

وبما أن:

$$\sum U_t = 0$$

و: $\sum U_t x_2 = 0$

ويتضح لنا بأن:

$$r_{23} = \alpha$$

وأن: $(X' X) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$

ومن استخدام الصيغة العامة لتباين المعلمات:

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 \, (X' X)'^1$$

إذن:

$$(X' X)^{-1} = \frac{\sigma_u^2}{1-\alpha^2}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

من هذا نستنتج أن:

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{1-\alpha^2}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \text{Var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma_u^2}{1-\alpha^2}$$

والتباين المشترك هو:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \frac{-\alpha\sigma_u^2}{1-\alpha^2}$$

ومن هذا نستنتج أن الارتباط الخطي المتعدد يزداد بمقدار ($\alpha$) في حين مجموع المربعات الأخطاء (Sum of Squares)، سوف يستمر كما هو بدون تغير، ومن ثم:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{e'e}{n-k}$$

حيث ($e'\ e$) تبقى كما كانت عليه في النموذج الخطي العام GLM، وبرهان ذلك كما يلي باختصار*.

$$\therefore Y = X\beta + e$$

$$\therefore e = Y - X\hat{\beta}$$

وبالتعويض:

$$e = Y - X[(X'X)^{-1}X'Y]$$

وبالتعويض:

$$e = [X\beta + U] - X[(X'X)^{-1}X'(X\beta + U)]$$

$$e = [X\beta + U] - X[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X', X)^{1}X'U]$$

$$e = [X\beta + U] - X[\beta + (X'X)^{-1}X'U]$$

$$e = [X\beta + U] - X\beta - X(X'X)^{-1}X'U]$$

$$e = [X\beta + U - X\beta - X(X'X)^{-1}X'U]$$

$$e = U - X(X'X)^{-1}X'U$$

---

* راجع الملحق (B).

وبأخذ عامل مشترك نحصل على:

$$e = [\ I_n - X\ (X'\ X)^{-1}\ X'\ ]\ U$$

وللتبسيط لنفترض بأن A تساوي المقدار التالي:

$$\therefore\ A = [\ I_n - X\ (X'\ X)^{-1}\ X'\ ]$$

إذن:

$$e = AU$$

وأن معكوس (e) يساوي:

$$e' = U'\ A'$$

$$\therefore\ e'\ e = U'\ A'\ A\ U$$

وبأخذ القيمة المتوقعة لكلا الطرفين نحصل على:

$$E\ (e'\ e) = E\ (U\ U')\ A$$

والسبب هو أن المصفوفة (A) هي Idempotent Symetric Matrix وبأخذ (Trace of A) سنحصل على:

$$e'\ e = \sigma_u^2\ (n - k)$$

وبقسمة الطرفين على (n - k) نحصل على:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{e'e}{n-k}$$

وهي نفس النتيجة التي تم الحصول عليها سابقا.

(٧-٨) طريقة قياس أو الكشف عن التداخل الخطي المتعدد:

Method of Measuring Multicollinearity:

هناك طرق عديدة لكشف ولقياس مشكلة التداخل الخطي المتعدد، وتتمثل أهمها بما يلي:

١- محدد المصفوفة $|\ X'\ X\ |$:

قد يلجأ بعض الباحثين في تدقيق ظاهرة التداخل الخطي المتعدد إلى حساب محدد المصفوفة $|X'\ X|$، فإذا كانت $|\ X'\ X\ | = 0$.

فهذا يعني بأنه يوجد تداخل خطي متعدد تام أي، $r_{xixj} = 1$ وإذا كان محدد المصفوفة $|\ X'\ X\ |$ صغيرا أي $1 > |\ X'\ X\ |$ فهذا يعني وجود درجة عالية من التداخل الخطي المتعدد،

وقد يضلل هذا الأسلوب الباحثين عند اختيارهم أو قياسهم للتداخل الخطي المتعدد وذلك:

i- لأن قيمة المحدد غير مقيدة، وهذا يعني أن أحد المتغيرات ذو قيمة كبيرة جدا بحيث تتجه قيمة المحدد إلى ما لا نهاية.

ii- لأن قيمة المحدد تتأثر بتباين العناصر المستقلة إضافة إلى التداخل والترابط فيما بينهما.

٢- حذف $R^2$:

وقد يلجأ بعض الباحثين إلى الكشف عن ظاهرة التداخل الخطي وذلك باللجوء إلى تقدير ($R^2$) لمعادلة النموذج، وكذلك إلى تقدير ($R^2$) بحذف متغير مستقل واحد على التعاقب،أي إذا افترضنا بأن معادلة النموذج الخطي المتعدد تتكون من: $Y_i = f(X_2, X_3, X_4)$.

وبهذا سيتم الحذف ثلاث مرات كالآتي:

$Y_i = f(X_2, X_4)$

$Y_i = f(X_3, X_4)$

$Y_i = f(X_2, X_3)$

ويقدر معامل الارتباط $R^2$ وعليه يكون التداخل الخطي عاليا كلما كان الفرق بين $R^2$ للحالات المحذوفة من المتغيرات التابعة قليلا، وهذه الطريقة ليست عملية في الكشف عن التداخل الخطي المتعدد.

٣- طريقة فرار – كلوبر Farrer – Glouber:

يستخدم كلا من فرار - كلوبر (F. G) الوسائل التالية في الكشف عن ظاهرة التداخل الخطي المتعدد وهي:

١- قياس الارتباط الخطي المتعدد بمعرفة معاملات الارتباط بين المتغيرات.

٢- تحديد المتغيرات المتداخلة باستخدام اختبار (F).

٣- تحديد المتغيرات المسببة للتداخل الخطي باستخدام اختبار (t).

٤- استخدام مربع كاي $\chi^2$ للكشف عن الارتباط الخطي المتعدد وهذا يعني:

i- تعيين المحدد لكل عنصر أي $\sum x^2$ وهذا يشير إلى:

ii- قياسية المحدد (Standarized)، وتقسيمه على الجذر التربيعي لها أو $\dfrac{\sum x_i^2}{\left(\sqrt{\left(\sum x_i\right)^2}\right)^2}$

وهذا يشير إلى:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sum x_1^2}{\left(\sqrt{\left(\sum x_i\right)^2}\right)^2} & \frac{\sum x_1 x_2}{\sqrt{\sum x_1^2}\sqrt{\sum x_2^2}} & \frac{\sum x_1 x_3}{\sqrt{\sum x_1^2}\sqrt{\sum x_3^2}} \\ & & \vdots \\ \frac{\sum x_1 x_2}{\sqrt{\sum x_1^2}\sqrt{\sum x_2^2}} & \frac{\sum x_2^2}{\left(\sqrt{\left(\sum x_2\right)^2}\right)^2} & \cdots\cdots \\ & & \vdots \\ & & \frac{\sum x_3^2}{\left(\sqrt{\sum x^2}\right)^2} \end{bmatrix}$$

iii- إعادة كتابة الصيغة القياسية أعلاه بشكل معاملات ارتباط ($r_{x1x2}$) كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{x1x2} & r_{x1x3} \\ r_{x1x2} & 1 & r_{x2x3} \\ r_{x1x3} & r_{x2x3} & 1 \end{bmatrix}$$

التداخل التام بأخذ الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{x1x2} \\ r_{x1x2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ومحدد هذه المصفوفة يساوي صفرا.

وعموما فإنه ومن مراجعة المصادر العلمية الخاصة بالموضوع وجدنا عدة طرق أخرى للكشف ولقياس Mc منها استخدام t، F، R.

استخدام المعلومات الخارجية (المربعات الصغرى المقيدة)، أو زيادة المعلومات الهيكلية.

أولا: طرق الحلول الإحصائية البحتة والمتمثلة في:

أ- المكونات الرئيسية (Principle Component).

ب- انحدار التل (المنحنى) Rigde Regression Method.

والخلاصة فإنه يمكن استعمال معامل الارتباط البسيط والذي يعده بعض القياسيين شرطا كافيا Sufficient Condition يكشف عن Mc ولكنه ليس ضروريا Necessary Condition يدلل به على وجود ارتباط خطي متعدد.

(٨-٨) نموذج سيلفي للارتباط الخطي المتعدد S. D. Silvey Model:

توجد عدة نماذج عالجت ظاهرة الارتباط الخطي المتعدد، أحدها هو نموذج سيلفي (S. D. Silvey)، وسوف نتناول في هذا المبحث نموذج سيلفي كحالة تطبيقية، حيث يلاحظ في حالات كثيرة أن الاقتصاديين القياسيين ليست لديهم القابلية للسيطرة على بيانات الظاهرة المدروسة للحصول على أفضل المقدرات، وأن أسلوب فرار - كلوبر لا يعطي الدليل القاطع للتخلص من مشكلة الارتباط الخطي المتعدد، وهذه المشكلة تم إيجاد حل لها حديثا من قبل سيلفي S. D. Silvey، والذي أوضح الأسباب، وطبيعة الارتباط الخطي المتعدد، ونموذج سيلفي يركز بالأساس على استخدام الخطأ المعياري (Standard Error)، وقد تساءل سيلفي عن: (ماهية البيانات الإضافية التي سوف تقلل من الخطأ المعياري)، وعليه فنموذج سيلفي يبحث في تخفيض الخطأ المعياري، أو لتخفيض من الارتباط الخطي المتعدد.

(١-٨-٨) فرضيات نموذج سيلفي لمعالجة الارتباط الخطي المتعدد:

بموجب فرضيات النموذج الخطي العام تكون المصفوفة $(X' X)$ ذات أبعاد $(K.K)$ كما يلي:

$$\underset{(K.n)\,(n.K)}{(X'\,X)}$$

وهذه المصفوفة تتصف بكونها محددة، موجبة، ومتماثلة، أي (Symetric, Positive Definit Matrix)، وتتضمن (K) جذرا مميزا موجبا (Positive Latent Roots)، وهي: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$، ولنفترض بأن:

$$\underset{(K.K)}{V} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \ldots & V_{1i} & \ldots & V_{1k} \\ V_{21} & V_{22} & \ldots & V_{2i} & \ldots & V_{2k} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ V_{i1} & V_{i2} & \ldots & V_{ii} & \ldots & V_{ik} \\ . & . & & . & & . \\ V_{ki} & V_{k2} & \ldots & V_{ki} & \ldots & V_{kk} \end{bmatrix}$$

وأن مصفوفة (V) تشـمل المتجهـات المميـزة (Latent Vectors)، حيـث ($V_i$) تشـير إلى المتجـه العمودي المناظر للجذر بـ ($\lambda$) وعليه فإن:

$$(X' X) = V_i = \lambda_i V_i \text{ ................. [ 1 ]}$$

وأيضا فإن:

$$V' V = V V' = I \text{ .................... [ 2 ]}$$

وهذا يعني أيضا أن:

$$\therefore V' = V^{-1}$$

فإذا أشرنا إلى مقدرات المعلمات بتشكيلة خطية متكونة من الحد [ $C' \beta$ ] وحيث إن:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ . \\ . \\ . \\ C_k \end{bmatrix}$$

وهي ذات أبعاد (k. 1) أي متجه بعناصر معلومة وأن المتجه [ c ] يوضح التشكيلة الخطية لتعامد المتجهات المميزة (k) ويمن توضيح ذلك كما يلي:

$$\underset{(k.\ 1)}{C} = \underset{(k.\ k)}{V} \ \underset{(k.\ 1)}{\alpha} \text{ ..................... [ 3 ]}$$

(k. 1)

ويمكن إعادة كتابة المصفوفة أعلاه كما:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ . \\ . \\ . \\ C_i \\ . \\ . \\ C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1i} & \dots & V_{1k} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2i} & \dots & V_{2k} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ V_{i1} & V_{12} & \dots & V_{ii} & \dots & V_{1k} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ V_{k1} & V_{k2} & \dots & V_{ki} & \dots & V_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_i \\ . \\ . \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

(٨-٨-٢) التباين Variance في نموذج سيلفي:

من المعروف أن تباين هو:

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 \; (X' X)^{-1}$$

ولذا فإن تباين التشكيلة الخطية لمعلمات $\left(\hat{\beta}\right)$ ستأخذ الصيغة التالية:

$$\text{Var}\,(C' \hat{\beta}) = \sigma_u^2 \; (X' X)^{-1} . C$$

وباستخدام المعادلة [ ٢ ] نحصل على:

$$\text{Var}\,(c' \hat{\beta}) = \sigma_u^2 \; (V \alpha)' \, (X' X)^{-1} \, (V \alpha)$$

وبالتعويض في منظومة المعادلة [ ٣ ]، نحصل على:

$$\text{Var}\,(c' \hat{\beta}) = \sigma_u^2 \; \alpha' \, V' \, (X' X)^{-1} \, V \, \alpha$$

وبما أن:

$$(X' X) \, v_i = \lambda \, v_i$$

إذن:

$$\text{Var}\,(c' \hat{\beta}) = \sigma_u^2 \; \alpha' \, V' \, (\lambda)^{-1} \, V \, \alpha$$

وبما أن الحد:

$$[\, V' \, (\lambda)^{-1} \, V \,]$$

هو عبارة عن قيمة (مفردة) Scaler إذن:

$$\therefore \; \text{Var}\,(c' \hat{\beta}) = \sigma_u^2 \; \alpha' \, \lambda^{-1} \, V' \, V \, \alpha$$

وبما أن:

$$V' \, V = I_n$$

إذن: $\text{Var}\,(c' \hat{\beta}) = \sigma_u^2 \; \alpha' \, \lambda^{-1} \, \alpha \, I_n$

لنفترض أن: $\lambda = \Omega^{-1}$

إذن:

$$\text{Var}\,(c' \hat{\beta}) = \sigma_u^2 \; \alpha' \, \Omega^{-1} \, \alpha$$

وحيث إن: $\Omega$ تساوي:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}, \therefore \Omega^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_k \end{bmatrix}$$

وعليه فإن منظومة المعادلة الأخيرة للتباين تأخذ الشكل التالي:

$$\text{Var}(c' \hat{\beta}) = \sigma_u^2 \ [\alpha_1 \ \alpha_2 \dots \alpha_k]. \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & & \\ . & . & & \\ . & . & & \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_k \\ & (k.k) & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \\ \\ \alpha_k \\ (k.1) \end{bmatrix}$$

$$\text{Var}(c' \hat{\beta}) = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\lambda_1} & \frac{\alpha_2}{\lambda_2} & \dots & \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

Scaler (1. k) (k. 1)

وهي (مفردة) Scaler

أي أن:

$$\text{Var}(c' \hat{\beta}) = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^2}{\lambda_1} & \frac{\alpha_2^2}{\lambda_2} & \dots & \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

وهكذا نجد أن التباين يعتمد على معكوس الجـذر المميـز للمصـفوفة $(X' X)$، وأنـه كلـما قلت $(\lambda_i)$ كلما زادت مساهمتها في التباين، وصحيح أيضا فكلما كبرت $(\lambda_i)$ كلما قل التباين.

فإذا كان اهتمامنا في (ith) من المعلمات ($\hat{\beta}_i$) فإن التباين ($c'\hat{\beta}$) يساوي ما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots 1 & \ldots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \hat{\beta}_i$$

وهذا يقودنا إلى القول بأن (c) لهـا وحـدة واحـدة في (ith) موجبـة، وتكـون بقيمـة القـيم المساوية للصفر، وإن إعطاء هذا التحديد لـ: (c) يؤدي إلى:

$C = V\alpha$ من المعادلة [ ٣ ]

و $V' = V^{-1}$ من المعادلة [ ٢ ].

وبالضرب المسبق لمنظومة المعادلة [ ٣ ] في المقدار ($V^{-1}$) نحصل على:

$$V^{-1} C = V^{-1} V \alpha$$

وبما أن:

$$V^{-1} V = I$$

إذن:

$$\underset{(k.\,1)}{\alpha} = \underset{(k.\,k)}{V^{-1}}\ \underset{(k.\,1)}{C} = V' C$$

وباستخدام المصفوفات فإن منظومة هذه المعادلة تأخذ الشكل التالي:

$$\alpha = V^{-1}C = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_i \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{21} & \dots & V_{i1} & \dots & V_{k1} \\ V_{12} & V_{22} & \dots & V_{i2} & \dots & V_{k2} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ V_{1i} & V_{2i} & & V_{ii} & \dots & V_{ki} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ V_{1k} & V_{2k} & & V_{ik} & & V_{kk} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \\ . \\ . \\ . \\ V_{ii} \\ . \\ . \\ . \\ V_{ik} \end{bmatrix}$$

حيث إن: $V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{ik}$ هي عناصر الصف (ith) في مصفوفة (V) أعلاه.

وهكذا نجد أن:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_i) = \sigma_u^2 \left( \frac{V_{i1}^2}{\lambda_1} + \frac{V_{i2}^2}{\lambda_2} + \dots + \frac{V_{ik}^2}{\lambda_k} \right) \quad \dots\dots\dots\dots\dots [5]$$

حيث إن $(i = 1, 2, \dots, k)$.

(٣-٨-٨) التوسع في نموذج سليفي:

فإذا افترضنا إمكانية الحصول على بيانات إضافية للمتغير (X)، أي أن حجم العينـة يـزداد من (n) إلى (n + 1) من المشاهدات، وهذا يعني مثلا زيادة مصفوفة (X) بصف إضافي، لنفترض بأن المصفوفة الجديدة هي (X.)، وذات أبعاد هي ((n + 1). K) فإذا كانت المصفوفة (X′. X.) لهـا الجـذر المميز، وهذه مشابهة لما هو موجود في مصفوفة (X′ X)، بصورة عامة سيكون من الأفضـل زيـادة الجذر المميز بصورة أقل مما هي عليه من كبر، فالجذر ($\lambda_i$) يمكن زيادتـه بالبيانـات الإضـافية في مصفوفة ($V_i$)، تاركا المتجهات المميزة والجذور المميزة بدون تغيير، ولنفترض بأن (X) زادت بصف آخر يأخذ الشكل (dvi) حيث أن (d) هي عدد غير مساو للصفر فنحصل على:

$$\underset{(n+1).k}{X^*} = \begin{bmatrix} \underset{(n.k)}{X} \\ \underset{(1.k)}{dvi'} \end{bmatrix}$$

حيث: $dvi = d\,(V_{1i} \quad V_{2i} \quad \dots \quad V_{ii} \quad \dots \quad V_{ki})$

وعليه:

$$\underset{(k.k)}{\overset{X'_*X_*}{k.(n+1)(n+1).k}} = \begin{bmatrix} X' & dV_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ dV_i \end{bmatrix}$$

$$X'.\,X. = X'\,X + d^2\,V_i\,V'_i$$

وبضرب طرفي المعادلة لاحقا (Post) في $(V_i)$ لنحصل على:

$$X'.\,X.\,V_i = X'\,X\,V_i + d^2\,V_i\,V'_i\,V_i$$

ومن المعادلة $X'\,X\,Vi = \lambda_i\,V_i$ [ 1 ]

ومن المعادلة $V'_i\,V_i = 1$ [ 2 ]

إذن: $X'.\,X.\,V_i = \lambda_i\,V_i + d^2\,V_i$

أي أن: $X'.\,X.\,V_i = (\lambda_i + d^2)\,V_i$

وهي نفس المعادلة [ ١ ] أعلاه بالضبط ما عدا وجود الجذر المميز، وهذه النتيجة تتضمن بأن $(V_i)$ هو المتجه المميز للمصفوفة $(X'.\,X.)$ والمناظر للجذر $(\lambda^2 + d^2)$ والأكثر من ذلك فإذا كان لدينا:

$$X'.\,X.\,V_j = X'\,X\,V_j + d^2\,V_i\,V'_i\,V_j$$
$$= \lambda_j\,V_j$$

حيث إن $V'_i\,V_i = 1$ ومن منظومة المعادلة [ ٢ ].

وعليه فإن $(V_j)$ هو المتجه المميزة للمصفوفة $(X'.\,X.)$ المناظر في جذر $(\lambda_j)$، وعليه فإن المتجهات المميزة للمصفوفة $(X'.\,X.)$ هي نفسها للمصفوفة $(X'\,X)$، وجميع الجذور المميزة تتشابه أو نفسها باستثناء $(\lambda_j)$ الذي يزداد إلى $(\lambda_i + d^2)$، يوضح هذا الشرح اتجاه المشاهدات الجديدة التي من المفروض أن تزيد من الجذر المميز.

والسؤال المهم في هذا الإطار هو ما هو الاتجاه الأمثل لتطوير تقديرات $(\beta_i)$؟ أو بصورة عامة المصفوفة $(C'\,\hat{\beta})$، النتيجة المهمة البروفيسور سيلفي هي لتطوير تقديرات $(C'\,\hat{\beta})$ ووصفها في الاتجاه الأمثل يكمن في المشاهدات الجديدة في المتجه.

$$(1 + X'\,X)^{-1}.\,C$$

وللبراهين يفضل الرجوع إلى أصل النموذج[1].

---

(1) S. D. Silvey; "Multicollinearity and Imprecise Estimation", J. Royal Statistics Soc, Series B. Vol 31. PP, 539-552, 1969.

(٩-٨) تطبيقات وتمارين:

**(١-٩-٨) التطبيقات:**

التطبيق الأول:

الجدول التالي يمثل الإنتاج بالأطنان (Q) أو عنصر العمل (عامل/ ساعة) "L"، وعنصر رأس المال (ماكنة/ ساعة) "K"، لعينة من شركات القطاع الصناعي عددها "١٥" في بلد معين ولفترة زمنية محددة، والبيانات كالآتي:

| عدد الشركات | راس المال | العمل | الإنتاج |
|---|---|---|---|
| n | K | L | Q |
| ١ | ١٥٧٠ | ٢٣٣٤ | ٢٣٥٠ |
| ٢ | ١٨٥٠ | ٢٤٢٥ | ٢٤٧٠ |
| ٣ | ١١٥٠ | ٢٢٣٠ | ٢١١٠ |
| ٤ | ١٩٤٠ | ٢٤٦٣ | ٢٥٦٠ |
| ٥ | ٢٤٥٠ | ٢٥٦٥ | ٢٦٥٠ |
| ٦ | ١٣٤٠ | ٢٢٧٨ | ٢٢٤٠ |
| ٧ | ١٧٠٠ | ٢٣٨٠ | ٢٤٣٠ |
| ٨ | ١٨٦٠ | ٢٤٣٧ | ٢٥٣٠ |
| ٩ | ١٨٨٠ | ٢٤٤٦ | ٢٥٥٠ |
| ١٠ | ١٧٩٠ | ٢٤٠٣ | ٢٤٥٠ |
| ١١ | ١٤٨٠ | ٢٣٠١ | ٢٢٩٠ |
| ١٢ | ١٢٤٠ | ٢٢٥٣ | ٢١٦٠ |
| ١٣ | ١٦٦٠ | ٢٣٦٧ | ٢٤٠٠ |
| ١٤ | ١٨٥٠ | ٢٤٣٠ | ٢٤٩٠ |
| ١٥ | ٢٠٠٠ | ٢٤٧٠ | ٢٥٩٠ |

المطلوب:

أ- قدر دالة الإنتاج كوب - دوكلاس من البيانات أعلاه، وفقا للصيغة الآتية:

$$Q = \beta_1 L^{\alpha_2} K^{\beta_3} e^{u}$$

ب- أوجد معامل الارتباط المعدل $R^{-2}$ ومعامل الارتباط البسيط بين كل من Log (L)، و Log (K).

حـ- أوجد انحدار (Q) على عنصر العمل (L) فقط.

د- أوجد انحدار "Q" على عنصر رأس المال (K) فقط.

هـ- ماذا تستنتج من هذه التقديرات فيما يخص مشكلة التداخل الخطي المتعدد.

الجواب:

أ- تحول البيانات والدالة إلى الصيغة اللوغاريتمية، وبعدها نستخرج انحدار Log (Q) على Log (L)، و Log (K)، وكما هو موضح أدناه:

$$\text{Log } Q = 0.50 + 0.76 \text{ Log } L + 0.19 \text{ Log } K$$

S. E: (1.07) (1.36)

ب-

$R^2 = 0.969$

$R'^2 = 0.964$

$r_{Lk} = 0.992$

حـ-

$$\text{Log } Q = -5.50 + 1.71 \text{ Log } L$$

S. E: (-7.74) (18.69)

$R^2 = 0.964$

د-

$$\text{Log } Q = 5.30 + 0.34 \text{ Log } K$$

(4.78) (19.19)

$R^2 = 0.966$

هـ- يلاحظ من الفرع (أ) بأن قيمة كل من ($\hat{\beta}_2$)، و ($\hat{\beta}_3$) إحصائيا غير معنوي بمستوى ٥% بينما يلاحظ بأن $R^2 = 0.97$ وهو مؤشر واضح للتداخل الخطي المتعدد، وسبب ذلك هو أن الشركات الكبيرة تستخدم كميات من العمل ورأس المال أكبر من الشركات الصغيرة، ومما يعزز صحة هذا التحليل هو أن معامل الارتباط البسيط بين

عنصر العمل ورأس المال كان عاليا جدا ويساوي ٠,٩٩.

أما نتائج الفرع (حـ) و (د)، فتشير إلى أن كلا من العمل (L) ورأسمال (K) إحصائيا معنويين بمستوى ٥% وأن $R^2$ لكليهما تجاوزت ٩٦%.

وعلى كل حال فإن حذف العمل أو رأس المال من معادلة الانحدار المتعدد تقود إلى أن تكون طريقة التقدير بموجب OLS متحيزة، حيث إن النظرية الاقتصادية تفترض أن كلا من العمل ورأس المال يجب أن يكونا دالة الإنتاج ولا يجوز فصلهما.

التطبيق الثاني:

يتناول المثال الآتي عدة حالات تتراوح فيها درجة ارتباط المتغيرين المستقلين في النموذج:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_{2i} X_2 + \beta_3 X_{3i} + u$$

بين الاستقلال الخطي التام والارتباط الخطي التام.

Perfect Linear Correlation Coefficient / Perfect Linear Independence.

الحالة الأولى: الاستقلال الخطي التام:

إذا كانت البيانات المتحصل عليها كالآتي:

| $Y_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_{2i}$ | 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| $X_{3i}$ | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 |

وباستخدام الانحرافات فإن هذا الجدول سيصبح كالآتي:

ويعد هذا الارتباط ضعيفا، وتتخذ المصفوفة $X'X$ الشكل التالي:

$$X'X = \begin{bmatrix} \sum x_2^2 & \sum x_2 x_3 \\ \sum x_3 x_2 & \sum x_3^2 \end{bmatrix}$$

وقيمة محددها هو $|X'X| = 328$.

وأما معكوسها فهو:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.144 & -0.037 \\ -0.037 & 0.030 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ تزايد قيم عناصر هذه المصفوفة في وجود نوع من الارتباط المتعدد ويمكن الحصول على مقدرات المربعات بتطبيق المصفوفة التالية:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} 0.144 & -0.037 \\ -0.037 & 0.030 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.893 \\ 0.006 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن:

$$\hat{y}_i = 1.194 + 0.893\ X_2 + 0.006\ X_3$$

وإن:

$$R^2 = 0.81$$

الحالة الثالثة:

ارتباط خطي مرتفع فإذا تغيرت مشاهدات المتغير $X_3$ فأصبحت كما يلي:

$$\left.\begin{matrix} Y: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ X_2: & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ X_3: & 0 & 1 & 2 & 6 & 8 \end{matrix}\right\}$$

ويصبح الانحرافات تصبح:

$$\left.\begin{matrix} y: & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ x_2: & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ x_3: & -3.4 & -2.4 & -1.4 & 2.6 & 4.6 \end{matrix}\right\}$$

ويشير معامل الارتباط الخطي البسيط هو:

$$r_{23} = 0.92$$

أما مصفوفة $X'X$ فإنها تصبح الآن:

$$X'X = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 47.2 \end{bmatrix}$$

وقيمة المحدد تتناقص أي $|X'X| = 72$.

ومعكوسها هو:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.65 & -0.28 \\ -0.28 & 0.14 \end{bmatrix}$$

وتحسب $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ كالآتي:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0.65 & -0.28 \\ -0.28 & 0.14 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.42 \end{bmatrix}$$

$\therefore \hat{Y} = 1.450 + 0.07 X_2 + 0.42 X_3$

وأن:

$R^2 = 0.94$

وبصورة الانحرافات تصبح البيانات كالآتي:

$$\begin{array}{llllll} y: & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ x_2: & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ x_3: & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

وعليه فإن معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين المستقلين الذي يستعمل كدلالة على مدى وجود مشكلة Mc هو:

$$r_{x2\,x3} = \frac{\sum x_2 x_3}{\sqrt{\sum x_2^2}\sqrt{\sum x_3^2}} = \frac{0}{\sqrt{10}\sqrt{6}} = 0$$

أي انعدام الارتباط الخطي بين المتغيرين، وأن المصفوفة $X'X$ تتخذ الشكل الآتي:

$$X'X = \begin{bmatrix} \sum x_2^2 & \sum x_2 x_3 \\ \sum x_3 x_2 & \sum x_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

وقيمة محددها هو:

$|X'X| = 60$

وعليه يمكن إيجاد معكوس $(X'X)^{-1}$ وهو:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.100 & 0 \\ 0 & 0.166 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإنه يمكن إيجاد مقدرات المربعات الصغرى باستعمال المصفوفة:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.100 & 0 \\ 0 & 0.166 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.900 \\ 0.166 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن:

$\hat{Y} = 0.867 + 0.900 X_2 + 0.166 X_3$

$R^2 = 0.827 \cong 0.83$

الحالة الثانية:

وجود درجة من الارتباط الخطي (ارتباط خطي ضعيف) تفترض وجود بيانات المتغير $x_{3i}$ اختلفت عن الحالة السابقة بحيث أصبحت العينة كالآتي:

$$\begin{array}{llllll} Y_i: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ X_{2i}: & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ X_{3i}: & 2 & 1 & 6 & 0 & 8 \end{array}$$

وباستخدام الانحرافات فإن العينة ستكون على الشكل الآتي:

$$\begin{array}{llllll} y_i: & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ x_{2i}: & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ x_{3i}: & -1.4 & -2.4 & 2.6 & -3.4 & 4.6 \end{array}$$

فمعامل الارتباط الخطي البسيط بين $x_2$، $x_3$ هو:

$$rx_2\,x_3 = \frac{12}{\sqrt{10}\sqrt{47.2}} = 0.552 \cong 0.55$$

وعليه فإن:

$$\hat{Y} = 1.450 + 0.07\,X_2 + 0.42\,X_3$$

$$R^2 = 0.94$$

(٢-٩-٨) تمارين:

١- ناقش طريقة فرار - كلوبر في الكشف عن التداخل الخطي المتعدد، ما هي أوجه اختلافها عن الطرق الأخرى؟

٢- في حالة التداخل الخطي المتعدد فإن مجموع المربعات يبقى بدون تغير أي: $\sigma_u^2 = \dfrac{e'e}{n-k}$، أوضح ذلك بالتفصيل.

٣- " إن درجة الارتباط الخطي المتعدد هي أكثر الحالات ظهورا في الدراسات القياسية ناقش مع توضيح دور مصفوفة تباين $\left(\hat{\beta}\right)$ في ذلك، متى وكيف يؤثر التداخل الخطي المتعدد على نتائج تحليل الانحدار؟

٤- ناقش مشكلة قياس درجة التداخل الخطي المتعدد في نماذج الانحدار لأكثر من متغيرين.

٥- ناقش ما يلي:

أ- التداخل الخطي التام وما هو تأثيره.

ب- الدرجة العالية من التداخل الخطي، وما هي المشاكل التي يسببها.

حـ- كيف يتم الكشف عن التداخل الخطي، وما هي إجراءات تقليل أثره.

٦- ناقش بتركيز الهدف من نموذج سيلفي؟ ما هي فرضيات هذا النموذج.

٧- " يعد نموذج سيلفي تطويرا لنموذج فرار - كلوبر في معالجة مشكلة التداخل الخطي المتعدد" ناقش بالتفصيل.

٨- يقوم نموذج سيلفي بالأساس على فكرة استخدام بيانات إضافية لتقليل الخطأ المعياري، وضح ذلك.

٩- قارن رياضيا بين نموذجي (فرار - كلوبر) وسيلفي في معالجة ظاهرة التداخل الخطي المتعدد.

١٠- أوضح بالتفصيل الصيغة النهائية التي توصل إليها البروفيسير سيلفي في معالجته القياسية لمشكلة التداخل الخطي المتعدد؟

١١- قام باحث بتقدير معالم النموذج التالي:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i$$

وذلك اعتمادا على البيانات التالية:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$: | 0 | 2 | 6 | 10 | 18 | 30 |
| $x_2$: | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $X_3$: | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |

١- حدد مقدرات $\hat{\beta}_2$ ، $\hat{\beta}_3$ التي سيتوصل إليها الباحث إذا ما استخدم المربعات الصغرى.

٢- هل تعاني هذه المقدرات من وجود ظاهرة الارتباط الخطي المتعدد؟

١٢- استخدم باحث النموذج التالي لدراسة دالة الطلب على سلعة معينة:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

حيث أن: (Y) الكمية المطلوبة، $X_2$ سعر السلعة، $X_3$ سعر السلعة البديلة وقد جمع الباحث البيانات التالية عن المتغيرات وكما يلي:

$$Y: \ 9 \ \ 7 \ \ 5 \ \ 5 \ \ 4$$
$$X_2: \ 1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5$$
$$X_3: \ 6 \ \ 6 \ \ 5 \ \ 2 \ \ 1$$

١- أوجد العلاقة المقدرة.

٢- هل تتوقع وجود مشكلة ارتباط خطي متعدد في هذا النموذج؟ وما هي أسبابه؟

١٣- من العلاقة المقدرة التالية:

$$\hat{y}_i = 18.3 - 0.5\, X_{2i} + 0.2\, X_{3i} - 0.3\, X_{4i}$$

$$S.\ E: (9.6)\ (0.1)\ (0.5)\ (0.8)$$

$$R^2 = 0.97,\ r_{x2x3} = 0.89,\ r_{x2x4} = 0.60.;\ r_{x3x4} = 0.98$$

باستعمال المعلومات المتوافرة أعلاه، هل نستطيع الجزم بوجود مشكلة الارتباط الخطي المتعدد أم لا؟ ما هي الإجراءات اللازمة للمعالجة.

١٤- في دراسة اقتصادية معينة استعمل النموذج الخطي التالي:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_2 i + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

حيث توصلنا إلى المعلومات التالية باستخدام الانحرافات:

$$X'X = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}, X'Y = \begin{bmatrix} 30 \\ -20 \end{bmatrix}; Y'\,Y = 390,\ n = 103$$

١- قدر معلمات $\hat{\beta}_2$ ، $\hat{\beta}_3$ ، أوجد النموذج التقديري.

٢- أوجد $R^2$.

٣- احسب $rx_2\,x_3$، ماذا تستنتج؟

# الفصل التاسع

# الارتباط الذاتي أو الارتباط المتسلسل

(Serial Correlation) Autocorrelation

**(٩-١) طبيعة الارتباط الذاتي ومفهومه.**

**(٩-٢) أسباب ظهور الارتباط الذاتي.**

**(٩-٣) الارتباط الذاتي واختبار المقدرات وحدود الثقة.**

**(٩-٤) خصائص المتغير العشوائي المترابط.**

**(٩-٤-١) الوسط الحسابي للمتغير العشوائي.**

**(٩-٤-٢) التباين للمتغير العشوائي.**

**(٩-٤-٣) التباين المشترك للمتغير العشوائي.**

**(٩-٥) أثار مشكلة الارتباط الذاتي بين قيم المتغير العشوائي.**

**(٩-٦) طرق الكشف عن الارتباط الذاتي.**

**(٩-٦-١) اختبار دربن - واطسون للكشف عن الارتباط الذاتي.**

**(٩-٦-٢) اختبارات فون - نيومن، وثايل وهنشر وغيرها.**

**(٩-٧) طريقة معالجة الارتباط الذاتي.**

**(٩-٧-١) طريقة التحويل (كوكران - أوركات).**

**(٩-٧-٢) طريقة الإعادة (التكرار).**

**(٩-٧-٣) طريقة المربعات الصغرى العمومية.**

**(٩-٨) تطبيقات وتمارين.**

# الفصل التاسع

## الارتباط الذاتي أو الارتباط المتسلسل

## (Serial Correlation) Autocorrelation

(٩-١) طبيعة الارتباط الذاتي ومفهومه:

الفرضية الأساسية لتطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) في النموذج الخطي هي عدم وجود ظاهرة الارتباط الذاتي. وأن مصطلح الارتباط الذاتي يمكن توضيحه على أساس كونه يمثل الارتباط بين المشاهدات المتسلسلة لنفس المتغير خلال فترة زمنية (أو في مجال معين لبيانات المقطع العرضي)

ويفضل بعض الكتاب استخدام مصطلح الارتباط الذاتي في حين يفضل القسم استخدام الارتباط المتسلسل. ويمثل الارتباط الذاتي المشكلة الثانية التي تظهر نتيجة مخالفة أحد فرضيات نموذج الانحدار الخطي. وتتعلق المخالفة في سلوكية فرضيات حد الاضطراب (Disturbance Term $(U_t)$ التي سبق وأن عبرنا عنها بفرضية عدم وجود ارتباط ذاتي بين قيم المتغير العشوائي وحيث أخذت هذه الفرضية الصيغة التالية في النموذج الخطي:

$$E\,(U_i\,U_j) = 0$$

حيث: $i \neq j$

وهذه الفرضية تعني أن التباين المشترك للمتغير العشوائي مساو للصفر وذلك للأسباب التالية:

$$\because \;\; Cov\,(U_i\,U_j) = E\,(U_i - E\,(U_i))\,(U_j - E\,(U_j)$$

$$\therefore \qquad = E\,(U_i)\,(U_j)$$

حيث إن:

$$E\,(U_i) = 0$$

$$\therefore\; Cov\,(u_i\,u_j) = E\,(U_i\,U_j) = 0$$

وبأخذ الصيغة على شكل فترات زمنية فإن:

$$Cov\,(U_t\,U_{t-1}) = E\,(U_t - E\,(U_t)\,(U_{t-1} - E\,(U_{t-1})$$

حيث إن:

$(t = 1, 2, 3, \ldots, n)$

وبما أن: $E(U_t) = 0$

إذن:

$$Cov(U_t U_{t-1}) = E(U_t U_{t-1}) = 0$$

ومضمون مفهوم الارتباط الذاتي هو أن قيم المتغير العشوائي التي تحدث خلال فترة معينة $(U_t)$ ترتبط بقيم المتغير العشوائي الذي تسبقها أو تلحقها.

وهذا يعني أيضا أن سلوك المتغير العشوائي خلال فترة زمنية معينة $(U_t)$ يعتمد على سلوك نفس المتغير في الفترات السابقة ويتأثر به. مما يؤدي إلى أن يكون:

$$Cov(U_t U_{t-1}) \neq 0$$

ويلاحظ أن ظاهرة الارتباط الذاتي كثيرة الحدوث في بيانات السلاسل الزمنية (Time Serise) أكثر منها في بيانات المقطع (Cross – Section) ولهذا يطلق عليه أحيانا بالارتباط الخطي المتسلسل Serial Autocorrelation.

والمثال التوضيحي أدناه يفسر معنى الارتباط الذاتي وعليه.

لنفترض وجود علاقة خطية بين الكمية $(Y_t)$ والسعر $(X_t)$ تتخذ الصورة التالية:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وإذا افترضنا أن قيم المتغير العشوائي مرتبطة بتسلسل (ارتباط ذاتي) مع قيم المتغير العشوائي في الفترات الزمنية السابقة. ولو افترضنا أيضا بأن $\hat{\alpha} = 500$, $\hat{\beta} = 2$ وعدد المشاهدات $n = 9$. كما هي مذكورة في الجدول (١-٩).

ومن المعادلة (١) فإن المجاهيل هي $(U_t)$ و $\hat{Y}_t$ وعليه بإعادة صياغة المعادلة كما يلي:

$$\hat{Y}_t = Y_t - U_t = \alpha + \beta X_t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

معلوم غير معلوم

و بالتعويض نحصل على ما يلي:

$$Y_t - U_t = 500 + 2\,(800)$$

$$\therefore\ Y_t - U_t = 2100 = \hat{Y}$$

$$\therefore\ e_t = Y - \hat{Y} = 2600 - 2100 = +500$$

وهكذا نجد بقية القيم كما هو مبين في جدول (١-٩) أدناه.

جدول (١-٩)

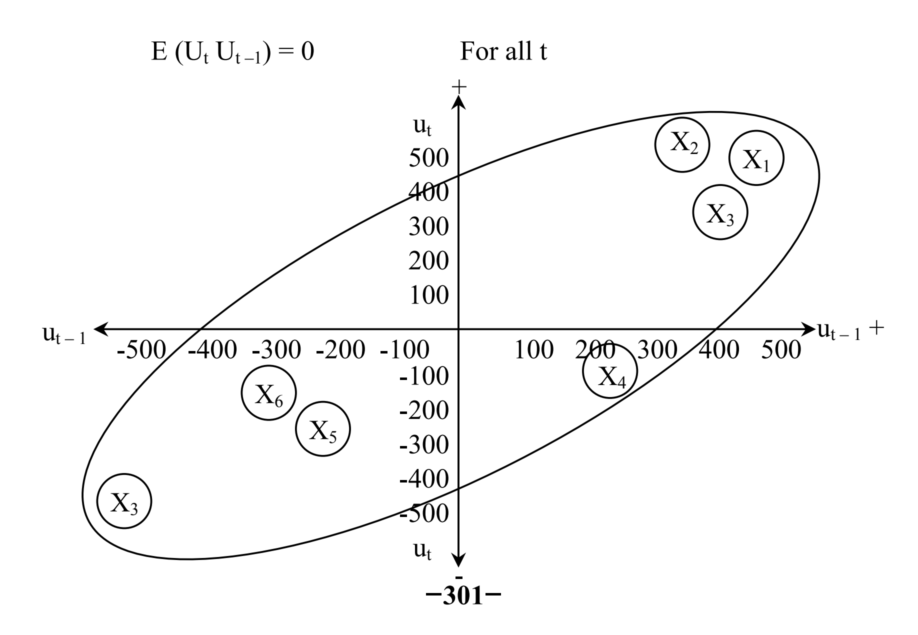
يوضح الكميات من سلعة معينة بآلاف الأطنان والسعر بآلاف الدنانير خلال ٩ سنوات

| $Y_t$ | $X_t$ | $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{b}_x$ | $Y_t = \hat{Y}_t = u_t$ | |
|---|---|---|---|---|
| 2600 | 800 | 2100 | +500 | وتمثل ارتباط متسلسل موجب |
| 2600 | 900 | 2300 | +300 | |
| 2900 | 1000 | 2500 | +400 | |
| 2900 | 1100 | 2700 | +200 | |
| 2800 | 1200 | 2900 | -100 | ارتباط متسلسل سالب |
| 2800 | 1300 | 3100 | -300 | |
| 3100 | 1400 | 3300 | -200 | |
| 2900 | 1500 | 3500 | -600 | |
| 3200 | 1600 | 3700 | -500 | |

ومن الجدول يمكن توضيح الارتباط المتسلسل (الذاتي) بيانيا والكيفية التي أخذ فيها المتغير العشوائي سلوكية بحيث لم يحقق فرضية استقلالية المتغيرات العشوائية أي:

شكل (١-٩)

يوضح الارتباط الذاتي وظهور المتغير العشوائي.



يمثل الشكل البياني (١-٩) سلوكية ونمط الارتباط الذاتي بين $U_t$ (اللاحق) و $(U_{t-1})$ (السابق). من هذا نستنتج أن الهدف هو تقليل أثر $U_t$ وهذا يعتمد على تقدير $\sum e_i^2$ للحصول على أفضل تقدير لخط الانحدار. وبوجود ظاهرة الارتباط الذاتي فإن طريقة التقدير بواسطة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لا تعطي مقدرات ذات أقل تباين:

(٩-٢) أسباب ظهور الارتباط الذاتي:

هناك عدة عوامل لظهور الارتباط الذاتي منها:

١- حذف بعض المتغيرات المستقلة من النموذج، وفي هذه الحالة يظهر ما يسمى شبه الارتباط الذاتي، (Quasi- autocorrelation)وتأثير ذلك المتغير سوف يظهر إلى استقلالية المتغير العشوائي $(U_t)$.

٢- سوء توصيف Mis- Specification الصيغة الرياضية للنموذج. فعند حذف المتغير المستقل المرتبط مع المتغيرات المستقلة الأخرى في النموذج قد يجعل حدود الاضطراب بكل نموذج مرتبطة أيضا أي ظهور الارتباط بين قيم المتغير العشوائي $(U_t)$.

٣- عدم دقة المعلومات والبيانات قد يؤثر على حدود الاضطراب الأمر الذي يتطلب ضرورة تهذيب وتعديل البيانات بشكل يتساوى فيه أثر الاضطرابات خلال الفترات المتتالية:

٤- سوء توصيف المتغير العشوائي $(U_t)$ ففي بيانات السلاسل الزمنية قد يمتد أثر العوامل العشوائية لأكثر من فترة زمنية واحدة. فالحرب والبراكين والزلازل والفيضانات والأوبئة وغيرها. لها آثار ممتدة على سلوكية المتغيرات الاقتصادية للاقتصاد ككل. وفي الفترات التي تلحق الفترة التي وقعت فيها مثل هذا الاضطرابات. ونتيجة لذلك فإن العنصر العشوائي يتأثر تلقائيا بصورة مستمرة مما يؤدي إلى ترابط قيم ذلك المتغير.

٥- وأخيرا فإن لحيز الارتباط الذاتي دور في ظهوره. وخاصة في بيانات المقاطع العرضية الإقليمية، فنجد أن الأزمات أو الاضطرابات التي تقع في إحدى الأقاليم تؤثر على الميزانية الاقتصادية في أقاليم مجاورة أخرى، فالأزمات نتيجة التغير في الظروف المناخية في إقليم معين تؤثر على الأقاليم المجاورة.

(٩-٣) الارتباط الذاتي واختبار المقدرات ودرجة الثقة:

لاختبار معنوية قيم المعلمة المقدرة $\left(\hat{\beta}\right)$ فإن $\left(\hat{t}\right)$ ستكون كالآتي:

$$\hat{t} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}}}$$

وهذه لها توزيع طبيعي ودرجات حرية قدرها (n - 2) في حالة النموذج الخطـي البسـيط و (n - k) في النموذج المتعدد وكذلك فإن تقدير حدود الثقة للمعلمة المقـدرة $\left(\hat{\beta}\right)$ فـإن هـذه الحدود هي:

$$C.1 = \hat{\beta} \pm \hat{t}_{*2,\, n-2} \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}}$$

وحيث إن:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}, \sigma_u^2 = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

وبوجود هذه الصيغة الضرورية للاختبارات وحدود الثقة. فإنه في حالـة وجـود الارتبـاط الذاتي أو (المتسلسل). تكون هذه الصيغ متضمنة لبعض الأخطاء وذلك يعود إلى الأسباب التالية:

١- احتمال كون $\left(\hat{\beta}\right)$ تتضمن أخطاء كبيرة ممكن معالجتها وذلك بأخذ فترات ثقة أوسع.

٢- بما أنه توجد فـترات ثقـة ضـيقة (محـدودة) بسـبب كـون تقـدير التبـاين $\left(\hat{\sigma}_u^2\right)$ أو الخطـأ المعياري قليلا جدا. وسبب كونه قليلا يعود إلى طريقة تقديره من البيانات الأصلية للمتغـير (ei).

(٤-٩) خصائص قيم المتغير العشوائي المترابطة:

سبق وأن أوضحنا بإحدى الفرضيات الأساسية التي يقوم عليها تطبيق (OLS) لتقدير معالم النموذج الخطي هي ثبات قيم تباين المتغير العشوائي. وأن يكون تغايره مساويا للصفر أي:

$$E(U_i U_j) = 0$$

وباستخدام المصفوفات فإن فرضية التباين - التغاير تأخذ الشكل التالي:

$$E(UU') = \sigma_u^2\ In = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبهذا فأنه طالما كانت العناصر خارج القطر الرئيسي تساوي صفرا إذن لا توجد مشكلة الارتباط الذاتي الذي يؤثر في تقديرات معلمات النموذج. ولمعرفة التركيب الهيكلي للارتباط الذاتي نفترض أن المتغير العشوائي ($U_i$) يتبع الترتيب الأول لماركوف (First- Order Markov Auto Regresive Scheme) والتي تأخذ الصيغة أدناه إذا كانت معادلة الانحدار البسيط هي المستخدمة وعليه:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_2 + U_t \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$U_t = \rho U_{t-1} + \zeta_t \ |\rho| < 1 \dots\dots\dots\dots (2)$$

حيث تشير ($\rho$) إلى معامل الارتباط الذاتي، وتشير ($\zeta_t$) إلى المتغير العشوائي الذي يستوفي متطلبات (OLS) تفسر المعادلة (٢) الارتباطات بين المتغيرات العشوائية التي تحدث في فترة معينة وتأثيرها على العوامل العشوائية في الفترات اللاحقة (أي السابقة t-١ تؤثر على اللاحقة t ) أي أن المتغير العشوائي هو عبارة عن دالة لتأثير المتغيرات في السنوات السابقة, والمتغيرات في السنوات اللاحقة حيث تشير الرو ($\rho$) إلى القيمة المطلقة. والتي تكون عادة أقل من الواحد أي ( $|\rho| < 1$) في حين تشير ($\zeta_t$) إلى المتغيرات العشوائية الأخرى (Uposilent). وهي موزعة توزيعا طبيعيا. وتكون سلوكيتها مقيدة بالفرضيات التالية:

$$E(\zeta_t) = 0$$

$$E(\zeta_t \zeta_{t-1}) = \begin{cases} \sigma_\zeta^2 & \text{for all t} \\ \zeta_t \zeta_{t-1} = 0 \end{cases}$$

والآن لنختبر تأثير الفرضيات أعلاه على الوسط الحسابي $E(U_t)$. والتباين $Var(U_t)$. والتغاير $Cov(U_t U_{t-1})$.

(١-٤-٩) الوسط الحسابي للمتغير العشوائي (Correlated $U_t$):

بالتعويض المستمر في المعادلة (٢) نحصل على:

$$U_t = \rho\, U_{t-1} + \zeta t$$

$$Ut = \rho\, [\, \rho\, Ut - 2 + Ut - 1] + \zeta t$$

$$Ut = \rho 2\, (\rho\, Ut - 3 + Ut - 2) + \rho\, \zeta t - 1 + \zeta t$$

$$Ut = \rho 3\, [\, \rho\, U_{t-4} + U_{t-3}] + \rho^2\, \zeta_{t-2} + \rho\, \zeta_{t-1} + \zeta_t = 0$$

وهكذا إلى نهاية البيانات المعطاة. وبإعادة ترتيب المعادلة نحصل على:

$$U_t = \zeta_t + \rho\, \zeta_{t-1} + \rho^2\, \zeta_{t-2} + \rho^3\, \zeta_{t-3} + \rho^4\, \zeta_{t-4} \ldots = 0$$

وبأخذ القيمة التوقعية نحصل على:

$$E\,(U_t\,)\,(E\,(\zeta_t) + \rho\, E\,(\zeta_{t-1}) + \rho_2\, E\,(\zeta_{t-2}) + \ldots \,(4)$$

وبما أن:

$$E\,(\zeta_t) = 0$$

$$E\,(\zeta_t\, \zeta_{t-1}) = 0$$

إذن المعادلة (٤) تساوي صفرا وبالتعويض أي:

$$\therefore\; E\,(_{Ut}) = 0$$

وعليه فإن قيمة $\left(\hat{\beta}\right)$ بموجب هذه الفرضية ستكون غير متحيزة. ولتوضيح ما ذكر أعلاه نفترض بأن:

| $U_t$ | | |
|---|---|---|
| 1 | $U_{t-5}$ | $= \rho\, U_{t-6} + \zeta_{t-5}$ |
| 2 | $U_{t-4}$ | $= \rho\, U_{t-5} + \zeta_{t-4}$ |
| 3 | $U_{t-3}$ | $= \rho\, U_{t-4} + \zeta_{t-3}$ |
| 4 | $U_{t-2}$ | $= \rho\, U_{t-3} + \zeta_{t-2}$ |
| 5 | $U_{t-1}$ | $= \rho\, U_{t-2} + \zeta_{t-1}$ |
| 6 | $U_t$ | $= \rho\, U_{t-1} + \zeta_t$ |

وفي هذه الحالة نبدأ من الأسفل مع إعطاء أول قيمة خطأ وهو ($\zeta_t$) ولهذا فإن القيمة الأولى تكون ($\rho\, U_{t-1} + \zeta_t$) حيث تمثل $(\rho)$ معامل ($U_t$) و ($\zeta_t$) تمثل الخطأ. وعليه فإن القيمة السادسة هي عبارة عن القيمة السابقة لها مضافا إليها معامل الارتباط الذاتي وهو

$(\rho)$ ولهذا فإن القيمة السادسة هي: $(\rho U_{t-1} + \zeta_t)$ في حين أن القيمة الخامسة هي $(U_{t-1})$ أنها تساوي القيمة السابقة مضافا إليها الخطأ وهي تساوي $(\rho U_{t-1} + \zeta_t)$ ويتم تعويض ذلك في القيمة الخامسة كالآتي:

$$U_t = (\rho U_{t-1} + \zeta_t)$$

$$\therefore U_t = \rho (\rho U_{t-2} + \zeta_{t-1}) + \zeta$$

وهكذا كما هو موضح أعلاه:

(٢-٤-٩) التباين للمتغير العشوائي في حالة الارتباط الذاتي $(U_t)$ Variance of:

بما أن:

$$Var (U_t) = E [ (U_t - E (U_t) ]^2$$

وكذلك فإن:

$$E (U_t) = 0$$

$$\therefore Var (Ut) = E (Ut)^2$$

$$\therefore E (U_t)^2 = E (\zeta_t + \rho \zeta_{t-1} + \rho^2 \zeta_{t-2} + \rho^3 \zeta_{t-3} + \dots ]^2$$

وبإجراء عملية الضرب نحصل على:

$$= \zeta^2_1 + \rho^2 \zeta^2_{t-1} + \rho^4 \zeta^2_{t-1} + 2 \rho \zeta_t \zeta_{t-1} + 2 \rho^2 \zeta_t + \zeta_{t-2} + 2 \rho^3 \zeta_{t-1} \zeta_{t-2}$$

وبأخذ القيمة المتوقعة:

$$Var (U_t) = E [ \zeta^2_t + \rho^2 \zeta^2_{t-1} + \rho^4 \zeta^2_{t2} + 2 \rho \zeta_t \zeta_{t-1} + 2 \rho^2 \zeta_t \zeta_{t2} + \rho^3 \zeta_{t-1} \zeta_{t-2} ]$$

حيث إن:

$$Covariance = 0$$

وكذلك:

$$Variances = \sigma_u^2 = \sigma_\zeta^2$$

$$\therefore Var (U_t) = \sigma_\zeta^2 + \rho^2 \sigma_\zeta^2 + \rho^4 \sigma_\zeta^2 + \dots$$

والسبب في ذلك يعود إلى كون:

ثبات التباين

وصفر التغاير:

$$E (\zeta_t \zeta_{t-1}) = \begin{cases} \zeta^2_t = \sigma_r^2 + \zeta^2_{t-1} = \sigma_\zeta^2 \\ \zeta_t \zeta_{t-1} = 0 \end{cases}$$

وبأخذ $\left(\sigma_{\zeta}^{2}\right)$ كعامل مشترك نحصل على:

$$Var(U_t) = \sigma_{\zeta}^{2} (1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots)$$

وهذه عبارة عن متوالية هندسية يمكن صياغتها كما يلي:

$$Var(U_t) = \sigma_{\zeta}^{2}\left[\frac{1}{1-\rho^{2}}\right] = \frac{\sigma_{\zeta}^{2}}{1-\rho^{2}} \quad \dots\dots\dots\dots (5)$$

وإن قيمة التباين ثابت, وعليه فإنه طالما كانت العناصر التي تقع خارج القطر الرئيسي تساوي صفرا فإن عناصر المحور الأفقي يضاف إليها تباين المعادلة (٥) وهي قيمة ثابتة.

(٣-٤-٩) التباين المشترك للمتغير العشوائي Covariance:

بما أن التغاير يساوي:

$$Cov(U_t) = (U_t U_{t-1})$$

وبأخذ القيمة المتوقعة:

$$Cov(U_t) = E[\{U_t - E(U_t)\}.\{U_{t-1} - E(U_{t-1})\}]$$

وبما أن:

$$E(U_t) = 0$$

$$E(U_{t-1}) = 0$$

إذن فإن حساب التغاير $(U_t)$ إذا كانت تتبع الترتيب الأول لماركوف هو:

أي:

$$Cov(U_t U_{t-1}) = E(U_t U_{t-1})$$

$$= E[\zeta_t + \rho\zeta_{t-}1 + \rho^2\zeta_{t-2} + \dots +)(\zeta_{t-1} + \rho\zeta_{t-2}$$
$$+ \rho^2\zeta_{t-3} + \dots +)$$

$$= E[\zeta_t + \rho(\zeta_{t-1} + \rho\zeta_{t-2} + \dots +)(\zeta_{t-1} + \rho\zeta_{t-2} + \dots +)$$

وبإدخال القيم المتوقعة نحصل على:

$$= E\zeta_t + \rho E(\zeta_{t-1} + \rho\zeta_{t-2} + \dots +)(\zeta_{t-1} + \rho\zeta_{t-2} + \dots +)$$

بما أن:

$$= E\zeta_t + \rho E(\zeta_{t-1} + \rho\zeta_{t-2} + \dots +)^2$$

وحسب الفرضية:

$$E(\zeta_t) = 0$$

فإن:

$$E\left(\zeta_{t-1} + \rho\, \zeta_{t-2} + \rho^2 (\zeta_{t-3} + \ldots\right)^2 = E\left[\sigma_?^2\right]$$

إذن:

$$Cov\,(U_t\, U_{t-1}) = \rho + E\left(\sigma_u^2\right)$$

وهذا يعني أن التغاير هو:

$$Cov\,(U_t\, U_{t-1}) = \rho\, \sigma_u^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

لا يساوي صفرا كما هو مبين في الانحدار الخطي المذكور في الفصل السادس وعليه فإن الصيغة العامة للتغاير هي:

$$Cov\,(U_t\, U_{t-1}) = \rho\, \sigma_u^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

وأن (ρ) هي عبارة عن معامل الارتباط بين قيم المتغيرات العشوائية، ويأخذ الصيغة أدناه لحسابه وهي:

$$\rho = \frac{\sum U_t U_{t-1}}{\sigma_u^2}$$

والتي تمثل معامل الارتباط الذاتي.

أو:

$$\rho = \frac{\sum U_t U_{t-1}}{\sqrt{Var(U_t)^2}\sqrt{Var(U_{t-1})^2}}$$

ويمكن كتابة نتيجة معادلة التباين، والتغاير بالصيغة العامة باستخدام المصفوفات*، وتكوين مصفوفة التباين - التغاير للمتغير العشوائي، وإذا كانت القيم التالية معروفة وهي كون:

$$E\,(U_t) = 0$$

بالفرض.

$$\therefore\ Var\,(U_t^2) = \sigma_u^2 = \frac{\sigma_\zeta^2}{1-\rho^2} \quad \text{i. e Constant} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\therefore\ Cov\,(U_t U_{t-1}) = \rho\, \sigma_u^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

---

* راجع الملحق (C) جبر المصفوفات.

$$E(U\,U') = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \rho\sigma_u^2 & \rho^2\sigma_u^2 & \dots & \rho^{n-1}\sigma_u^2 \\ \rho\sigma_u^2 & \sigma_u^2 & \rho\sigma_u^2 & \dots & \rho^{n-2}\sigma_u^2 \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ \rho^{n-1}\sigma_u^2 & \rho^{n-2}\sigma_u^2 & \rho^{n-3}\sigma_u^2 & \dots & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

وبأخذ $\left(\sigma_u^2\right)$ كعنصر خارج المصفوفة، لأنه يشكل قيمة ثابتة فنحصل على:

$$E(U\,U') = V = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \dots$$

ومن التحليل المذكور أعلاه لمصفوفة التباين - التباين المشترك نحصل على نتيجة في غاية الأهمية، وهي أن التجانس (Homoscedasticity) في النموذج العام، والتي تنص على أن:

$$E(U\,U') = \sigma_u^2\ I_n$$

لم تعد صحيحة في حالة وجود الارتباط الذاتي (Autocorrelation)، حيث نجد أن مصفوفة التباين والتباين المشترك هي غير متجانسة أي وجود (Hetroscedasticity) أي أن:

$$E(U\,U') \neq \sigma_u^2\, I_n$$

وأنما:

$$E(U\,U') = \sigma_u^2 = V$$

أي دخول عنصر (ρ)، وهو معامل الارتباط الذاتي للمتغير العشوائي، وهي حالة استمرار التباين ثابت والتباين المشترك لم يعد مساويا للصفر أي:

$$Cov\,(u_i\ u_j) \neq 0$$

ولذا فإن معلمات النموذج الخطي العام المقدرة $\left(\hat{\beta}\right)$ وبموجب فرضيات الارتباط الذاتي، وحيث يكون التغاير غير مساو للصفر فإن هذه المقدرات تبقى خطية، غير متحيزة

ولكنها لا تكون أفضل مقدرات، وللبرهنة على ذلك سنتطرق إلى حالة عدم التحيز أولا.

(٥-٩) آثار مشكلة الارتباط الذاتي بين قيم المتغير العشوائي:

أولا: عدم التحيز Unbiasedness:

نتائج الارتباط الذاتي هو أن الوسط الحسابي للمعلمات المقدرة ($\hat{\beta}_i$) تستمر غير متحيـزة كما كانت عليه الحالة في (OLS) ولكن المعلمات المقدرة هذه ليس من الضروري أن تكون أفضـل مقدرات (Best)، وذلك بسبب وجود ظاهرة الارتباط الذاتي، ويمكن برهان عدم التحيز كالآتي:

بما أن النموذج الخطي العام هو:

$$Y = X\beta + U$$

وحيث إن:

$$\left(\hat{\beta}\right) = (X'X)^{-1}X'Y$$

∴ بالتعويض نحصل على:

$$\left(\hat{\beta}\right) = (X'X)^{-1}X'(X\beta + U)$$

$$= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'U$$

إذن:

$$\left(\hat{\beta}\right) = \beta + (X'X)^{-1}X'U$$

حسب قوانين المصفوفات وبأخذ القيمة المتوقعة نحصل على:

$$\therefore E\left(\hat{\beta}\right) = \beta + (X'X)^{-1}E(U)$$

وبما أن: $\therefore E(U) = 0$

إذن:

$$\therefore E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$$

ومن هذا وكما أوضحنا أعلاه فإن تقديرات معلمات النموذج تبقى غير متحيزة لأن توقع التقديرات لا يتأثر بوجود الارتباط الذاتي بل يعتمد على القيمة المتوقعة للخطأ العشوائي، أما هذه المقدرات فإنها ليست أفضل مقدر لأن تباين هذه المعلمات يتضمن خطأ (Error)، وتكون صيغة تباين المعلمات كما يلي:

ثانيا: المقدرات في حالة الارتباط الذاتي ليست أفضل مقدرات:

ويمكن ملاحظة ذلك من خلال تباين المقدرات وكما يلي:

تباين $\left(\hat{\beta}\right)$:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = (X' X)^{-1} X' V X (X' X)^{-1} \;\ldots\ldots\ldots\ldots [8]$$

ولقد تم التوصل إلى هذه الصيغة كما يلي:

بما أن: $Y = X\beta + U$

وأن: $\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$

والتباين هو:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E[\hat{\beta} - E\left(\hat{\beta}\right))] [\beta - E(\beta)]'$$

وبما أن: $E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$

إذن:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = (\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'$$

وبما أن: $\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$

إذن وبالتعويض نحصل على:

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' (X\beta + U)$$

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X X \beta + (X' X)^{-1} X' U$$

إذن وبتطبيق قوانين المصفوفات نحصل على:

$$\hat{\beta} = \beta + (X' X)^{-1} X' U$$

إذن وبالتعويض في:

$$\hat{\beta} - \beta = \beta + (X' X)^{-1} X' U - \beta$$

نحصل على:

$$\hat{\beta} - \beta = (X' X)^{-1} X' U$$

وبما أن التباين هو عبارة عن:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E\,[\,(\hat{\beta} - \beta)\,(\hat{\beta} - \beta)'\,]$$

إذن وبالتعويض نحصل على:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E\,[\,(\hat{\beta} - \beta)\,(\hat{\beta} - \beta)' = E\,[\,(X' X)^{-1} X' U]\,[\,(X' X)^{-1} X' U\,]'$$

وباستخدام ضرب المصفوفات نحصل على:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E\,[\,(\hat{\beta} - \beta)\,(\hat{\beta} - \beta)'\,] = (X' X)^{-1} X' E\,U\,U' X\,(X' X)^{-1}$$

فإذا رمزنا إلى المصفوفة $E\,(U\,U')$ بـ (V) فإن تباين المقدرات $Var\left(\hat{\beta}\right)$ هو عبارة عن المعادلة الآتية:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = (X' X)^{-1} X' V X\,(X' X)^{-1} \text{ ........... } [\,8\,]$$

حيث المصفوفة (V) تمثل تباين المتغير العشوائي المترابط (u)، وهي:

$$V = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{n-2} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ومن هذا نستنتج أن تباين مقدرات معلمات النموذج الخطي العام إذا حسبت باستخدام (OLS) في حالة وجود الارتباط الذاتي يعطي قيمة غير صحيحة لأن هذا التباين يحسب باستخدام المعادلة:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = (X'X)^{-1}$$

ولهذا فإن التقدير الأخير تكون قيمته غير صحيحة في حالة وجود الارتباط الذاتي، ويمكن توضيح صيغة تباين تقديرات المعلمات في النموذج العام بالصيغة [ ٨ ] بأخذ النموذج التالي (الانحرافات).

حيث:

$$y_t = \beta x_t + U_t$$

وإن:

$$U_t = \rho U_{t-1} + \zeta_t$$

وإن ($\zeta_t$) تعمل وفقا للفرضيات التالية:

$$|\rho| < 1$$

$$E(\zeta_t) = 0$$

$$E(\zeta_t \zeta_{t-1}) = \sigma_{\zeta}^2 \quad S = 0$$

For all t

$$= 0 \quad S \neq 0$$

وعليه فإن تباين المقدرات لهذا النموذج يأخذ الصيغة [ ٨ ].

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = (X'X)\text{-}1\, X'\, V\, X\, (X'X)^{-1}$$

وعلما بأن النموذج أعلاه، يمثل طريقة معالجة البيانات بالانحراف عن أوساطها الحسابية أي (Deviation Formula)، ولمناقشة صيغة التباين (٨) ولتوضيح قيمة الخطأ الذي يؤثر في قيمة التباين، فإن مصفوفة (V) هي مصفوفة التباين - التباين المشترك، وهي ذات رتبة قدرها (n. n) وهي:

$$\underset{(n.n)}{V} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \ldots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho^{n-3} \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & & . \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

ولتحليل أجزاء المعادلة (٨) فإن:

$$(X'X) = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

(1. n) (n. 1)

(1. 1)

Scaler

(1.1)

وهو (Scaler)، وطالما أننا استخدمنا طريقة الانحرافات فإنه لا يوجد عمود الوحـدة حيـث يختفي هذا العمود عند استخدام طريقة الانحرافات عن الوسط الحسابي، وفي هذه الحالـة ولأن المصفوفة $(X'\ X)$ هي عبارة عن قيمـة مفـردة (Scaler)، إذن فمقلـوب القيمـة المفـردة $(X'\ X)$ هـو عبارة عن:

$$(X'\ X)^{-1} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

وعليه فإن الجزء الأول من منظومة المعادلة [ ٨ ] يساوي:

$$(X'\ X)^{-1}\ X'\ V = \left(\frac{1}{\sum x_i^2}\right) . [\ x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\ ] \ .\ \sigma_u^2 \ .\ V$$

(1. 1) (1. n) (n. n)

(1. n) (n. n)

(1. n)

وبما أن:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & & . \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

وبضرب المصفوفات نحصل على متجه (1. n) كما يلي:

$$(X'X)^{-1} X' V = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} . [\ (x_1 + \rho\, x_2 + \rho^2\, x_3 + \rho^3\, x_4 + \dots + \rho^{n-1}\, x_n)$$

$$(\rho\, x_1 + x_2 + \rho\, x_3 + \rho^2\, x_4 + \dots + \rho_{n-2}\, x_n)$$

$$(\rho^2\, x_1 + \rho\, x_2 + x_3 + \rho\, x_4 + \dots + \rho_{n-3}\, x_n)$$

$$(\rho_{n-1}\, x_1 + \rho^{n-2}\, x_2 + \rho^{n-3}\, x_3 + \dots + x_n)\ ]$$

ولسهولة الحل لو فرضنا بأن قيمة كل القوس تساوي: [ A, B,C, D ]، نحصل على ما يلي:

$$(X'X)^{-1} X' V = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}\ [\ (A). (B). (C) \dots (D)\ ]$$

وبضرب هذه النتيجة بالجزء الآخر من منظومة المعادلة [ ٨ ] نحصل على:

$$(X'X)^{-1} X' V X (X'X)^{-1} = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}\ [\ (A). (B). (C) \dots (D)\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

(1. n) (n. 1) (1.n ) (n. n) (n. 1) (1. n) (n. 1)

(1. 1) (1. n) (n. 1) (1. 1)

(1. n) (n. 1)

(1. 1)

Scaler

إذن منظومة المعادلة [ ٨ ] والتي هي قيمة مفردة تأخذ الشكل الآتي:

$$\underbrace{(X' X)^{-1} X' V X (X' X)^{-1}}_{(1.1)} = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} [ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + \dots + Dx_n]. \frac{1}{\sum x_i^2}$$

وبفتح هذه المنظومة نحصل على:

$$= \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} [ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n) + (\rho x_1 x_2 + \rho x_2 x_1 +$$

$$\rho x_2 x_3 + \rho x_3 x_2 + \rho x_3 x_4 + \rho x_4 x_3 + \dots + \rho x_{n-1} x_n + \rho x_n$$

$$\rho x_n x_{n-1}) + (\rho^2 x_1 x_3 + \rho^2 x_3 x_1 + \rho^2 x_2 x_3 + \rho^2 x_3 x_2 +$$

$$\rho^2 x_3 x_4 + \rho x_4 x_3 + \dots + \rho^2 x_{n-2} x_n + \rho^2 x_n x_{n-2}) + \dots +$$

$$2 \rho_{n-1} x_i x_n ]$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} \left[ 1 + 2\rho \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + 2\rho \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+2}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \dots + 2\rho^{n+1} \frac{\sum x_i x_n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right] \text{i. e; Scaler}$$

ومن هذا نجد أن صيغة (OLS) التباين $\left(\hat{\beta}\right)$ لهذا النموذج هي:

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}$$

حيث تتجاهل صيغة (OLS) القيم الموجودة بين قوسين، وعليه فإن القيم بين القوسين وتشير إلى أثر الارتباط الذاتي، فإذا كان $(\rho = 0)$ معناه عدم وجود ارتباط ذاتي، وإذا كان $(\rho > 0)$ و (x) مرتبطة ذاتيا وإيجابيا، إذن المقدار الموجود بين القوسين يكون حتما > ١، وعليه فإن صيغة (OLS) تقلل من القيمة الحقيقية لتباين معلمات العينة المقدرة.

(٦-٩) طرق الكشف عن ظاهرة الارتباط الذاتي:

ولكون تباين الأخطاء العشوائي المحسوب بطريقة (OLS) لا يعبر عن قيمته الحقيقية لذا فإن اختبار كل من (t) و (F) لا يصلح للكشف عن وجود ارتباط ذاتي، وعليه لابد من استخدام اختبار آخر لتحديد وجود الارتباط الذاتي في المشكلة المدروسة، وهناك عدة اختبارات لتحديد الارتباط الذاتي منها:

١-٦-٩ اختبار داربن – واطسون للكشف عن الارتباط الذاتي:

Darbin – Watson Test:

يعتبر اختبار داربن - واطسون أكثر الاختبارات شيوعا واستخداما بين الاقتصاديين القياسيين، وتقوم فكرة هذا الاختبار على استخدام البواقي (Residuals) وتحليل الانحدار، ويجري الاختبار كما يلي:

١- تحديد الفرضيات: وهي فرضية العدم، والفرضية البديلة وكما يلي:

$H_o: \rho = 0$

$H_1: \rho \neq 0$

٢- اختبار فرضية العدم بتقدير قيمة ( d) المحسوبة بتطبيق الصيغة التالية حيث تشير d إلى اختبار داربن واطسون:

$$d^* = \frac{\sum_{i=2}^{n}\left(\hat{U}_t - \hat{U}_{t-1}\right)^2}{\sum U_t^2} \qquad \text{..................... (9)}$$

وللوصول إلى قيمة *d نحلل الصيغة (٩) وكما يلي:

وبتحليل المقام نحصل على المعادلة (١٠) والتي هي:

$$d^* = \frac{\sum \hat{U}_t^2 - 2\sum \hat{U}_t \hat{U}_{t-1} + \sum \hat{U}_{t-1}^2}{\sum U_t^2} \qquad \text{.... (10)}$$

وبسبب كون ($\hat{U}_t$) مساوية تقريبا إلى ($\hat{U}_{t-1}$) في حالة العينات الكبيرة إذن يمكن أن نحصل على المعادلة (١١) وهي:

$$d^* = \frac{2\sum \hat{U}_t^2 - 2\sum \hat{U}_t \hat{U}_{t-1}}{\sum U_t^2} \qquad \text{............. (11)}$$

وبإعادة ترتيب المعادلة (١١) نحصل على المعادلة (١٢) حيث إنها تساوي:

$$d^* = \frac{2\sum \hat{U}_t^2}{\sum U_t^2} - \frac{2\sum \hat{U}_t \hat{U}_{t-1}}{\sum U_t^2} \qquad \text{............. (12)}$$

وباختصار نحصل على المعادلة:

$$d^* = 2 - \frac{2\sum U_t U_{t-1}}{\sum U_t^2} \qquad \text{...................... (13)}$$

وبما أن:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{U}_t \hat{U}_{t-1}}{\sum U_t^2}$$

إذن:

$$d^* = 2 - 2\hat{\rho} \text{ ......................................}$$

وبالاختصار نحصل على المعادلة (١٤) والتي هي:

$$\therefore\ d^* = 2(1 - \hat{\rho}) \text{ ............................. (14)}$$

فإذا كان $\hat{\rho}$ = ٠ فإن:

$$\text{No Ac} \leftarrow d^* = 2$$

وإذا كان $\hat{\rho}$ = ١+ فإن:

$$\text{the Perfect A. c } d^* = 0$$

وإذا كان $\hat{\rho}$ = ١- فإن:

$$\text{the Perfect A. c } d^* = 4$$

ويلاحظ من المعادلة (١٤) بأن ( $\hat{\rho}$ ) هو عبارة عن معامل ماركوف من الدرجة الأولى السابقة الذكر في هذا الفصل (المعادلة ٦)، ومن هذا نستنتج بأن قيمة ($d^*$) المحسوبة تعد مقياس الارتباط من الدرجة الأولى بين ($U_t$) و ($U_{t-1}$)، ويشعر الاقتصاديون القياسيون بالاطمئنان إلى نتائجهم عندما تكون قيمة ($d^*$) المحسوبة مقاربه إلى ٢، ويعتبرون أن مشكلة الارتباط الذاتي ليست حادة (غير قوية جدا) حيث لا يوجد دليل على وجود ارتباط ذاتي وموجب.

٣- قارن قيمة ($d^*$) وقيمة (d) المستخرجة من جداول دربن - واطسون أمام (n) وتحت (k).

حيث إن (d) هي القيمة الجدولية والتي يتم مقارنة $d^*$ معها (لاحظ التطبيقات).

وأن (n) عدد المشاهدات.

و (k) عدد معلمات النموذج الاقتصادي (بدون المقطع $\beta_o$).

٤- تفترض (d) بأن فرضية العدم صحيحة أي:

$$H_o: \hat{\rho} = 0 \text{ is true}$$

وعليه فالمشكلة الحقيقية هي كون توزيع (d) الجدولية غير معروف، وقد حاول كل من دربن - واطسون أن يضعا توزيعا لقيم (d) النظرية (انظر الملحق (E)).

٥- وبالنسبة لدربن - واطسون فإنهما وضعا توزيعا لقيم (d) النظرية كما يلي:

إن (d) تقع بين حدين من القيم هما:

(dL) وهو الحد الأدنى لقيم (d) النظرية أي dL = Lower Bound Value of d و (dU) وهو الحد الأعلى لقيم (d) النظرية أي: dU = Upper Bound Value of (d).

وهذه الحدود قد تم تحديد قيمها في جداول خاصة أعدت من قبل داربن - واطسون لاختبار درجة ونوع الارتباط الذاتي، مع الأخذ بنظر الاعتبار عدد المشاهدات (n) وعدد المعلمات (k) وتحت مستوى معنوية معين، ويفضل عادة في الدراسات الاقتصادية التطبيقية استخدام ٥% مستوى معنوية، وأحيانا ١% وجداول (dL) و (dU) محسوبة لمستويات المعنوية المختلفة، ولعدد مختلف من المشاهدات والمعلمات المقدرة، ومن الجدير بالذكر ملاحظة كون تركيب هذه الجداول يعتمد على معلمات المتغيرات المستقلة عدا ثابت الانحدار (المقطع) (Excluding the Constant Term)، وعلى أي حال فإن البواقي تقدر سوية مع المقطع وبقية المعلمات المقدرة، وتستخدم قيم الحدود العليا والدنيا (dU, dL) لاختبار فرضيات عدم وجود الارتباط الذاتي للمتغيرات العشوائية وللإطلاع على هذه الجداول راجع الملحق (E) جدول (٣).

٦- وإجراء عملية الاختبار تتم بعد احتساب قيم (d*) بواسطة تقدير البواقي ومن ثم تجري عملية المقارنة مع (dL) و (dU) من جداول دربن - واطسون.

فإذا كانت (d*) المقدرة أعلى من قيم (dU) الجدولية، فإن ذلك يعني أن المتبقي (الحد العشوائي)، لا يتضمن ارتباطا ذاتيا موجبا، أما إذا كانت قيمة (d*) المقدرة أقل من (dL) الجدولية فإن ذلك يعني وجود ارتباط ذاتي موجب.

أما إذا كانت (d*) المقدرة أعلى من (dL) الجدولية وأقل من (dU) الجدولية، فإن ذلك يعني حصولنا على حالة عدم التأكد، أو الحالة الحرجة (Inconclusive) والشكل البياني (١-٩) سيوضح وجود هذه الحالات.

وسبق أن ذكرنا أنه إذا كانت $\rho = -1$ فنحصل على كون:

$d^* = 2 - 2\rho$

$d^* = 4$ …………………….. (15)

وهكذا نجد من السـهولة تكـوين اختبـار مشـابه لحالـة الارتبـاط الـذاتي السـابق وذلـك بواسطة احتساب الكمية الناتجة من طرح ( $d^*$ من ٤)، والكمية الناتجة من ( $d^*$ - ٤) تقارن مع ما يقابلها من القيم الجدولية لكل من (dL) و (dU)، واختصارا لما ذكره أعلاه فإن اختبـار الفرضـية سيكون كالآتي:

$H_o: \rho - 0$

$H_1: \rho \neq 0$

وهذا يعني أنه إذا كانت:

$d^* > dU$

نقبل بأن:

Accept That $\rho = 0$

أما إذا كانت:

$dL \leq d^* \leq dU$

وتشير إلى هذه الصيغة بالمعادلة (١٦).

فإن ذلك يعني عدم التأكد أي (No Conclusive Evidence) أما إذا كانت: $d^* < dL$.

نرفض فرضية $\rho = 0$ أي: Reject that $\rho = 0$ نفس التحليل أعلاه لاختبار:

$H_o: \rho = 0$

Against $H_1: \rho \neq 0$

وعندما تكون $\rho = 0$، فإن الاختبار يأخذ الصيغة التالية:

إذن:

$4 - d^* > dU,$

نقبل الفرضية:

$H_o: \rho = 0$

في حين إذا كانت:

$(dL \leq 4) - (d^* \leq dU)$

فإن الحالة تشير إلى عدم التأكيد (No Conclusive Evidence) أما إذا كانت:

$4 - d^* \leq dL,$

نرفض الفرضية:

Reject that $\rho = 0$

وعليه فإن المقدار ($d^*$) له إمكانية الحصول على قيم تبدأ من الصفر إلى ٤، فإذا كانت المتغيرات العشوائية مرتبطة ذاتيا وموجبة، فإن قيمة ($d^*$) المحسوبة ستكون صغيرة، وكذلك إذا كانت المتغيرات العشوائية مرتبطة ذاتيا، وسالبة فإن قيمة ($d^*$) المحسوبة ستكون كبيرة، وبدمج مجموعة الصيغ للمعادلتين (١٥) و (١٦) فإن الاختبار ذا الطرفين يمكن صياغته كالآتي:

لاختبار الفرضية:

$$H_o: \rho = 0$$

$$H_1: \rho = 0$$

عندما يكون:

$$d^* > dU \text{ or } d^* < 4 - dU$$

نقبل فرضية العدم أي:

$$H_o: \rho = 0$$

وإذا كانت:

$$dL \leq d^* \leq dU$$

or

$$4 - dU \leq d^* \leq 4 - dL$$

وهي حالة عدم التأكد أي:

(No Conclusive Evidence)

أما إذا كانت:

$$d^* < dL \text{ or } d^* > 4 - dL$$

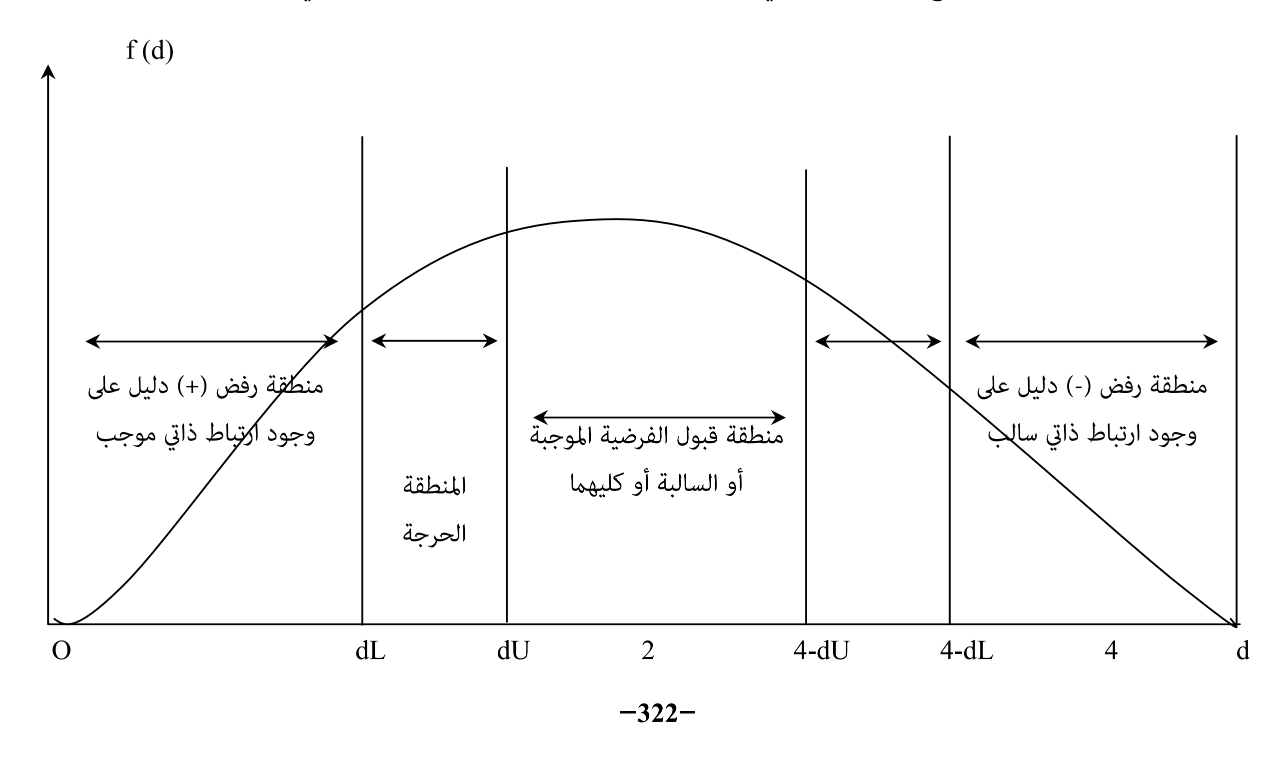
نرفض فرضية العدم:

$$H_o: \rho = 0$$

والشكل البياني (١-٩) يعطي صورة موضحة لاختبار دربن - واطسون كما يلي:

شكل (١-٩)

يوضح الاختبار الإحصائي لدرابن - واطسون لكشف مشكلة الارتباط الذاتي



تشير ($H_o$) إلى عدم وجود ارتباط ذاتي موجب.

($H_o$) إلى عدم وجود ارتباط ذاتي سالب.

بعد هذا الاستعراض لاختبار دربن - واطسون الإحصائي نجده يمتاز عن بقيمة الاختبارات لظاهرة الارتباط الذاتي بأنه أكثرها سهولة باعتماده على تقديره للبواقي من تحليل الانحدار باستخدام (OLS) وهي طريقة روتينية[1]، وبسبب هذه الميزة فإنه أصبح يسجل بالبحوث التطبيقية سوية مع الاختبارات الإحصائية الأخرى ($F, R'^2, R^2, t$) وأصبح ذا استخدام روتيني في البحوث الاقتصادية أيضا.

٢-٦-٩ اختبارات فون – نيومن وثايل وهنشر وغيرها:

هناك عدة اختبارات للكشف عن ظاهرة الارتباط الذاتي عدا اختبار داربن - واطسون، ومن أشهرها، اختبار معدل فون نيومن (Von Neumann Ratio) والذي ينص على الصيغة التالية:

$$\frac{\sigma^2}{S^2} = \frac{\sum_{t=2}^{t}(U_t - U_{t-1})}{\sum_{1}^{t} u_t^2} \cdot \frac{T}{T-1}$$

وهذا الاختبار يعتمد بالأساس على المشاهدات العشوائية وتوزيع ($U_t$)، حيث إن المشاهدات العشوائية ($U_t$) غير معروفة في حين أن اختبار ($d^*$) (المعادلة ٩) يعتمد على بواقي الانحدار ($\hat{U}_t$)، وهذا هو تطبيق مباشر[1].

كذلك هناك اختبار آخر هو اختبار ثايل H. Theil، والذي يعتمد اختباره على التوزيع التقريبي لقيمة ($d^*$) في صيغة داربن - واطسون بين (dL) و (dU)، وهناك اختبار آخر حديث قام به هنشو R. Henshaw، ويتضمن حسابات في غاية الصعوبة، وهناك محاولات عديدة من قبل داربن نفسه وثايل في تحقيق قيم للمنطقة الحرجة، وكذلك تحقيق طرق أخرى لاختبار وجود الارتباط الذاتي ولمزيد من الإطلاع يمكن مراجعة المصادر المذكورة في نهاية هذا الكتاب.

---

(1) لمزيد من الإطلاع راجع:

1- J. Durbin and G. Watson; “Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression” Biometrika; vol, 38, PP. 159, 177, 1951.

2- M. dutts; “Econometric Methods” Op. Cit, ch 4. P. 231.

(٩-٧) طرق معالجة الارتباط الذاتي:

هناك عدة طرق للتخلص من الارتباط الذاتي أهمها طريقة التحويل (Transformation Method) والطرق التكرارية (Iterative Methods) وطريقة المربعات الصغرى العمومية (GLS).

(٩-٧-١) طريقة التحويل (كوكران – اوركات):

ويطلق عليها أيضا طريقة كوكران - اوركات (Cochrane – Orcutt Method) اسهل الطرق استخداما، ويمكن توضيحها باستخدام النموذج الخطي البسيط لتوضيح المعالجة القياسية للارتباط الذاتي.

لنفترض وجود النموذج الخطي البسيط وفرضياته كما هو مذكور أدناه:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t$$

وبافتراض كون ($U_t$) تخضع للارتباط الذاتي من الدرجة الأولى أي:

$$U_t = \rho U_{t-1} + \zeta_t$$

حيث أن: $\rho \leq 1$

وأن الحد العشوائي ($\zeta_t$) له الفرضيات التالية:

$$E(\zeta_t) = 0$$

$$E(\zeta_t \zeta_{t-1}) = \begin{cases} \sigma_\zeta^2 & S = 0 \\ & S \neq 0 \end{cases} \quad \text{For all } t$$

وعليه فمن أجل التخلص من الارتباط الذاتي بهذا النموذج نحول بياناته كما يلي:

بما أن:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t \quad \ldots\ldots (1)$$

وبأخذ التباطؤ الزمني ($t - 1$) تكون المعادلة (١) كما يلي:

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta X_{t-1} \quad \ldots\ldots (2)$$

وبضرب المعادلة (٢) بـ ($\rho$) نحصل على:

$$\rho Y_{t-1} = \rho \alpha + \rho \beta X_{t-1} + \rho U_{t-1} \quad \ldots\ldots (3)$$

وبطرح المعادلة (٣) من المعادلة (١) نحصل على:

$$(Y_t - \rho Y_{t-1}) = \alpha (1 - \rho) + \beta (X_t - \rho X_{t-1}) + (U_t - \rho U_{t-1}) \quad \ldots (4)$$

ومن ملاحظة المعادلة (٤) يتضح لنا بأن الحد الأخير هو عبارة عن:

$$U_t - \rho U_{t-1} = \zeta_t$$

$$U_t = \rho U_{t-1} + \zeta_t$$

ومع هذا فإن هذه الطريقة غير عملية كما هو مبين، حيث أن ($\rho$) يبقى مجهولا، وعليه يجب استخراج قيمته، وبهذا فإن دربن اقترح الطريقة التالية للتخلص من الارتباط الذاتي.

(٩-٧-٢) طريقة الإعادة (التكرار) (Iterative Method):

وبموجب هذه الطريقة يتم التقدير على مرحلتين، ويمكن توضيحها بالخطوات التالية:

أ- تقدر معادلة خط الانحدار البسيط $Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t$ ومن ثمة تقدير البواقي والتي هي: $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, ..., \hat{e}_n$.

ونستخدم هذه البواقي لنحصل على (تقدير الدورة الأولى First Round Estimate) للقيمة ($\rho$)، ونطلق عليه $\left(\hat{\rho}\right)$ وبتطبيق (OLS) نحصل على:

$$\hat{e}_t = \hat{\rho}\hat{e}_{t-1} + V_t$$

وعليه فإن:

$$\rho = \frac{\sum \hat{e}_t + \hat{e}_{t-1}}{\sum \hat{e}_t^2}$$

حيث إن: $(t = 2, 3, ..., n)$.

ب- تكون المتغيرات الجديدة، وهي $(Y_t - \hat{\rho}\ Y_{t-1})$ و $(X_t - \hat{\rho}\ X_{t-1})$ وعليه فإن النموذج سيأخذ الصيغة التالية:

$$Y_t - \hat{\rho}\ Y_{t-1} = \alpha^* + \beta (X_t - \hat{\rho}\ X_{t-1}) + \zeta^{\cdot}_t$$

حيث إن: $\alpha^* = \alpha (1 - \rho)$

وهذه تقديرها يشكل ما يسمى بتقدير الدورة الثانية (Second Round Estimate)، ويمكن أن نرمز لمعلماتها بما يلي: $\hat{\hat{\beta}}, \hat{\hat{\alpha}}$ واحتساب البواقي ويرمز لها بما يلي:

$$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \ldots, \hat{e}_n$$

حيث قيمة البواقي الثابتة هي:

$$\hat{e}_t = (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t)$$

ومن هذه المعادلة نستطيع الحصول على تقدير جديد لـ (ρ) وكما يلي:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum \hat{e}_{t-1}}$$

حـ- تكوين متغيرات جديدة كالآتي: $(Xt - \hat{\rho} X_{t-1}), (Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1})$ ونعيد نفس خطوات الحل التي اتبعت في الخطوات (ب) أعلاه.

د- نتبع نفس الخطوات السابقة حتى تتقارب تقديرات قيم β, α.

هـ- إعادة نفس الأسلوب وتقليصه إلى خطوتين فقط كما هي الحالة في حالة التقدير لدورة الثانية، وهذه الطريقة تعد مثالا لطريقة المربعات الصغرى العمومية Generalized Least Squares (GLS)، إذا تم استخدامها في عمل تحويلات للمتغيرات الأصلية.

من التحليل السابق لظاهرة مشكلة الارتباط الذاتي، اتضح لنا أن وجود هذه المشكلة سببه عدم الدقة في اختيار متغيرات النموذج الاقتصادي القياسي المدروس، وتعرض لمعالجة هذه المشكلة الكثير من القياسيين والرياضيين والإحصائيين، ولهم مقترحاتهم العديدة البسيطة منها والمعقدة ولكن معظمها يقع في إطار يوضح بأن السبب الأساس لهذه المشكلة هو عدم تكامل تركيب متغيرات النموذج الاقتصادي، وأن الحل الأمثل لها هو في إضافة متغير أو متغيرات مستقلة جديدة، أو تبديل، أو حذف متغيرات من النموذج إلى أن يتم التخلص من هذه المشكلة التي يعني وجودها هو أن تقديرات المعلمات غير دقيقة، ولا يمكن استخدامها لتحليل أثر المتغيرات المستقلة على المتغير التابع، ولا تصلح لعملية التنبؤ، وقد أثبتت التجارب الاقتصادية التطبيقية أن إضافة متغيرات جديدة هو الأسلوب الأمثل للتخلص من ظاهرة الارتباط الذاتي، أو المتسلسل، وللحصول على معلمات دقيقة يمكن على ضوئها اتخاذ القرار ورسم السياسة الاقتصادية المطلوبة.

(٣-٧-٩) طريقة المربعات الصغرى العمومية (GLS):

Generalized Least Squares Method:

اختصارا نطلق عليها (GLS) لتمييزها عن (OLS) ويعد البروفيسر A. C. Aitken أول من استخدم هذه الطريقة عام ١٩٣٥ في بحثه الموسوم.

" On Least Squares and Linear Combinations of Observations", The Rpyal Statistical Society of Edinburgh, Vol 55 (1935). PP. 42-48.

وسميت هذه الطريقة باسمه أي (Aitkens Generalized Least Squares Method)، وتهيئ طريقة (Aitken)، الحل الاعتيادي لمشكلة الارتباط الذاتي بين المتغيرات العشوائية في النماذج الاقتصادية، ويمكن تلخيص طريقة (Aitken) لحل مشكلة الارتباط الذاتي كما يلي:

بما أن هناك ارتباطا ذاتيا بين المتغيرات العشوائية لذلك فإن:

$$E(UU') = \sigma_u^2 \Omega$$

حيث $\Omega$ (OMEGA) عبارة عن مصفوفة متماثلة موجبة، وذات رتبة (n. n)، ويمكن إيجاد معكوسها، وتكون صفوف وأعمدة هذه المصفوفة معاملات تباين حدود الاضطراب، وعندما يتبع المتغير العشوائي طريقة ماركوف من الدرجة الأولى (المعادلات من (١) إلى (١٣) فإنه يمكن كتابة ($\Omega$) كما يلي:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-2} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots [17]$$

إذن:

$$\Omega^{-1} = (1-\rho^2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \rho & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\rho & (1+\rho^2) & -\rho & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & (1+\rho^2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (1+\rho^2) & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho & 1 \end{bmatrix} [18]$$

واعتياديا يجب أن نعمم طريقة (OLS) بأسلوب يجعلها تأخذ بنظر الاعتبار الترابط،

أو التداخل بين المتغيرات العشوائية (متغيرات حد الاضطراب)، وأن طريقة (Aitken) تكون قد حققت ذلك، وعليه فإن مقدرات (OLS) للمعلمات (β)، وتباينها ($Var(\hat{\beta})$) تستخرج لهذا النموذج كما يلي:

بما أن:

$$Y = X\beta + U$$

وبوجود:

$$E(UU') = \sigma_u^2 \Omega$$

فإن:

$$\hat{\tilde{\beta}} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} (X' \Omega^{-1} Y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [19]$$

وأن تباين (β) بواسطة (GLS) هي:

$$Var(\hat{\tilde{\beta}}) = \sigma_u^2 (X' \Omega^{-1} X)^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [20]$$

وهذه المقدرات تعد بديلا.

عن مقدرات (OLS) ومعادلاتها السابقة التي هي:

$$Var\ \hat{\beta} = (X X)^{-1} X Y$$

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 (X X)^{-1}$$

والتي تم حسابها بافتراض أن:

$$E(UU') = \sigma_u^2 I$$

ومما هو جدير بالذكر فإن طريقة (GLS) تتطلب معلومات وخلفية سابقة عن المعلمات (ρ)، وكيفية إدخالها إلى مصفوفة Ω، كذلك فإن منظومة المعادلتين [ ١٩ ] و [ ٢٠ ] تحتاجان إلى معرفة تامة حول المصفوفة Ω، وعن العمليات الرياضية التي تتضمنها، ولتحقيق فهم تقريبي لهذه الطريقة نأخذ المثال التالي:

لنفترض لدينا النموذج التالي:

$$Y = X\beta + U$$

مع افتراض:

$$E(U) = 0$$

$$E(U U') = V$$

$$V = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \Omega$$

إذن:

$$\hat{\beta} = (X \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y$$

وأن:

$$Vr\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 \ (X' \Omega^{-1} X)$$

وبما أن:

$$\sigma_u^2 = \frac{e'e}{n-k}$$

وأن: $e - Y - X\beta$

وعليه فإن $\Omega$ تساوي:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

وقيمة محددها هو:

$$|\Omega| = 1 - \rho^2$$

ولإيجاد معكوس $\Omega$ نطبق صيغة المعكوس السابقة الذكر، والتي تتمثل فيما يلي:

$$\Omega^C = \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^T = \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \Omega^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} & -\frac{\rho}{1-\rho^2} \\ \frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة $\Omega^{-1}$ هـي نفسـها مصـفوفة منظومـة المعادلـة [ ١٨ ] السـابقة الـذكر في وجود مشاهدتين وعناصر المصفوفة المـذكورة أعـلاه $(\rho, \rho^2, ..., \rho_{t-1})$ لكونهـا غـير معروفـة يمكـن تقديرها بطرق أخرى منها ما يلي:

١- الطرق التكرارية للحصول على $\hat{\rho}$ ومن ثمة تكوين $\Omega$.

٢- تطبيق (OLS) وحساب ($\rho$) باستخدام ($d^*$) حيث $\hat{\rho} = 1 - \frac{d^*}{2}$.

٣- استخدام طريقة دربن للحصول على $\rho$ حيث أن $\rho$ هو معامل ($Y_{t-1}$).

٤- استخدام طريقة ثايل - نكار (Theil – Nagar) لتقدير ($\rho$) باستخدام الصيغة الآتية:

$$\rho = \frac{n^2 . \left(1 - \frac{d^*}{2}\right) + K^2}{n^2 - K^2}$$

n هو عدد المشاهدات.

K هو عدد المعالم بما فيها المقطع.

وتشابه نتائج (GLS) مع النتائج التي يمكن الحصول عليها باستخدام بعض الطرق الأخـرى مثل الطرق التكرارية أو الطرق التي تعتمد عـلى تطبيـق (OLS)، عـلى البيانـات الأصـلية المحولـة باستخدام $\hat{\rho}$.

(9-8) تطبيقات وتمارين:

(٩-٨-١) التطبيق الأول:

إذا كان لدينا (٢٠) مشاهدة تختص بالصادرات (M) والدخل القومي (GNP) في مـدة (٢٠) سنة، كما مبينة بالجدول أدناه، والمطلوب:

أ- إيجاد انحدار (M) على (GNP) واختبار وجود ارتباط ذاتي أو عدمه باستخدام مستوى معنوية ٥%.

ب- صحح الارتباط الذاتي إذا وجده في (أ).

الحل: الخطوة الأولى:

إيجاد المعادلة التقديرية لانحدار (M) على (GNP) كما يلي:

$$\hat{M}_t = -56.13 + 0.13\ GNP$$

$$\hat{t}\ (-10.32)\ (28.92)$$

$$R^2 = 0.98$$

$$D^* = 0.65$$

الخطوة الثانية: الاختبار:

بما أن: $d^* = 0.65 < dL = 1.20$

وبمستوى معنوية ٥%، و $(n = 20)$، و $(K = 1)$ ومن الملحق (E) فإن $dL = 1.20$، وهذا يشير إلى وجود ارتباط ذاتي موجب.

ب- من الفرع (أ) يتضح لنا وجود الارتباط الذاتي، ولتصحيحه نتبع الخطوات الآتية:

١- نستخرج معادلة الانحدار التقديرية التالية:

$$\hat{M}_t = -20.89 + 0.72\ M_{t-1} + 0.15\ GNP_t - 0.12\ GNP_{t-1}$$

$$(3.58)\qquad (1.39)\qquad (-0.89)$$

$$R^2 = 0.99$$

وعليه باستخدام $\hat{\rho} = 0.72$ (وهو معامل $(M_{t-1})$ مـن الصـيغة المحولـة)، نحـول المتغـيرات الأصـلية كـما هـو مـذكور في صـيغة كـوكران - اوركـات، وأن قـيم المتغـيرات الأصـلية (M, GNP) والمحولة (*M*, GNP) موضحة أدناه في جدول (٩-١).

$$M^*_{1960} = 23.2\ \sqrt{1-(0.72)^2}\ \ 1 = 16.100$$

جدول (١-٩) يوضح بيانات الصادرات والدخل القومي خلال الفترة ١٩٦٠-١٩٧٩

| السنة | البيانات الأصلية | | البيانات المحولة | |
|---|---|---|---|---|
| ١٩٦٠ | ٢٣,٢ | ٥٠٦,٠ | ١٦,١٠٠ | ٣٥١,١٥١ |
| ١٩٦١ | ٢٣,١ | ٥٢٣,٣ | ٦,٣٩٦ | ١٥٨,٩٨٠ |
| ١٩٦٢ | ٢٥,٢ | ٥٦٣,٨ | ٨,٥٦٨ | ١٨٧,٠٢٤ |
| ١٩٦٣ | ٢٦,٤ | ٥٩٤,٧ | ٨,٢٥٦ | ١٨٨,٧٦٤ |
| ١٩٦٤ | ٢٨,٤ | ٦٣٥,٧ | ٩,٣٩٢ | ٢٠,٥١٦ |
| ١٩٦٥ | ٣٢,٠ | ٦٨٨,١ | ١١,٥٥٢ | ٢٣٠,٣٦٩ |
| ١٩٦٦ | ٣٧,٧ | ٧٥٣,٠ | ١٤,٦٦٠ | ٢٥٧,٥٦٨ |
| ١٩٦٧ | ٤٠,٦ | ٧٩٦,٣ | ١٣,٤٥٦ | ٢٥٤,١٤٠ |
| ١٩٦٨ | ٤٧,٧ | ٨٦٨,٥ | ١٨,٤٦٨ | ٢٩٥,١٦٤ |
| ١٩٦٩ | ٥٢,٩ | ٩٣٥,٥ | ١٨,٥٥٦ | ٣١٠,١٨٠ |
| ١٩٧٠ | ٥٨,٥ | ٩٨٢,٤ | ٢٠,٤١٢ | ٣٠٨,٨٤٠ |
| ١٩٧١ | ٦٤,٠ | ١٠٦٣,٤ | ٢١,٨٨٠ | ٣٥٦,٠٧٢ |
| ١٩٧٢ | ٧٥,٩ | ١١٧١,١ | ٢٩,٨٢٠ | ٤٠٥,٤٥٢ |
| ١٩٧٣ | ٩٤,٤ | ١٣٠٦,٦ | ٣٩,٧٥٢ | ٤٦٣,٤٠٨ |
| ١٩٧٤ | ١٣١,٩ | ١٤١٢,٩ | ٦٣,٩٣٢ | ٤٧٢,١٤٨ |
| ١٩٧٥ | ١٢٦,٩ | ١٥٢٨,٨ | ٣١,٩٣٢ | ٥١١,٥١٢ |
| ١٩٧٦ | ١٥٥,٤ | ١٧٠٢,٢ | ٦٤,٠٣٢ | ٦٠١,٤٦٤ |
| ١٩٧٧ | ١٨٥,٨ | ١٨٩٩,٥ | ٧٣,٩١٢ | ٦٧٣,٩١٦ |
| ١٩٧٨ | ٢١٧,٥ | ٢١٢٧,٦ | ٨٣,٧٢٤ | ٧٥,٩٦٠ |
| ١٩٧٩ | ٢٦٠,٩ | ٢٣٦٨,٥ | ١٠٤,٣٠٠ | ٨٣٦,٦٢٨ |

وكذلك:

$$G_{N\rho*1960} = 506.0\sqrt{1-(0.72)^2} = 351.151$$

وعليه فالمعادلة لانحدار $(M^*)$ على $(G_N \rho^*)$ تكون كما يلي:

$$M_t^* = -22.43 + 0.14\, G_{N\rho_t^*}$$

(-5.73) (15.78)

$R^2 = 0.93$

D = 2.57

من هذه المعادلة فإن: $d^* = 2.57 > du = 1.41$

وبمستوى معنوية ٥% ومع $K = 1, n = 20$. (ومن الملحق جدول ٤) فإنه نتيجة للتقدير الأخير لا يوجد ارتباط ذاتي. ويلاحظ أن متغير الدخل القومي $(GN\rho^*)$ استمر ذا معنوية عالي حيث إن قيمة $t^*$ في التقدير الأول أقل منها في التقدير الأخير . إضافة لذلك فإن $R^2$ في التقدير الأخير أقل منه في التقدير الأول.

(٢-٨-٩) التمارين:

١- اشرح المقصود بالارتباط الذاتي، وناقش الحالات التي يظهر فيها الارتباط الذاتي. من النموذج التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta x_t + U_t$$

حيث:

$$U_t = \rho U_{t-1} + \zeta_t$$

و

$$|\rho| < 1$$

وإن $(\zeta_t)$ تخضع للافتراضات التالية:

$$E(\zeta_t) = 0$$

$$E(\zeta_t \, \zeta_{t+s}) = \sigma_\zeta^2 S = 0$$

$$E(\zeta_t \, \zeta_{t+s}) = 0, S \neq 0$$

أوضح كيفية التغير الهيكلي في الفرضية $E(UU') = \sigma^2 I$. ولخص إمكانية تقدير $(\hat{\beta})$ إذا كانت قيمة $(\rho)$ معلومة.

٢- ما هو المقصود بالارتباط الذاتي؟ ما هي أسباب ظهوره بين متغيرات العنصر العشوائي؟ ارسم شكل توضيح فيه الارتباط الذاتي الموجب والسالب. ولماذا يعتبر الارتباط الذاتي مشكلة تستوجب العلاج في الدراسات القياسية؟

٣- إذا كانت دالة الادخار المقدرة باستخدام (OLS) هي:

$$\hat{Y}_X = 330 + 0.122\, X_t$$

$$S.E \quad (93.4) \quad (0.03)\ .\ n = 31$$

حيث (Y) هو الادخار الفردي (X) هو الدخل المتاح للفرد.

وإذا أعطيت النتائج الآتية:

$$= 0.69, \ \sum \hat{e}_t \, \hat{e}_{t-1} = 1620, \sum \hat{e}_t^2 = 1930$$

أ- كون فترة ثقة لكل من $\hat{\beta}_2 , \hat{\beta}_1$ بدرجة ثقة ٩٥% واشرح نتائجك.

ب- اختبر وجود الارتباط الذاتي (٠,٠٥) وإذا قبلت الفرض القائل بوجوده، ما هي سبل علاج؟ وضح التحويل المستخدم في العلاج.

٤- إذا أعطيت الدالة المقدرة الآتية:

$$\hat{Y} = 111.69 - 7.1882\, X_{1t} + 0.0143 X_{2t}$$

مقدرة من بيانات سلسلة زمنية مدتها ٢٥ سنة. وكانت لديك أيضا النتائج الآتية:

$$\sum \hat{e}_t^2 = 365.7, \sum (\hat{e}_t \hat{e}_{t-1})^2 = 290.3$$

المطلوب:

أ- اختبر ما إذا كان هناك ارتباط ذاتي عند مستوى معنوية (٠,٠٥). ما هي القيمة التقديرية لمعامل الارتباط الذاتي؟

ب- إذا كانت الإجابة في (أ) هي نعم. كيف تتخلص من وجود الارتباط الذاتي في هذه الحالة ؟ اشرح بالتفصيل.

٥- إذا أعطيت عينة حجمها (٣٠) مشاهدة وحصلت منها على النموذج المقدر الآتي:

$$\hat{Y}_i = 90 - 6.3\ X_{1i} + 0.02\ X_{2i}$$

حيث $\left(\hat{Y}\right)$ تمثل الكمية المطلوبة من سلعة ما.

$(X_1)$ تمثل سعر السلعة، $(X_2)$ تمثل دخل المستهلك.

إذا علمت أن: $\sum Y_i^2 = 2520, R^2 = 0.894, \sum (e_t e_{t-1})^2, r_{23} = -0.633$

المطلوب:

- اختبار الفرض القائل بأن هناك ارتباطا ذاتيا في النموذج (٠,٠٥)، أوجد قيمة هذا المعامل.

٦- " إن اختبار كل من (t) ,(F) لا يصلح للكشف عن وجود الارتباط الذاتي" ناقش مع شرح للاختيار البديل بالتفصيل.

٧- " هناك عدة طرق للتخلص من وجود الارتباط الذاتي في النموذج" عددها مع مناقشة طريقتي التحويل والتكرار بكل تفصيل مع أمثلة عددية.

٨- " وضع البروفيسر أتكن نموذج لمعالجة وجود الارتباط الذاتي في النماذج الاقتصادية عندما يتبع المتغير العشوائي ترتيب ماركوف من الدرجة الأولى"

ناقش ذلك بالتفصيل مع مثال عددي.

٩- في النموذج الخطي العام $Y= X\beta + U$.

أ- إذا علمت أن (U) يحقق كافة فرضيات مبدأ المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) فالمطلوب اشتقاق صيغة تقدير غير متحيز لتباين (U) في حالة وجود ارتباط ذاتي.

ب- إذا علمت أن (U) يحقق كافة فرضيات مبدأ المربعات الاعتيادية (OLS)ما عدا الفرض القائل باستقلال المتغيرات العشوائية (يوجد ارتباط ذاتي) وأن هذا الارتباط يتولد من خلال دالة الانحدار الذاتي ذات المرتبة الأولى.

و المطلوب اشتقاق صيغة لتقدير تباين (U).

# الفصل العاشر

# عدم التجانس

Hetroscedasticity

# الفصل العاشر

## عدم التجانس

## Heteroscedasticity

سبق وأن أوضحنا في النموذج الخطي البسيط والعام بأن تباين المتغيرات العشوائي مساو لقيمة ثابتة، أي أننا افترضنا وجود حالة (Homo- Scedasticity) ولكن في حالات كثيرة قد لا يساوي التباين قيمة ثابتة، وعليه فنحصل على حالة تسمى (Heteroscedasticity) فعند حصولنا على عدم ثبات التباين فهل تبقى معلمات النموذج الخطي تمتاز بكونها (BLUE)؟ هذا ما سوف نتطرق إليه في هذا الفصل.

(١٠-١) مفهوم عدم التجانس Hetero Scedasticity:

أيضا وكما أوضحنا سابقا فإن مصطلح (Heteroscedasticity) متكون من كلمتين هما (Heteor) أي مختلفا وغير متساو (Scedasticity) أي التباعد أو الانتشار أو التشتت أي عدم التساوي أو عدم التشابه، أو عدم التجانس، وهنا نقصد عدم ثبات التباين، أو عدم تساوي تباين حد الاضطراب، وهذا خروج عن الفرضية الثالثة للنموذج الخطي، حيث يلاحظ أنه في كثير من الدراسات القياسية، وخاصة تلك التي تعتمد على بيانات المقطع العرضي فإن فرضية ثبات تباين حد الاضطراب تصبح غير واقعية، فمثلا عند دراسة ميزانية الأسرة فإن تباين البواقي في دالة الانحدار من النادر أن يثبت مع تزايد الدخل، كذلك فإن بيانات المقطع العرضي لدراسة سلوك الشركة. وأن تباين البواقي من المحتمل أن يتزايد مع حجم الشركة وعليه فإنه عند تزايد أو تناقص تباينات حد الاضطراب مع تزايد قيم المتغيرات المستقلة فعندئذ نحصل على ما يسمى بعدم التجانس (Hetero Scedasticity)، فعندما يكون $(U_i)$ عشوائيا عندئذ نحصل على فرضية ثبات التباين، وتحدث ظاهرة (Hetero Scedasticity) في بيانات المقطع العرضي أكثر من بيانات السلسلة الزمنية، وعليه فعندما تكون لدينا بيانات السلسلة الزمنية، فالفرضية الأكثر منطقية هي عدم ثبات التباين، وعليه فإن وجود ظاهرة عدم التجانس تجعل من مقدرات النموذج الخطي غير كفوءة ومتحيزة في تقديراتها لقيمة معلمات النموذج واختبارات النموذج غير مقنعة ولا يمكن اعتمادها.

وأن ظاهرة عدم التجانس تؤثر في تقديرات تباين مقدرات النموذج وأن الاختبارات المستخدمة في النموذج كاختبار (t, F) تصبح في هذه الحالة غير واقعية ولا يمكن الاعتماد عليها (Unreliable).

(١٠-٢) أسباب ظهور عدم التجانس:

هناك عدة أسباب تجعل التباين متغيرا وغير ثابت منها:

١- سلوكية وتصرف البشر وتقلل الأخطاء فيها بمرور الزمن، وعليه فإن $\left(\sigma_u^2\right)$ يتناقص هو الآخر خلال الفترة الزمنية.

٢- يتزايد $\left(\sigma_u^2\right)$ بتزايد الدخل، وذلك لأن الناس لهم اختيارات متعددة حول سلوكية ادخاراتهم، ونفس الشيء بالنسبة للربح الكبير الذي يخلق للشركة خيارات عديدة أكثر من الشركة ذات الربح القليل.

٣- كلما تقدمت وسائل جمع البيانات والمعلومات كلمات قل $\left(\sigma_u^2\right)$، وعليه مثلا البيانات والمعلومات الدقيقة والواقعية التي توفرها بعض المصارف عن فعالياتها الاقتصادية بواسطة وسائل علمية دقيقة تقلل من الأخطاء فيها.

وعموما يجب ملاحظة أن مشكلة عدم التجانس تظهر بشكل واضح في بيانات المقطع العرضي أكثر منها في بيانات السلاسل الزمنية، حيث إن بيانات المقطع العرضي تناقش عادة الظاهرة في لحظة زمنية محددة، في حين أن بيانات السلاسل الزمنية تأخذ فترة طويلة قد تختفي فيها الآثار التي تظهر في الأجل القصير، أو في فترة زمنية ثابتة مثل حالات الدخل القومي، الاستهلاك، الادخار، الاستثمار، الاستخدام في بلدا ما خلال الفترة الزمنية ١٩٨٠-٢٠٠٠.

(١٠-٣) ظهور مشكلة عدم التجانس:

إن الطريقة الاعتيادية لعرض مشكلة عدم التجانس يمكن توضيحها بافتراض النموذج أدناه، وباستخدام المصفوفات.

نفترض النموذج التالي:

$$Y = X\beta + U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وبوجود الفرضيات التالية:

$$E(u\,u') = \sigma_u^2\,\Omega$$

فإن:

$$E(u\,u') \neq \sigma_u^2\, I_n$$

وهذا يعني ما يلي:

$$E(UU')=\sigma_u^2\begin{bmatrix}1/\lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1/\lambda_2^2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ . & . & . & . & . & & .\\ . & . & . & . & . & & .\\ . & . & . & . & . & & .\\ . & . & . & . & . & & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1/\lambda_n^2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ . & . & . & & .\\ . & . & . & & .\\ . & . & . & & .\\ . & . & . & & .\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}$$

ويلاحظ من المصفوفات أعلاه، أن العناصر خارج القطر الرئيسي هي قيم صفرية، وهذا يطابق الفرضية المشروحة بالفصل، وهي عدم وجود ارتباط ذاتي، أما العناصر القطرية فهي قيم كسرية مختلفة مقامها ($\lambda_i$) وليست قيم الوحدة (واحد)، كما سبق، وإن تم افتراضها في النموذج الخطي ويمكن الحصول على قيمة($\lambda_i$) بواسطة (OLS) في خطوتين، في الخطوة الأولى يتم التخلص من ظاهرة عدم التجانس بواسطة تحويل ملائم لجميع المتغيرات، وهذه الخطوة تتطلب معلومات مسبقة عن ($\lambda_i$)، حيث توضح ($\lambda_i$) المعلومات عن عينة معينة باستخدام عينة أخرى.

والخطوة الثانية هي أنه بعد نجاح عملية التحويل تطبق طريقة (OLS) على متغيرات النموذج، مع افتراض عدم وجود ارتباط ذاتي وكون ($\lambda_i$) غير معروفة، فإن هذا يتطلب إعطاء بعض الافتراضات عن هذا المؤشر.

من المعادلة (١) نجد بأن:

($\Omega$) تشير إلى المصفوفة المتضمنة البيانات غير الثابتة.

($\lambda_i$) تشير إلى قيم التباينات الموجبة القطرية.

وأن $\left(\sigma_u^2\right)$ تباين الحد العشوائي وهو قيمة مجهولة.

وهذا يعني ظهور مشكلة عدم التجانس أي، عدم ثبات التباين وهذه يعني ظهور المشاكل التالية:

(١-٣-١٠) أولا: مشكلة كون ($b_2$) أكثر كفاءة من ($B_2$)

وتتمثل المشكلة الأولى التي تواجه الباحث في كون ($\hat{b}_2$)

أكثر كفاءة من $\left(\hat{\beta}_2\right)$ في حالة وجود ظاهرة عدم التجانس.

ولتقدير قيمة ($\hat{b}_2$) نحتاج إلى إيجاد المعادلتين الطبيعيتين وحلهما والوصول إلى ذلك نستخدم المعادلة التالية:

$$\Omega^{-1} = P^{-1} P^{-1}$$

ويمكن تعريف $P^{-1}$ كما يلي:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{bmatrix} \quad ............ [2]$$

إذن: $\Omega^{-1} = P^{-1} P^{-1}$

وهذا يعني:

$$P^{-1} P^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{bmatrix}$$

(3. 3) (3. 3)

(3. 3)

$$\therefore P^{-1} P^{-1} = \Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{bmatrix}$$

وانسجاما مع ما سبق من منظومة المعادلات (٥) و (٦) وبقية المعادلات المذكورة في الفصلين السادس والسابع (الانحدار المتعدد) نحصل على ما يلي:

$$\hat{b} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y \quad .................... [3]$$

وهي عبارة عن أفضل مقدر غير متحيز لمعلمة $\left(\hat{\beta}\right)$ مع تباين - وتغاير هو:

$$Var(\hat{b}) = \sigma^2 (X' \Omega^{-1} X)^{-1} \quad .................... [4]$$

ولإيجاد قيمة (b) دعنا نستخدم حالة النموذج لمتغير مستقل واحد، (أي إيجاد قيمة ($\hat{b}_2$) وتباين ($\hat{b}_2$) بموجب فرضية عدم التجانس، ولتحقيق ذلك نتبع الخطوات:

نحاول إيجاد المعادلتين الطبيعيتين، وهذا يتطلب تحوير المعادلة (٣) كما يلي:

بما أن نموذجنا الحقيقي كان يتخذ الصيغة التالية:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + U_i$$

ومن المعادلة (٣) حصلنا على قيمة المقدر:

$$\hat{b} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y \text{ ........................ } [5]$$

فإذا تم ضرب طرفي منظومة المعادلة [ ٣ ] مسبقا بالحد ($X' \Omega^{-1} X$) نحصل على:

$$(X' \Omega^{-1} X) \hat{b} = X' \Omega^{-1} Y \text{ ......................... } [6]$$

وبحل منظومة المعادلة [ ٥ ] نحصل على معادلتين آنيتين وبحل هاتين المعادلتين بالتعويض، أو باستخدام صيغة كريمر نحصل على قيمة المقدر ($\hat{b}_1$), ($\hat{b}_2$) وأن الأسلوب المستخدم (أو الميكانيكية) في حل هذه المعادلات يمكن توضيحه، كما هو مذكور أدناه.

لنفترض بأن (X) يأخذ المصفوفة التالية:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{11} \end{bmatrix} \therefore x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_{11} & x_{12} \end{bmatrix}$$

وأن (P) يأخذ المصفوفة التالية:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix} \therefore P' = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

إذن:

$$P^{-1} P^{-1} = \Omega^{-1}$$

وبما أن:

$$\therefore \Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وعليه أصبح من السهل تطبيق منظومة المعادلة [ ٥ ] للحصول على قيمة المقدر ( $\hat{b}$ ) ولتحقيق ذلك نبدأ باشتقاق أجزاء المعادلة وكل جزء على حده، كما يلي:

$$\because x'\Omega^{-\iota}x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_{11} & x_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \end{bmatrix}$$

$$\therefore = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ X_{11}\lambda_1 & X_{12}\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2) & (\lambda_1 X_{11} + \lambda_2 x_{12}) \\ (x_{11}\lambda_1 x_{12}\lambda_2) & (x_{11}^2\lambda_1 + x_{12}\lambda_2) \end{bmatrix}$$

وبأخذ مجموع الحدود نحصل على:

$$\therefore\ x'\Omega^{-1}x = \begin{bmatrix} \sum \lambda_i & \sum \lambda_i x_i \\ \sum \lambda_i x_i & \sum \lambda_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

ولإيجاد الحد الثاني من منظومة المعادلة [ ٥ ]، والذي هو [ $x'\ \Omega^{-1}\ Y$ ] نتبع الخطوات التالية:

وبما أن:

$$\because X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_{11} & x_{21} \end{bmatrix}, \Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, Y_i = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$\because X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_{11} & x_{21} \end{bmatrix}, \Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, Y_i = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2.2)(2.2)(2.1)}{\therefore X'\Omega^{-1}Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_{11} & x_{12} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{(2.2)(2.1)}_{(2.1)}$$

$$\underset{(2.1)}{(2.2)(2.1)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ X_{11}\lambda_1 & X_{12}\lambda_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 Y_1 & +\lambda_2 Y_2 \\ X_{11}\lambda_1 Y_1 & +X_{12}\lambda_2 Y_2 \end{bmatrix}$$

وبأخذ مجموع الحدود نحصل على:

$$\underset{(2.1)}{\therefore X'\Omega^{-1}Y} = \begin{vmatrix} \sum \lambda_i Y_i \\ \sum X_i \lambda_i Y_i \end{vmatrix}$$

وبالتعويض في منظومة المعادلة [ ٦ ] نحصل على:

$$\therefore (X' \Omega^{-1} X) \hat{b} = X' \Omega^{-1} Y$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \sum \lambda_i & \sum \lambda_i X_i \\ \sum \lambda_i X_i & \sum \lambda_i X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \lambda_i Y_i \\ \sum X_i \lambda_i Y_i \end{bmatrix}$$

ومن ضرب هذه المصفوفات نحصل على المعادلتين الطبيعيتين وهما:

$$\hat{b}_1 \Sigma \lambda_i + \hat{b}_2 \Sigma \lambda_i X_i = \Sigma \lambda_i Y_i \text{ ....................... } (6\text{-}1)$$

$$\hat{b}_1 \Sigma \lambda_i X_i + \hat{b}_2 \Sigma \lambda_i X_i^2 = \Sigma X_i \lambda_i Y_i \text{ ............... } (6\text{-}2)$$

وباستخدام طريقة التعويض أو صيغة كريمر* نحصل على قيمة كل من ($\hat{b}_1$) و ($\hat{b}_2$) كما يمكن استخدام طريقة كريمر للحصول على قيمة معلمات النموذج الخطي وبموجب فرضية عدم التجانس نطبق الصيغة التالية:

$$X = A^{-1} b$$

وبالتعويض بالصيغة أعلاه نحصل على:

$$\begin{bmatrix} \sum \lambda_i Y_i \\ \sum X_i \lambda_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \lambda_i & \sum \lambda_i X_i \\ \sum \lambda_i X_i & \sum \lambda_i X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$$

وبتطبيق صيغة المحددات الموضحة في الفصل السادس، وهي:

$$\left( \frac{N_1}{D_1} \right)$$

حيث إن:

$$D_1 = \begin{bmatrix} \sum \lambda_i & \sum \lambda_i X_i \\ \sum \lambda_i X_i & \sum \lambda_i X_i^2 \end{bmatrix} = \left(\sum \lambda_i\right)\left(\sum \lambda_i X_i^2\right) - \left(\sum \lambda_i X_i\right)^2$$

وحيث إن:

$$N_1 = \begin{bmatrix} \sum \lambda_i & \sum \lambda_i Y_i \\ \sum \lambda_i X_i & \sum X_i \lambda_i Y_i \end{bmatrix} = \left(\sum \lambda_i\right)\left(\sum X_i \lambda_i Y_i\right) - \left(\sum \lambda_i Y_i\right)\left(\sum \lambda_i X_i\right)$$

---

* راجع الملحق (C) المصفوفات والمحددات.

من هذا نستنتج أن قيمة المعلمة هي:

$$\hat{b}_2 = \frac{N_1}{D_1}$$

وبالتعويض نحصل على معادلة تقدير ($\hat{b}_2$) وهي:

$$\hat{b}_2 = \frac{\left(\sum \lambda_i\right)\left(\sum X_i \lambda_i Y_i\right) - \left(\sum \lambda_i Y_i\right)\left(\sum \lambda_i X_i\right)}{\left(\sum \lambda_i\right)\left(\sum \lambda_i X_i^2\right) - \left(\sum \lambda_i X_i\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

وإذا أخذنا العامل المشترك وهو ($\lambda_i$) نحصل على:

$$\hat{b}_2 = \frac{n\sum XY - \left(\sum Y\right)\left(\sum X\right)}{n\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

وهي نفس قيمة ($\hat{\beta}_2$) التي تعمل بموجب فرضية التجانس (Homoscedasticity) وأن ($\lambda_i$) تمثل الإضافة على الصيغة المستخدمة للحصول على قيمة المعلمة $\left(\hat{\beta}\right)$ في حالة عدم التجانس Hetero Scedasticity أي أنه $\lambda$ يشير إلى أثر ظاهرة عدم التجانس.

(٢-٣-١٠) ثانيا مشكلة إيجاد صيغة تباين عينة لمنحنى الانحدار:

أما المشكلة الثانية فتتمثل في إيجاد صيغة تباين مقدر الانحدار، الذي يتمثل في الصيغة التالية:

$$\text{Var}(\hat{b}_2) = \frac{\sigma_u^2 \sum \lambda_i}{\left(\sum \lambda_i\right)\left(\sum \lambda_i X_i^2\right) - \left(\sum \lambda_i X_i\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,8\,]$$

وأن اشتقاق صيغة تباين المعلمات المقدرة ($\hat{b}_2$) بموجب فرضية عدم التجانس المعادلة (٧) يمكن التوصل إليها كما يلي:

بما أن تباين المعلمة ($\hat{b}_2$) يشتق بواسطة منظومة المعادلة [ ٤ ] وهي:

$$\text{Var}(\hat{b}_2) = \sigma_u^2 (X' \Omega^{-1} X)^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,4\,]$$

من هذه المعادلة نحصل على منظومة المعادلة [ ٩ ] المذكورة أدناه وكما يلي*،وباتباع نفس الأسلوب المذكور في الفصول السابقة نجد أنه:

---

* راجع الفصل السابع.

* راجع الملحق (B).

$$\because X'\Omega^{-1}X = \begin{bmatrix} \sum \lambda_i & \sum \lambda_i X_i \\ \sum \lambda_i X_i & \sum \lambda_i X_i^2 \end{bmatrix}$$

فإن معكوسها يتم الحصول عليه باتباع الخطوات التالية:

بتطبيق صيغة المعكوس وهي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} abjA$$

إذن المحدد هو:

$$|X'\Omega^{-1}X| = \begin{bmatrix} \sum \lambda_i & \sum \lambda_i X_i \\ \sum \lambda_i X_i & \sum \lambda_i X_i^2 \end{bmatrix}$$

$$= (\sum \lambda_i)(\sum \lambda_i X_i^2) - (\sum \lambda_i X_i)^2 = C$$

حيث تشير (c) إلى قيمة المحدد للحـد $(X'\Omega^{-1}X)$[**]، وذلـك لتبسـيط الاشـتقاقات القادمـة،

وأن (Cofactor) للعنصر المشترك للحد $(X'\Omega^{-1}X)$ هو:

$$(X'\Omega^{-1}X)^C = \begin{bmatrix} \sum \lambda_i X_i^2 & -\sum \lambda_i X_i \\ -\sum \lambda_i X_i & \sum \lambda_i \end{bmatrix}$$

وأن مبدله (Transpose) هو:

$$(X'\Omega^{-1}X)^T = \begin{bmatrix} \sum \lambda_i X_i^2 & -\sum \lambda_i X_i \\ -\sum \lambda_i X_i & \sum \lambda_i \end{bmatrix}$$

إذن معكوس الحد $(X'\Omega^{-1}X)$ هو:

$$\therefore (X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \begin{bmatrix} \sum \lambda_i X_i^2 & -\sum \lambda_i X_i \\ -\sum \lambda_i X_i & \sum \lambda_i \end{bmatrix}$$

وبالضرب إذن:

$$\therefore (X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sum \lambda_i X_i^2}{C} & \frac{-\sum \lambda_i X_i}{C} \\ \frac{-\sum \lambda_i X_i}{C} & \frac{\sum \lambda_i}{C} \end{bmatrix}$$

---

[**] راجع الملحق (B).

وعليه فإن تباين ( $\hat{b}$ ) عبارة عن:

$$Var\left(\hat{b}\right) = \sigma_u^2\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} = \sigma_u^2 = \begin{bmatrix} \frac{\sum \lambda_i X_i^2}{C} & \frac{-\sum \lambda_i X_i}{C} \\ \frac{-\sum \lambda_i X_i}{C} & \frac{\sum \lambda_i}{C} \end{bmatrix} \quad .. [9]$$

وهكذا فــإن المصفوفة [ ٩ ] تمثل قيمـــة تباين ( $\hat{b}_1$ ) و ( $\hat{b}_2$ ) وهي القيـــم القطرية في المصفوفة، وعليه فإن:

$$\text{Var}(\hat{b}_2) = \frac{\sigma_u^2 \sum \lambda_i}{C} = \frac{\sigma_u^2 \sum \lambda_i}{\left(\sum \lambda_i\right)\left(\sum \lambda_i X_i^2\right) - \left(\sum \lambda_i X_i\right)^2} \quad \ldots (10)$$

وإن تباين ( $b_1$ ) كما يلي:

$$\text{Var}(\hat{b}_1) = \frac{\sigma_u^2 \sum \lambda_i X_i^2}{C} = \frac{\sigma_u^2 \sum \lambda_i X_i^2}{\left(\sum \lambda_i\right)\left(\sum \lambda_i X_i^2\right) - \left(\sum \lambda_i X_i\right)^2}$$

في حين نجد أن المصفوفة [ ٩ ] تتضمن إضافة إلى التباين، تغايــر ( $\hat{b}_1$ ) ، ( $\hat{b}_2$ ) وهي كما يلي:

$$\text{Covar}(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = -\frac{\sigma_u^2 \sum \lambda_i X_i}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

بتعويض (C) بما يساويها:

$$\therefore \text{Covar}(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = -\frac{\sigma_u^2 \sum \lambda_i X_i}{\left(\sum \lambda_i\right)\left(\sum \lambda_i X_i^2\right) - \left(\sum \lambda_i X_i\right)^2}$$

(٣-٣-١٠) ثالثا: مشكلة اختبار دقة المعلمة ( $b_2$ ):

تتمثـل المشـكلة الثالثـة في اختبـار كفـاءة Efficiency المعلمـة ( $\hat{b}_2$ ) وهـذا يتطلـب بـدوره احتساب ومقارنة النسبة (Ratio) بين تباينين هما:

$$\frac{Var(b)}{Var(\beta)}$$

ولتحقيق ذلك دعنا نستدعي المعادلة (٥)، وهـي: $Y = X\beta + U$ ومنظومـة معادلـة تقـدير قيمة المعلمات وهي: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ والتي سبق أن تم برهانها، بأنها غير متحيـزة، وأن صـيغة التباين - التغاير لها كما يلي:

$$Var(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)']$$

أي:

$$Var(\hat{\beta}) = (x'x)^{-1} x' E(u u') x (x'x)^{-1}$$

(لاحظ الفصلين السادس والسابع).

وبما أن:

$$E(u u') = \sigma_u^2 \Omega$$

إذن:

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X' \Omega X (X'X)^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [12]$$

ومن هذه المعادلة نشتق تباين العينة لخط الانحدار، وكما يلي:

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2 \left[ \left( \sum \frac{1}{\lambda_i} \right) \left( \sum X_i \right)^2 - 2n \left( \sum \frac{1}{\lambda_i} X_i \right) \left( \sum X_i \right) + n^2 \left( \sum \frac{1}{\lambda_i} X_i \right) \right]}{\left[ n \sum X_i^2 - \left( \sum X_i^2 \right) \right]^2} \quad (13)$$

والبرهان في اشتقاق منظومة هذه المعادلة [ ١٣ ] مشابه تماما لبرهان منظومة المعادلة [ ١٠ ] السابقة الذكر، والذي نحتاجه هو فقط توضيح اشتقاق المصفوفات المكونة للمنظومات التالية، وللتوضيح نأخذ حالة المتغير المستقل الواحد، ولتفترض أن:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} \\ 1 & X_{12} \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ X_{11} & X_{12} \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

وأن:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sum X_i^2}{c} & -\frac{\sum X_i}{c} \\ -\frac{\sum X_i}{c} & \frac{2}{c} \end{bmatrix}$$

وحيث إن:

$$| X'X | = 2 \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2$$

وعليه فإن:

$$X'\Omega X = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum \lambda_i} & \frac{\sum X_i}{\sum \lambda_i X_i} \\ \frac{\sum X_i}{\sum \lambda_i X_i} & \frac{\sum X_i^2}{\sum \lambda_i} \end{bmatrix}$$

من هذا نستنتج أن:

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}_2\right) = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \frac{\sum X_i^2}{c} & -\frac{\sum X_i}{c} \\ -\frac{\sum X_i}{c} & \frac{2}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum \lambda_i} & \frac{\sum X_i}{\sum \lambda_i X_i} \\ \frac{\sum X_i}{\sum \lambda_i X_i} & \frac{\sum X_i^2}{\sum \lambda_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sum X_i^2}{c} & -\frac{\sum X_i}{c} \\ -\frac{\sum X_i}{c} & \frac{2}{c} \end{bmatrix}$$

وهكذا فإن وجود ($\lambda$' s) معلومة يفضل تقدير قيمة ( $\hat{b}$ ) مـن المعادلـة (٦) بـدلا مـن $\left(\hat{\beta}\right)$ المستخرجة بواسطة منظومة المعادلة[ ١٢ ]، والسبب يعود إلى كـون المعادلـة (٦) تضـمن الخـواص (BLUE)، وأن فقدان خاصية الكفاءة (Efficiency) في استخدام $\left(\hat{\beta}\right)$ بدلا من ( $\hat{b}$ ) يمكن إيضاحه في حالة المتغير المستقل الواحد وبوجود افتراضات خاصة بحالة عدم التجانس،ولتوضـيح كونه ( $\hat{b}$ ) أكـثر كفاءة من $\left(\hat{\beta}\right)$ كما سيتضح ذلك من التطبيقات الواردة في (١-٦-١٠).

(١٠-٤) اختبارات عدم التجانس:

أهم الاختبارات المستخدمة لفحص مشكلة عدم تجانس التباين هي:

١- اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان The Spearman Rank Correlation Test.

٢- اختبار بارك Park Test.

٣- اختبار كولدفلد وكوندت Goldfeld and Quondt Test.

وسيتم مناقشتها نظريا وعمليا وعليه يجب مراجعة التطبيقات لاستيعاب الطرح النظري (١-٦-١٠).

**(١-٤-١٠) اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان:**

يعد هذا الاختبار أبسط أنواع اختبارات تجانس التباين ويمكن تطبيقه في حالـة العينـات الصغيرة والعينات الكبيرة على حد سواء، وخطوات هذا الاختبار هي كالآتي:

أولا: في حالة الانحدار البسيط:

$$Y_i = \beta_0 - \beta_1 X_i + U_i$$

نتبع الخطوات التالية:

أ- الخطوة الأولى:

يتم توفيق معادلة الانحدار:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

ويتم إيجاد قيم البواقي ($e_i$) التي هي تقدير للمتغير العشوائي، حيث إن:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

ب- الخطوة الثانية:

يتم أخذ القيم المطلقة للبواقي $| e_i |$، ثم يتم ترتيـب قـيم $e_i, X_i$ وفـق ترتيـب تصـاعدي أو تنازلي ويتم إعطاء كل منهما رتبا وفق تسلسـل القـيم في الترتيـب (الرتـب المعطـاة هـي الأرقـام الطبيعية مع ملاحظة أخذ متوسط الرتب للقيم المكررة وإعطاء هـذا المتوسـط لكـل قيمـة مـن القيم المتكررة)، ثم نحسب فروق الرتب ومنها يحسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وهو:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D_i^2}{n(n^2-1)}$$

حيث ($D_i$) يمثل الفروق بين الرتب للأزواج المتناظرة لكل من $e_i, X_i$ (وليست المرتبة).

و ($n$) هو عدد المشاهدات.

حـ- الخطوة الثالثة:

يتم حساب قيم $t$ وفقا للإحصائية الآتية:

$$t = \frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

ثم تقارن $\left(\hat{t}\right)$ المحسوبة مع $t_{(\alpha,\, n-2)}$ فإذا كان ($t$) المحسوبة أكبر من الجدولية نقبل

فرض عدم التجانس تباين (U)، أما إذا كانت (t) المحسوبة أصغر من الجدولية فإننا نقبل الفرض القائل بتجانس تباين المتغير العشوائي (U)، راجع التطبيقين الأول والثاني.

ثانيا: في حالة الانحدار المتعدد:

يتم حساب معامل ارتباط الرتب سبيرمان واختباره لكل من ($e_i$) والمتغيرات المستقلة كل على حدة، أي يتم حساب واختبار (rs) لكل من : $(e_i, X_2), (e_i, X_i), \ldots, (e_i, X_k)$ في حالة وجود (k) متغيرا مستقلا في النموذج.

ملاحظة:

تم استخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بدلا من معامل الارتباط البسيط، لأن معامل الارتباط البسيط بين البواقي والمتغيرات المستقلة يساوي الصفر في حالة استخدام طريقة المربعات الصغرى للتقدير لأن:

$$\sum e_i = 0, e' = 0$$

وبما إن:

$$\therefore\ r_{ex} = \frac{\sum e_i x_i}{\sqrt{\sum e_i^2}\sqrt{\sum x_1^2}} = \frac{\sum x_i\left(y_i - \hat{y}_i\right)}{\sqrt{\sum e_i^2}\sqrt{x_i^2}}$$

حيث إن: $e = (y_i - \hat{y}_i)$

وإن:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i$$

$$\therefore\ \frac{\sum x_i\left(y_i - \hat{\beta}x_i\right)}{\sqrt{\sum e_i^2}\sqrt{\sum x_i^2}}$$

$$= \frac{\sum x_i yi - \sum x_1^2 \hat{\beta}}{\sqrt{\sum e_i^2}\sqrt{\sum x_i^2}} = \frac{0}{\sum e_i^2 x_1^2} = 0$$

لأن:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

(١٠-٤-٢) اختبار بارك Park Test:

يفترض هذا الاختبار أن $\left(\sigma_u^2\right)$ دالة في المتغير المستقل $(X_i)$ وهذه الدالة تأخذ الصورة التالية:

$$\sigma_{ui}^2 = \sigma_u^2 \; X_i^{\delta} e_i^{\gamma}$$

وبأخذ لوغاريتم هذه الدالة فإنه:

$$\text{Log } \sigma_{ui}^2 = \text{Log } \sigma_u^2 + \delta \text{ Log } X_i + \gamma_i$$

حيث $(\gamma_i)$ هو حد الاضطراب التصادفي (Stochastic Disturbance Term) وحيث أن $\left(\sigma_{ui}^2\right)$ غير معروفة لذا يتم استخدام $(e_i^2)$ كتقريب لها، ولذلك فإن $(Z^*)$ يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Log } \sigma_i^2 = \text{Log } \sigma_u^2 + \delta \text{ Log } X_i + \gamma_i \\ &Z^* \\ &\text{Log } \sigma_i^2 = \gamma + \delta X_i^* + \gamma_i \end{aligned}\right\}$$

حيث:

$$X_i^* = \text{Log } X_i,\; \gamma = \text{Log } \sigma_u^2$$

وتكون خطوات الاختبار في النموذج الخطي البسيط $(Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i)$ كالآتي:

١- يتم توفيق معادلة الانحدار على ضوء البيانات المعطاة عن $(X, Y)$ أي بإيجاد:

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_i X_i$$

٢- يتم حساب $e_i$ باستخدام المعادلة:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

ثم بتربيع هذه القيمة وإيجاد لوغاريتهما وكذلك لوغاريتم $(X_i)$ المقابلة لها.

أي إيجاد:

$$X_i^* = \text{Log } X_i,\; \text{Log } (e_i^2)\; Z^*$$

٣- يتم توفيق معادلة انحدار:

$$Z^* \leftarrow \text{Log } e_i^2 = \gamma + \delta X^*i + \gamma_i$$

أي إيجاد المعادلة:

$$\hat{Z}_i^* \leftarrow \text{Log } e_i^2 = \gamma + \delta X_i^*$$

٤- يتم اختبار معنوية $\hat{\delta}$ باستخدام اختبار (t)، أي حساب:

$$\hat{t} = \frac{\hat{\delta}}{SE\left(\hat{S}\right)} \frac{\hat{\delta}}{SE\left(\hat{S}\right)}$$

فإذا كانت $\left(\hat{t}\right)$ المحسوبة أكبر من الجدولية فهذا يعني أن تباين المتغير العشوائي (U) غير متجانس، أما إذا كانت $\left(\hat{t}\right)$ المحسوبة اصغر من (t) الجدولية فهذا يعني أن ذلك التباين متجانس.

ملاحظة:

من عيوب هذا الاختبار أن حد الاضطراب ($\gamma_i$) قد لا يحقق فرضيات مبدأ المربعات الصغرى (OLS) حيث ربما يكون هو ذاته غير متجانس التباين.

(٣-٤-١٠) اختبار كولدفلد - كواندت Goldfeild – Quandt Test:

هذا الاختبار خاص بالعينات الكبير ($n \geq 30$) ويفترض أن حد الاضطراب ($U_i$) له توزيع طبيعي وأن هناك استقلالية بين $U_i, U_j$ أي أن:

$E(U_i U_j) = 0, i \neq j$

وفرضية الاختبار هي:

$H_0: U_i$ متجانس

$H_1: U_i$ غير متجانس (مع تزايد التباين)

وخطوات العمل بهذا الاختبار هي كالآتي:

الخطوة الأولى:

تقوم بترتيب المشاهدات وفق تسلسل تصاعدي استنادا إلى قيم المتغير المستقل $x_i$.

الخطوة الثانية:

نختار عددا معينا من المشاهدات الوسيطة (يمكن أن يكون $\frac{n}{3}$ أو أقل قليلا إذا كان عدد المشاهدات ٣٠، تكون $C = 8$، $n = 40$، تكون $C = 60, C = 12$، تكون $C = 16$.

أما المشاهدات المتبقية وعددها ($n - c$) يتم تقسيمها إلى مجموعتين جزئيتين لهما عدد

متساو من المشاهدات وهـو $\left(\frac{n-c}{2}\right)$، تحتـوي المجموعـة الأولى عـلى القـيم الصـغيرة للمتغير (X)، والأخرى على القيم الكبيرة للمتغير (X).

الخطوة الثالثة:

يتم توفيق معادلة انحدار كل مجموعة من هاتين المجموعتين على أساس مشـاهدات كـل منهما، ثم يتم حساب مجموع مربعات البواقي في كل منهما أي يـتم حسـاب $\sum e_1^2, \sum e_2^2$ حيـث $\sum e_1^2$ يساوي مجمـوع مربعـات البـواقي للمجموعـة الأولى التـي تشـمل قـيم (X) الصـغيرة ولـه درجات حرية عددها:

$$V_1 = \frac{n-c}{2} - K$$

وأن $\sum e_2^2$ = مجموع مربعات البواقي للمجموعة الثانية التي تشمل قيم (X) الكبيرة ولـه درجات حرية عددها:

$$V_2 = \frac{n-c}{2} - K$$

حيث K هو عدد المعالم المطلوب تقديرها في النموذج.

الخطوة الرابعة:

بما أن:

$$\hat{\sigma}_{u_1}^2 = \frac{\sum e_1^2}{V_1}, \therefore \sum e_1^2 = U_1 V_1$$

$$\hat{\sigma}_{u_2}^2 = \frac{\sum e^2}{V_2}, \therefore \sum e_2^2 = U_2 V_2$$

فإذا كان فرض العدم صحيحا فإن:

$$\therefore \frac{V_1 \hat{\sigma}_{u_2}^2}{U} \sim X^2 (V_1)$$

$$\frac{V_2 \hat{\sigma}_{u_2}^2}{U} \sim X^2 (V_2)$$

وحيث إن:

$$V_1 = V_2$$

إذن: $\therefore F = \dfrac{X^2(V_2)/V_2}{X^2(V_1)/V_1} \sim F(V_2, V_1)$

$$= \frac{\dfrac{V_2\,\hat{\sigma}^2_{u_2}}{\sigma^2_U}/V_2}{\dfrac{V_1\,\hat{\sigma}^2_{u_1}}{\sigma^2_U}/V_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{e_2}{e_1}F(V_1,V_2)$$

إذا كانت: $V_1 = V_2$

إذن: $= \dfrac{(n-c-2-k)}{2}$

فإذا كانت قيمة (F) المحسوبة وفقا للصيغة أعلاه مساوية للواحد الصحيح أو، قريبة منه فإن ذلك يعني أنه لا يوجد فرق معنوي بين تبـاين المجمـوعتين أي، أن $(U_i)$ لهـا تبـاين متجـانس ولذلك يقبل $H_0$.

أما إذا كانت غير مساوية للواحد الصحيح عندئذ نقـوم بمقارنتهـا مـع (F) الجدوليـة عنـد درجتي حرية $V_1, V_2 = \dfrac{(n-c-2-k)}{2}$، ومستوى معنوية معين وليكن (α) فإذا كانت:

أي أن: $(U_i)$ متجانس التباين

يـرفض $H_0$ أي أن التبـاين غـير متجـانس Reject $H_0$ وكلـما زادت قيمـة (F) المحسـوبة عـن الجدولية كلما زادت درجة عدم تجانس التباين.

ويلاحظ أنه إذا كان نموذج الانحدار الأصلي يتضمن أكثر من متغير مستقل فإنه يتم اتباع نفس الخطوات بالنسبة لكل متغير منها (أي ترتيب المشاهدات بالنسبة للمتغير الذي يعتقد أنه سبب عدم التجانس)، كما يلاحظ أنه إذا كان عدد المشاهدات (n) فرديا يجب اختيـار (c) لتكـون فردية كذلك.

هناك اختبارات أخرى عديدة منها اختبار كليجر[١] (Glejser Test). واختبار بـروش - باجـان (Brensch – Pagan Test)[٢].

---

(1) A. Koutsoyiannis; Op. Cit; PP. 186-187.

(2) J. Joheston, Op. Cit; PP. 1984.

(٥-١٠) طرق الكشف عن عدم التجانس:

هناك عدة طرق يمكن استخدامها للاستدلال على وجود ظاهرة مخالفة ثبات التباين ومنها:

١٠-٥-١ طريقة استخدام الأشكال البيانية:

ويمكن استخدام أشكال الانتشار لتأشير ظاهرة عدم التجانس بإحدى الطريقتين:

أ- يمكن استخدام شكل الانتشار ما بين الأخطاء المقدرة ($\hat{e}_i$) والقيم التقديرية للمتغير التابع $\left(\hat{Y}_i\right)$ فإذا كانت العلاقة بينهم تمثل بالشكل التالي:

i- سنحصل على حالة التجانس Homosecdasticity أي ثبات التجانس أي:

$\hat{y}_i$

(i)

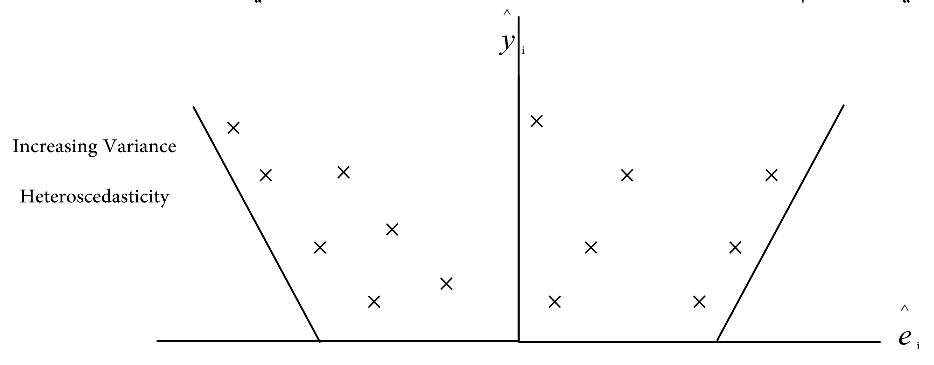
Constant

Variance

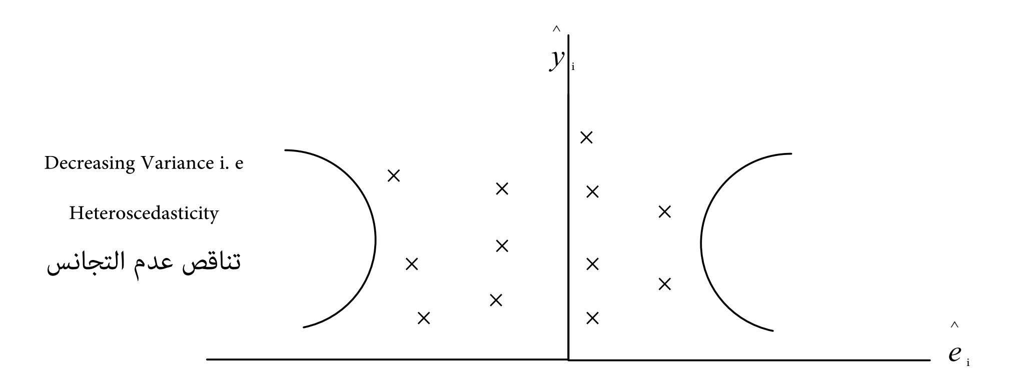
0

$\hat{e}_i$

ii- في حالة عدم التجانس المتزايد Heteroscedasticity وهذه تأخذ الشكل الآتي:

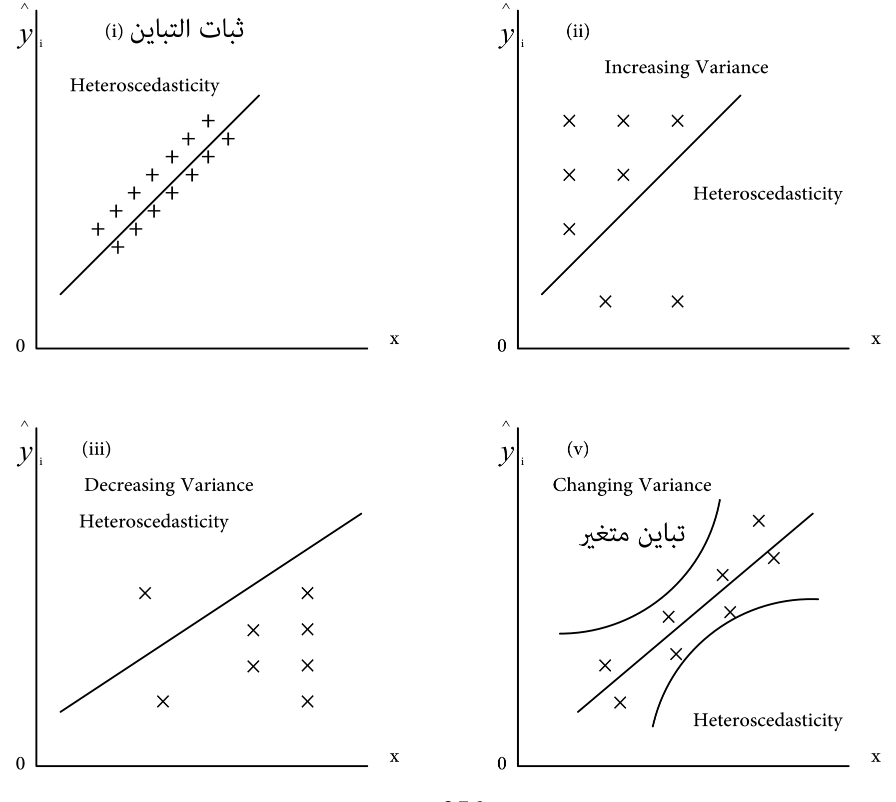



iii- في حالة عدم التجانس المتناقصة وهذه تأخذ الشكل الآتي:




ب- ويمكن التعرف على مشكلة عدم التجانس أيضا من خلال شـكل انتشـار الأخطـاء ($\hat{e}_i$) حـول خط الانحدار المقدر Estimated Regression Line،ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

$$\hat{y} = \alpha + b\,x$$



٢-٥-١٠ الطريقة الحسابية:

وبموجب هذه الطريقة نفترض ثبات التباين أي (Homoscedasticity) (Constant Variance)،

وعليه عند تطبيق OLS للحصول على معلمات النموذج وقيمة $(\hat{Y}_i)$ و $(\hat{e}_i)$، ولمعرفة العلاقة بين $x_i, e_i$ نجري المقارنة بين حد الخطأ $\hat{e}_i$ وقيم المتغير المستقل في النموذج، ولغرض المقارنة بينهما:

- نرتب قيم $x_i$ تصاعديا في عمود رابع (انظر المثال المذكور أدناه).
- ثم نضع القيم المطلقة الخطأ $|\hat{e}_i|$ والمصاحبة لـ $x_i$ في ترتيب في العمود الخامس.
- ثم نقارن بين قيم $x_i$ المرتبة (العمود الرابع) مع القيم المطلقة لحد الخطأ والمصاحبة لها (i).

3-٥-١٠ الطريقة الأولية:

بموجب هذه الطريقة نفترض ثبات التباين $\sigma^2$ (أي وجود Homosecdasticity) وعليه نطبق OLS للحصول على معلمات النموذج وقيمة $\left(\hat{Y}\right)$ وكذلك $\hat{e}_i$.

ولأغراض المقارنة بين حد الخطاء $(\hat{e}_i)$ وقيم المتغير التوضيحي في النموذج.

نرتب قيم $(x_i)$ تصاعديا في عمود رابع (انظر المثال أدناه)، ثم توضع القيم المطلقة $|\hat{e}_i|$ لحدود الخطأ والمصاحبة لـ $x_i$ في ترتيب في عمود خامس، ثم نقارن بين قيم $x_i$ المرتبة (عمود رابع) مع قيم حد الخطاء المطلقة والمصاحبة لها.

(i) فإذا كانت العلاقة منتظمة بينهما بحيث قيم المتغير التوضيحي تتزايد مع تزايد يتم $\hat{e}_i$ المطلقة بحيث يكون ذلك ارتباطا موجبا وهذا يعني وجود مشكلة (عدم التجانس) Heteroscedasticity.

(ii) إما إذا كانت العلاقة تشير إلى تزايد $x_i$ وتناقص $|\hat{e}_i|$ فيشير معامل الارتباط إلى وجود علاقة سلبية أي وجود عدم تجانس منتظم سالب Heteroscedasticity.

(iii) أما إذا كانت $|\hat{e}_i|$ تتناقص خلال فترة معينة ثم تأخذ بالتزايد مرة أخرى في فترة أخرى مما يشير ذلك إلى عدم انتظام العلاقة وبالتالي عدم وجود مخالفة لفرضية ثبات التباين أي وجود Heteroscedasticity (تجانس التباين).

وهذه الطريقة الأولية يمكن استخدامها في النماذج الخطية البسيطة المتعدد المستخدمة

في تقدير المعلمات وذلك بإجراء مقارنة في كل مرة بين المتغير التوضيحي و $|\hat{e}_i|$ وبشكل منفصل.

ومن سلبيات هذه الطريقة أننا قدرنا قيم المتغير التابع وتقديرات المتغير العشوائي $\hat{e}_i$ بطريقة OLS وبافتراض عدم وجود مخالفة كفرضية تجانس التباين $E(x_i e_i = 0)$، لذلك نتوقع أن قيم التقدير للمعلمات بموجب هذه الطريقة غير صحيحة وبالتالي فإن تقديرات $(\hat{y}_i)$, $(\hat{e}_i)$ غير دقيقة، ولتجنب عدم الدقة يفضل استخدام طريقة سبيرمان المذكورة في التطبيق أدناه.

(٦-١٠) تطبيقات وتمارين:

(١-٦-١٠) التطبيقات:

التطبيق الأول:

من البيانات الافتراضية أدناه وضح استخدام الطريقة الأولية للكشف عن عدم التجانس (عدم تجانس التباين).

| Xi | $\hat{e}_i$ | $\mid \hat{e}_i \mid$ | ترتيب $x_i$ | $\mid \hat{e}_i \mid$ المقابلة |
|---|---|---|---|---|
| ١٦ | -2 | 2 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 11 | 5 |
| 24 | 1 | 1 | 16 | 2 |
| 26 | -7 | 7 | | |
| 11 | 5 | 5 | 26 | 7 |

من هذا المثال يتضح بأن: لا توجد علاقة منتظمة بين حد الخطأ $|\hat{e}_i|$ والمتغير $(x_i)$ ففي الوقت الذي نجد فيه قيم $x_i$ متزايدة نجد بأن قيم حد الخطأ متذبذبة وعليه فنستنتج بأن هذه البيانات خالية من عدم التجانس أي وجود Homoosecdasticity.

ثالثا: طريقة معامل سبيرمان للرتب (الطريقة الإحصائية):

بعد هذا الاختبار للكشف عن Heterosecdasticity من أبسط الاختبارات مقارنة باختبار (بارك، كولدفيلد - كواندت، ويعتمد على القيمة $|\hat{e}_i|$ المطلقة للأخطاء المقدرة وقيم المتغير $x_i$، وللحصول على هذا المعامل نتبع الخطوات التالية:

١- تقدير معالم النموذج بطريقة OLS.

٢- تقدير قيمة المتغير التابع ($Y_i$) ثم إيجاد الانحرافات المطلقة لها وهي $|Y_i - \hat{Y}_i|$ والتـي تسـاوي قيمة $|\hat{e}_i|$.

٣- إعطاء الرتب لكل من قيم الانحرافات المطلقة $|\hat{e}_i|$ والمتغير المستقل $x_i$.

٤- تطبيق صيغة معامل سبيرمان للرتب لإيجاد قيمة $r\,|\hat{e}|,\ x_i$ كما يلي:

$$r\,|\hat{e}|,\ x_i = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

حيث تشير (n) إلى حجم العينة، $d_i^2$ تشير إلى الفرق بين ترتيب القيم المطلقـة للانحرافـات وترتيب المتغير المستقل $x_i$، أما $(r\,|\hat{e}_i|,\ x_i)$ فيشير إلى معامل الارتباط بين قـيم الحـد العشـوائي $|\hat{e}_i|$ وقيم المتغير المستقل $x_i$.

٥- تحليل نتيجة معامل سبيرمان للرتب وكما يلي:

فإذا كانت قيمة: $r\,|\hat{e}_i|\,x \cong 1$ ، فهذا يدل على أن العلاقة بـين الانحرافـات $|\hat{e}_i|$ وقيمـة $x_i$ قوية وهذا يعني وجود ظاهرة Heteroscedasticity.

أما إذا كانت قيمة $r\,|\hat{e}_i|\,x_i \cong 0$ أي قريبة من الصفر فهذا يعني ضعف وجود العلاقة بين $x_i, e_i$ وبالتالي عدم وجود Heteroscedasticity.

أما إذا كانت قيمة $r\,|\hat{e}_i|\,x_i$ تتراوح بين الصفر والواحد فهذا يشير إلى وجود عدة درجـات من Heteroscedasticity وهذا يعني أنه لابد من التعـرف عـلى تلـك الـدرجات مـن خـلال الاختبـار التالي:

١- بافتراض فرضيتي:

$H_0: r\, e_i\, x_i = 0$ Heteroscedasticity

$H_1: r\, e_i\, x_i \neq 0$ Heteroscedasticity

٢- حساب قيمة $\hat{t}$ وفقا للصيغة التالية:

$$\hat{t} = \frac{r_{ex}.\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_1^2 x_i}} \sim t_{\frac{\alpha}{2}(n-2)}$$

وهذا الاختبار يمكن إجراؤه في حالة النماذج الخطيـة البسـيطة والمتعـددة التـي تحتـوي على أكثر من متغير توضيحي واحد حيث يتم حساب معامل الارتباط لرتـب سـبيرمان فـيما بـين الانحرافات العشوائية $|e_i|$ وكل متغير مستقل على انفراد أي:

$r_{ei}\ x_1$

$r_{ei}\ x_2$

.

.

.

.

.

.

$r_{ei}\ x_k$

وبالتالي فإننا نرفض فكرة مخالفة الفرضية عندما تكون قيم كل قيم $t_{cal}$ اقل من t الجدولية أي: $t_{cal} < t_{tab}$ عدم وجود مشكلة (Heteroscedasticity)، وخلاف ذلك فإننا نؤيد فكرة المخالفة عندما يكون واحد من المتغيرات على الأقل من قيم $t_{cal}$ أي: $t_{cal} \geq t_{tab}$

التطبيق الثاني:

استعمل طريقة سبيرمان لاختبار الفرضية الآتية:

$H_0$: $re_i\ x_i = 0$ Homo

$H_1$: $re_i\ x_i \neq 0$ Hetero

على البيانات الافتراضية في المثال السابق عند $\alpha = 0.05$.

| $x_i$ | $\lvert \hat{e}_i \rvert$ | رتب $x_i$ | رتب $\lvert \hat{e}_i \rvert$ | $d_i$ | $d^2_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 3 | 1 | 3 | -2 | 4 |
| 24 | 1 | 4 | 1 | -3 | 9 |
| 26 | 7 | 5 | 7 | 0 | 0 |
| 11 | 5 | 2 | 5 | -3 | 4 |
| | | | | | 18 |

$$\therefore\ r\,\hat{e}\,x_i = 1 - \frac{6(18)}{5(25-1)} = 1 - \frac{108}{120} = 0.01$$

العلاقة أكبر من الصفر وعليه نجري الاختبار التالي:

$$t_{cal}\ \text{المحسوبة} = \frac{0.1\sqrt{5-2}}{\sqrt{1-(0.1)^2}} = 0.17$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}(n-2)}\ \text{الجدولية} = t_{0.25,\,3} = 31.8$$

Because of $t_{cal} < t_{tab} \Rightarrow \therefore$ accept $H_o$ i. e there is no Heberoscedasticity

التطبيق الثالث:

٢- إذا أعطيت البيانات التالية:

| X | 69 | 76 | 52 | 56 | 57 | 77 | 58 | 55 | 67 | 53 | 72 | 64 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 9 | 10 | 6 | 10 | 9 | 10 | 7 | 8 | 12 | 6 | 11 | 8 |

المطلوب: اختبار أن:

$H_0$: $P_i$ are Homo

$H_1$: $e_i$ are Hetero

وذلك باستخدام معامل الرتب لسبيرمان مستخدما مستوى معنوية مقداره ٥%.

| $Y_i$ | $X_i$ | $X_iY_i$ | $X^2_i$ | $\hat{Y}_i$ | $\hat{e}\,t$ | $\lvert \hat{e}\,t \rvert$ | $X_i$ | $\hat{e}_i$ | $d_i$ | $d^2_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 69 | 96 | 621 | 81 | 63.5 | 5.5 | 5.5 | 6.5 | 7 | -0.5 | 0.25 |
| 76 | 108 | 760 | 100 | 66.6 | 9.4 | 9.4 | 9 | 10 | -1 | 1 |
| 52 | 61 | 312 | 36 | 54.2 | -2.2 | 2.2 | 1.5 | 3 | -1.5 | 2.25 |
| 56 | 109 | 560 | 100 | 66.6 | -10.6 | 10.6 | 9 | 12 | -3 | 9 |
| 57 | 9 | 513 | 81 | 63.5 | -6.5 | 6.5 | 6.5 | 9 | -2.5 | 6.25 |
| 77 | 1010 | 770 | 100 | 66.6 | 10.4 | 10.4 | 9 | 11 | -2 | 4 |
| 58 | 73 | 406 | 49 | 57.3 | 0.7 | 0.7 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 55 | 84 | 440 | 64 | 60.4 | -5.4 | 5.4 | 4.3 | 6 | -1.5 | 2.25 |
| 67 | 1212 | 8.4 | 144 | 72.8 | -5.8 | 5.8 | 12 | 8 | 4 | 16 |
| 53 | 62 | 318 | 36 | 54.2 | 1.2 | 1.2 | 1.5 | 2 | -0.5 | 0.25 |
| 72 | 111 | 792 | 121 | 69.7 | 2.3 | 2.3 | 11 | 4 | 7 | 49 |
| 64 | 85 | 512 | 64 | 60.4 | 3.6 | 3.6 | 4.5 | 5 | -0.5 | 0.25 |
| | | 6799 | 976 | | | | | | | 94.5 |

الحل:

$$\therefore\ \hat{b} = \frac{\sum X_iY_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2} = \frac{6799 - 12\times 8.83\times 63}{976 - 12(8.8.)^2}$$

$$\therefore\ \hat{b} = \frac{123.52}{40.37} = 3.1$$

$$\therefore\ \overline{X}_i = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{106}{12} = 8.83$$

$$\therefore\ \overline{Y}_i = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{765}{12} = 63$$

$$\therefore \ \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} \Rightarrow 63 - (3.1)\ (8.83) = 35.6$$

$$\sqrt{|\hat{e}_i|} X_i = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(94.5)}{12(144-1)}$$

$$= 7 - \frac{567}{1716} = 0.67$$

$\therefore$ نستخدم اختبار " t " لمعرفة هذه الظاهرة إذا كانت Homo or Hetreo.

$$T_{al} = \frac{\sqrt{|\hat{e}_i|}, x_i \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r\,|\hat{e}_i|^2, x_i}}$$

n = 12

$$= \frac{(1.67)\sqrt{10}}{\sqrt{1-(0.67)^2}} = \frac{2.12}{0.74} = 2.86$$

بمقارنة هذه القيمة مع $t_{table}$ نحصل على:

$t_{al} > t_{table}$

$\therefore$ نرفض فرضية العدم ونلاحظ أن هناك Hetro بمعنى $H_1$: r | $\hat{e}$ i|, xi are Hetreo

التطبيق الرابع:

استخدمت سلسلة زمنية طولها ٣١ سنة لتقدير الدالة التالية:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + e_t$$

وكانت الدالة المقدرة لها:

$$\hat{Y}_t = -648.1 + 0.085\, xt$$

ولقد استخدم معامل الارتباط الرتب لسبيرمان لاختبار عدم تجانس التباين. فإذا علمت أن:

$\sum d^2_i = 1558;\ \alpha = 0.05$

$n = 31,\ t = 1.697$

اختبر فرضية كون أن:

$H_o$: et are Homo

$H_1$: et are Hetreo

الحل:

بالتعويض مباشرة في قانون معامل سبيرمان أي:

$$r\,|\hat{e}_i|, x_i = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(1558)}{31(961-1)}$$

$$= 1 - \frac{9348}{29760} = 0.69$$ تقريبا

لاختبار معامل سبيرمان للرتب نوجد $t_{al}$ أولا.

$$\therefore\ t_{cal} = \frac{\sqrt{|\hat{e}_i|, x_i}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r\,|\hat{e}|^2, x_i}}$$

$$= \frac{(0.69)\sqrt{31-2}}{\sqrt{1-(0.69)^2}}$$

$$= \frac{3.72}{0.72} = 5.16$$

نلاحظ أن $t_{cal}$ كبيرة جدا مع مقارنتها بـ $t_{table}$ أي أن:

$t_{cal} > t_{table}$

حيث إن: $t_{table} = 1.697$

بذلك نرفض $H_o$ القائلة بأن:

$H_o$: pt are Homo

ونقبل الفرضية البديلة أن هناك ظاهرة عدم التجانس (Hetreo).

التطبق الخامس:

إذا أعطيت البيانات الآتية:

| X | 69 | 76 | 52 | 56 | 57 | 77 | 58 | 55 | 67 | 53 | 72 | 64 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 9 | 10 | 6 | 10 | 9 | 10 | 7 | 8 | 12 | 6 | 11 | 8 |

المطلوب اختبار

H0: Ui are homoscedastic

H1: Ui are heterosedastic

استخدم طريقة سبيرمان ومستوى معنوية قدرة ٥%.

الحل:

الخطوة الأولى:

توفيق خط الانحدار وحساب قيمة ($e_i$) وكما يلي:

$$\sum Y_i = 756, \sum X_i = 108, \sum X^2_i = 1020, \sum X_i Y_i = 6960$$

$$n = 12, \ \overline{Y} = 63, \ \overline{X} = 9$$

الخطوة الثانية:

تقدير قيمة معلمات النموذج وتكوين الدالة التقديرية للنموذج وكما يلي:

$$\therefore \ \hat{\beta}_2 = \frac{(12)(6960) - (756)(108)}{(12)(1020) - (108)^2} = 3.25$$

$$(\hat{\beta}) = 63 - (3.25)\ (9) = 33.75$$

الخطوة الثالثة:

تكوين جدولي الترتيب التصاعدي والقيم التقديرية وكما يلي:

| $\hat{Y} = 33.75 + 3.25 X_i$ المعادلة التقديرية | | | | $y_i = 3.25 x_i$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المتغيرات | | التقديرات | | الرتب Rank | | | |
| $X_i$ | $Y_i$ | $\hat{Y}_i$ | $e_i$ | $X_i$ | $X_i$ | $\lvert e_i \rvert$ | $\lvert e_i \rvert$ |
| ٩ | 69 | 63.0 | 6.00 | 6 | 1.5 | 0.25 | 1 |
| 12 | 76 | 72.75 | 3.25 | 6 | 1.5 | 1.25 | 2 |
| 6 | 52 | 53.25 | 1.25 | 7 | 3 | 1.50 | 3 |
| 10 | 56 | 66.25 | 10.25 | 8 | 4.5 | 2.50 | 4 |
| 9 | 57 | 63.00 | 6.00 | 8 | 4.5 | 3.25 | 5 |
| 10 | 77 | 66.25 | 10.75 | 9 | 6.5 | 4.25 | 6 |
| 7 | 58 | 56.50 | 1.50 | 9 | 6.5 | 4.75 | 7 |
| 8 | 55 | 59.75 | -4.75 | 10 | 8.5 | 5.75 | 8 |
| 12 | 67 | 72.75 | -5.75 | 10 | 8.5 | 6.00 | 9.5 |
| 6 | 53 | 53.25 | -0.25 | 11 | 10 | 6.00 | 9.5 |
| 11 | 72 | 69.50 | 2.50 | 12 | 11.5 | 10.25 | 11 |
| 8 | 64 | 59.75 | 4.25<br>$\sum e_i = 0$ | 12 | 11.5 | 10.75 | 12 |

الخطوة الرابعة:

استخراج مربع انحرافات الرتب ($d_i^2$) كما يلي:

| $X_i$ | $\mid e_i \mid$ | Rank of $X_i$ | Rank of $\mid e_i \mid$ | $d_i$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 6.00 | 6.5 | 9.5 | -3.0 | 9.00 |
| 12 | 3.25 | 11.5 | 5.0 | 6.5 | 42.25 |
| 6 | 1.25 | 1.5 | 2.0 | -0.5 | 0.25 |
| ١٠ | 10.25 | 8.5 | 11.0 | -2.5 | 6.25 |
| 9 | 6.00 | 6.5 | 9.5 | -3.0 | 9.00 |
| 10 | 10.75 | 8.5 | 12.0 | 3.5 | 12.25 |
| 7 | 1.50 | 3.0 | 3.0 | 0.0 | 0.00 |
| 8 | 4.75 | 4.5 | 7.0 | 2.5 | 6.25 |
| 12 | 5.75 | 11.5 | 8.0 | 3.5 | 12.25 |
| 6 | 0.25 | 1.5 | 1.0 | 0.5 | 0.25 |
| 11 | 2.50 | 10.0 | 4.0 | 6.0 | 36.00 |
| 8 | 4.25 | 4.5 | 6.0 | -1.5 | 2.25 |

$\sum d_i^2 = 136.00$

الخطوة الخامسة:

نطبق صيغة سبيرمان كما يلي:

$$r_2 = 1 - \frac{6(136)}{12(144-1)} = 0.5245$$

$$\because t^* = \frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} = 1.948$$

وأن ($t^*$) الجدولية تساوي:

$t_{(0.05,\ 10)} = 1.812$

وعليه طالما ($t^*$) المحسوبة أكبر من ($t$) الجدولية لذلك نرفض فـرض العـدم أي أن التبـاين غير متجانس.

التطبيق السادس[*]:

لنفترض أن تباين الحد العشوائي هو (Proportionol) إلى مربع (X) أي أن:

$$E(U^2) = \sigma_u^2 X_i^2 \quad \text{...........} (13)$$

حيث: $i = 1, 2, \ldots, n$.

وأن $\left(\sigma_u^2\right)$ ثابت غير معلوم، وبمقارنة المعادلتين (١) و (١٣) يمكن كتابة الصيغة (١٤) كما يلي:

$$\lambda_i = \frac{1}{X_i} \quad \text{...........} (14)$$

وبتعويض تلك النتيجة في المعادلة (١٠) و (١٣) نحصل على:

$$Var(\hat{b}_2) = \frac{\sigma_u^2 \sum \left(\frac{1}{X_i^2}\right)}{n\sum\left(\frac{1}{X_i}\right) - \left[\sum\left(\frac{1}{X_i^2}\right)\right]^2} \quad \text{...........} (15)$$

وأن:

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma_u^2\left[\left(\sum X_i^2\right)\left(\sum X_i\right)^2 - 2n\left(\sum X_i^3\right)\left(\sum X_i\right) + n^2\left(\sum x_i^4\right)\right]}{\left[n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2\right]^2}$$

التطبيق السابع:

لنفترض أن $(X_i)$ تأخذ القيم المذكورة أدناه لإجراء مقارنة عددية بسيطة:

$x_i = 1, 2, 3, 4, 5$

ومن هذه القيم نجد:

وذلك:

$$\frac{Var(\hat{b}_2)}{Var(\hat{\beta}_2)} = \frac{\sigma_u^2\, 0.69}{\sigma_u^2\, 1.24} = 0.56$$

وبتطبيق المعادلتين (١٥) و (١٦) نستنتج أن:

---

[*] التمارين في هذا الفصل قسم منها مشترك ويعود إلى مواضيع الفصول الثامن، التاسع والعاشر.

معـدل كفـاءة مقـدر المربعـات الصـغرى الاعتياديـة (OLS) هـو حـوالي ٥٦% فقـط مـن مقدرات المربعات الصغرى العامة (GLS).

التطبيق الثامن:

لنفترض أن:

$$\lambda_i = \frac{1}{X_i}$$

وأن:

$E(U^2) = X$

وباستخدام المعادلتين (١٥) و (١٦) نحصل على نسبة الكفاءة كما يلي:

من المعادلة (١٥).

$$\frac{Var(b_2)}{Var(\beta_2)} = 0.83 \frac{\sigma_u^2\left(\sum\frac{1}{X}\right)}{\sum\left(\frac{1}{X}\right)\sum X - n^2}$$

من المعادلة (١٦).

وهذه النسبة توضح بأن مقدرات أصغر المربعـات الصـغرى الاعتياديـة أكـثر كفـاءة مـن المثال السابق، حيث يمثل هذا المثال ابتعادا عن عدم التجانس أكثر من التطبيق السابع.

التطبيق التاسع:

إذا أعطيت البيانات الآتية:

$Y_i$: 69, 76, 52, 57, 77, 58, 55, 67, 53, 72, 64

$X_i$: 9, 10, 6, 10, 9, 10, 7, 8, 12, 6, 11, 8

المطلوب اختبار:

$H_o$: $U_i$ are homoscedastic

$H_1$: $U_i$ are homoscedastic

باستخدام اختبار بارك ومستوى معنوية ٥%.

الحل:

١- نستخرج المعادلة التقديرية.

$$\hat{Y}_i = 33.75 + 3.25 X_i$$

٢- نكون جدول البواقي كما يلي:

٤,٢٨، ٢,٥٠، ٠,٢٥ -، ٥,٧٥ -، ٤,٧٥-، ١,٥٠، ١٠,٧٥، ٦,٠٠ -، ١٠,٢٥ -، ١,٢٥ -، ٣,٢٥،

$e_i$ = ٦,٠٠

١٨,٠٦، ٦,٢٥، ٠,٠٦، ٣٣,٠٦، ٢٢,٥٦، ٢,٢٥، ١١٥,٥٦، ٣٦,٠٠، ١٠٥,٠٦، ١,٢٥، ١٠,٥٦،

$e^2_i$ = ٣٦,٠٠

٨، ١١، ٦، ١٢، ٨، ٧، ١٠، ٩، ١٠، ٦، ١٢، ٩ = $X_i$

٣- نأخذ لوغاريتم $(e_i), (X_i)$ لنحصل على ما يلي:

| $X^* = \text{Log } X_i$ | $\text{Log } e^2_i = Y^*$ | $X^*_i Y^*_i$ | $X^{*2}_i$ | $Y^{*2}_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 2.2 | 3.6 | 7.92 | 4.84 | 12.96 |
| 2.5 | 2.4 | 6.00 | 6.25 | 5.76 |
| 1.8 | 0.4 | 0.72 | 3.24 | 0.16 |
| 2.3 | 4.7 | 10.81 | 5.29 | 22.09 |
| 2.2 | 3.6 | 7.92 | 4.84 | 12.96 |
| 2.3 | 4.8 | 11.04 | 5.29 | 23.04 |
| 1.9 | 0.8 | 1.52 | 3.61 | 0.64 |
| 2.1 | 3.1 | 6.51 | 4.41 | 9.61 |
| 2.5 | 3.5 | 8.75 | 6.25 | 12.25 |
| 1.8 | -2.8 | -5.04 | 3.24 | 7.84 |
| 2.4 | 1.8 | 4.32 | 5.76 | 3.24 |
| 2.1 | 2.9 | 9.09 | 4.41 | 8.41 |
| Σ 26.9 | 28.8 | 66.56 | 57.43 | 118.96 |

٤- نستخرج $\text{Log } (e^2_i)$

$$\because \delta^2 = \frac{\sum Y^* X^* - n\overline{Y}^* \overline{X}^*}{\sum X^{*2} - n\overline{X}^{*2}} = \frac{\sum x^* y^*}{\sum x^{*2}_i}$$

$$\hat{\delta}^2 = \frac{(66.56) - (12)(2.175)(2.4)}{57.43 - (12)(2.175)^2} = 5.917$$

$$\hat{\gamma} = \overline{Y}^* - \hat{\delta}\,\overline{X}^*$$

$$= 2.4 - (5.914)\ (2.175) = -10.460$$

$$\therefore \text{Log } \hat{e}^2_i = -10.469 + (5.917) \text{ Log } X_i$$

٥- قيم حساب ($S^2$) عن طريق حساب SSE, SSR, SST وكما يلي:

$$SST = \sum Z^{*2} - n\,\overline{Z}^{*2} = 118.96 - (12)\,(2.4)^2 = 49.84$$

$$SSR = \hat{\delta}^2 \sum x_1^{2}{}^* = (5.917)^2\,(0.6625) = 23.19$$

$$SSE = SST - SSR = 49.84 - 23.19 = 26.65$$

$$S^2 = \frac{26.65}{10} = 2.665, V(\hat{\delta}) = \frac{S^2}{\sum X^{*2}} = \frac{2.665}{0.6625} = 4.02$$

$$\therefore\ SE = (\hat{\delta}) = 2$$

٦- طبق صيغة ($t^*$) المحسوبة كما يلي:

$$t^* = \frac{\hat{\delta}}{SE(\hat{\delta})} = \frac{5.917}{2} = 2.959$$

وأن قيمة (t) الجدولية لمستوى معنوية ٥% ولدرجات حرية = ١٠ فإن t = 1.812وعليه بما أن ($t^*$) المحسوبة أكبر من t الجدولية، لذا يرفض فرض العدم، أي أنه توجد علاقة معنوية بين $X_i, \sigma^2_{ui}$، ولذا فإن المتغير العشوائي ($U_i$) غير متجانس التباين.

التطبيق العاشر:

إذا كان لدينا (٣١) مشاهدة تخص بالدخل (X) والادخار (S) في مدة (٣١) سنة، والمطلوب استخدام اختبار كولدفلد - كواندت. اختبر ما إذا كان المتغير العشوائي ($U_i$) متجانس التباين من عدمه.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Year | : 1 | ,2 | ,3 | ,4 | ,5 | ,6 | ,7 | ,8 | ,9 | ,10 | ,11 |
| Si | : 264 | , 90 | ,122 | ,588 | ,779 | ,1222 | ,1654 | ,1400 | ,1829 | ,2200 | ,2017 |
| Xi | : 8777 | ,9954 | ,10979 | ,15522 | ,18575 | ,21163 | ,25604 | ,26500 | ,27670 | ,28300 | ,27430 |
| Year | : 12 | ,13 | ,14 | ,15 | ,16 | ,17 | ,18 | ,19 | ,20 | ,21 | ,22 |
| Si | : 2105 | ,105 | ,107 | ,503 | ,898 | ,819 | ,1702 | ,1600 | ,2450 | ,2570 | ,1720 |
| Xi | :29560 | ,9210 | ,11912 | ,13499 | ,16730 | ,19635 | ,22880 | ,28150 | ,32500 | ,35250 | ,33500 |
| Year | : 23 | ,24 | ,25 | ,26 | ,27 | ,28 | ,29 | ,30 | ,31 | , | |
| Si | : 1900 | ,131 | ,406 | ,431 | ,951 | ,1578 | ,2250 | ,2100 | ,2300 | , | |
| Xi | :36000 | ,10508 | ,12747 | ,14269 | ,17663 | ,24127 | ,32100 | ,36200 | ,38200 | , | |

الحل:

لعمل الاختبار نتبع الخطوات الآتية:

الخطوة الأولى:

يتم ترتيب المشاهدات تصاعديا حسب قيم ($X_i$) الدخل السنوي.

الخطوة الثانية:

عدد المشاهدات هو ($n = 31$)، لذا يتم اختيار ($C = 9$)، وهي تقع بين $\frac{n}{4},\frac{11}{3}$ لكي يكون عدد القيم المتبقية زوجيا، ويتم حذف هذه المشاهدات التسع من الجزء الأوسط من المشاهدات بعد ترتيبها وبذلك نحصل على مجموعتين عدد المشاهدات في كل منها يساوي (١١) مشاهدة أي $\left(11 = \frac{n-c}{2}\right)$.

الخطوة الثالثة:

بتطبيق (OLS) للقيم جميعها (٣١ مشاهدة) نحصل على المعادلة التقديرية الإجمالية التالية:

$$\hat{S}_i = -664.1 + 0.085\, X_t$$
$$(117.6)\quad (0.005)$$
$$R^2 = 0.903$$
$$n = 31$$

الخطوة الرابعة:

بتوفيق خط انحدار للمجموعة الأولى (بعد الترتيب التصاعدي وحذف المجموعة c) نحصل على:

$$\hat{S}_1 = -738.84 + 0.088\, X_i$$
$$(189.4)\quad (0.015)$$
$$R^2 = 0.787,\ \sum e_1^2 = 144771.5,\ n = 11$$

الخطوة الخامسة:

توفيق خط انحدار المجموعة الثانية (بعد ترتيب قيم $X_i$ تصاعديا وحذف المجموعة C) نحصل على:

$$\hat{S}_2 = -1050.79 + 0.032\, X_i$$

$R^2 = 0.152, \sum e^2_2 = 769899.2, n = 11$

الخطوة السادسة:

تطبق صيغة ($F^*$) المحسوبة لنحصل على:

$$F^* = \frac{\sum e_2^2}{\sum e_1^2} = \frac{769899.2}{144771.5} \cong 5$$

$$V_1 = V_2 = \frac{(31-9-4)}{2} = \frac{n-c-2k}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$F\,(0.05, 9, 9) = 3.18$

$\therefore\ F^* > F$

Calculated > tabulated

ولهذا يتم رفض فرضية العدم، أي أن تباين ($U_i$) غير متجانس.

(٢-٥-١٠) تمارين:

١- ما هو المقصود بعدم التجانس، أوضح بيانيا أنواع عدم تجانس تباين المتغير العشـوائي، لمـاذا يعتبر عدم تجانس التباين مشكلة؟

٢- كيف تظهر مشكلة عدم تجانس التباين، وكيف تختبر، وهل يمكن تصحيح عدم التجانس.

٣- استخدمت سلسلة زمنية طولها (٣١) سنة لتقدير دالة الادخار.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + U_t$$

حيث (Y) تمثل الادخار، (X) تمثل الدخل، ($U_t$) تمثل العنصر العشوائي علما بأن:

$$E(U) = 0$$

وكانت الدالة المقدرة كالآتي:

$$\hat{Y}_t = -648.1 + 0.085 X_i$$

وقد تم استخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لاختيار تجانس التباين، فإذا علمـت أن: $t_{table} = 1.699$، $t_{cal} = 1.697$، 1.695 حيث إن (٣٠، ٠,٠٥)، (٢٩، ٠,٠٥)، (٣١، ٠,٠٥) وكذلك $\sum d^2 =$ ١٥٥٨ فالمطلوب:

أ- اختبر الفرضية التالية:

$H_o$: $U_t$ are homoscedastic

$H_1$: $U_t$ are hetroscedastic

ب- استنادا إلى نتيجة الاختبار التي حصلت عليها في (أ) فهل ترى ما يدعو إلى إجراء تحويل النموذج الأصلي؟ وما هو هذا التحويل إذا كان تباين (U) يتناسب طرديا مع مربعات قيم المتغير المستقل؟

٤- في النموذج الخطي العام:

$$Y = X\beta + U$$

$$E(U) = 0$$

إذا اتضح أن تبـاين (U) غـير متجـانس، اشـتق صـيغة لتقـدير معـالم النمـوذج السـابق مستخدما طريقة المربعات الصغرى العمومية (GLS) بحيث يؤدي ذلـك إلى جعـل تبـاين المتغـير العشوائي متجانسا، ثم بين أن هذا التقدير غير متحيز.

٥- إذا أردنا اختبار بارك لمعرفة تجانس تباين المتغير العشوائي (U) في النموذج الخطي البسيط

$Y = \beta_0 + \beta_1 X + U$ ما هي الأسس التي يستند إليها هذا الاختبار؟ وما هي خطوات العمل بهذا الاختبار؟

٦- في النموذج المقدر الآتي:

$$\hat{Y}_i = 111.69 - 7.1882 X_{2i} + 0.0143 X_{3i}$$

حيث تمثل (Y) الكمية المطلوبة من سلعة معينة، $(X_2)$ سعر السلعة، $(X_3)$ الدخل المتاح للمستهلك، فإذا علمت أن $n = 30$، وأن معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين $X_{2i}, e_i$ هي $= 0.63$ $(|e_i|, X_{2i})$ معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين $X_{3i}, e_i$ هي $(|e_i|, X_{3i}) = 0.21$ $r = -0.58$ و $\sum e_i^2 = 321, \sum (e_i - e)^2 = 640$ اختبر الفرضيات التالية عند مستوى معنوية ٥%.

أ-

$H_o$: $U_i$ Homoscedastic, $H_i$: $U_i$ hetroscedastic

ب-

$H_o$: $U_i$ are Correlated, $H_i$: $U_i$ are Uncorrelated

حـ-

$H_o$: $U_i$ are Arthogonal, $H_i$: $U_i$ are not Arthogonal

↓ ↓

(يوجد تداخل خطي) (لا يوجد تداخل خطي)

٧- تم تقدير دالة الطلب على سلعة ما فكانت الدالة المقدرة هي:

$$\hat{Y}_i = 1.5.3 - 7.2 X_{1i} + 0.02 X_{2i}$$

S. E (22.3) (2.1) (0.005), $R^2 = 0.90$, $n = 20$

حيث (Y) الكمية المطلوبة، $(X_1)$ سعر السلعة، $(X_2)$ الدخل المتاح فإذا كان لديك البيانات التالية:

$$\sum (X_{1i} + \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2) = -2360$$

$$\sum (X_{1i} + \overline{X}_1)^2 = 30, \sum (X_{2i} - \overline{X}_2) = 158000, \sum (Y_i - \overline{Y}) = 3450$$

$$\sum (e_i e_{i-1}) = 310, \gamma_{|e|,x1} = 0.5, \gamma_{|e|,x1} = 0.2$$

عند مستوى ٥% اختبر الفرضيات التالية واشرح نتائجك:

أ-

$H_1$: au alternatives, (j = 1, 2, 3) $H_o$: $\beta_j = 0$

ب-

$H_1$: alternatives, $H_o$: $\beta_2 = \beta_3$

حـ-

$H_1$: $U_i$ are hetroscedastic, $H_o$: $U_i$ are homoscedastic

د-

$H_1$: $U_i$ are not Correlated, $H_o$: $U_i$ are auto Correlated

هـ-

$H_1$: $X_2$ , $X_3$ are not orthoganol, $H_o$: $X_2$ , $X_3$ are orthogonal

و- إذا كان ($H_o$) صحيحا في (د) فما هي قيمة معامل الارتباط الذاتي؟

٨- إذا كانت دالة الادخار المقدرة باستخدام (OLS) هي:

$$\hat{Y}_t = -330 + 0.122\ X_i$$

S. E (93.4) (0.03), n = 31

حيث (Y) هو الادخار الفردي، (X) هو الدخل المتاح للفرد، فإذا أعطيت النتائج الآتية:

$\gamma_{x, |e|} = 0.61, \sum e_t e_{t-1} = 1620, \sum e^2_t = 1930$ اختبر الفرض القائل بأن: $V(U_i) = \sigma^2_{ui}$ ضد الفرض البديل $V(U_i) = \sigma^2_u$ وإذا قبلت ($H_1$)، وكان $\sigma^2_{ui} = \sigma^2 X^2_i$، ما هي التحويلات المناسبة لجعل تباين ($U_i$) متجانسا؟ وما هي طريقة تقدير معالم النموذج؟ استخدم مستوى معنوية قدره ٥%.

# الفصل الحادي عشر

## المتغيرات المتباطئة زمنيا (المتخلفة زمنيا)

(١١,١) طبيعة التخلف الزمني (التباطؤ) .

(١١,٢) أسباب وجود التخلف الزمني.

(١١,٣) تقدير توزيع نماذج التخلف الزمني.

(١١,٣,١) طريقة ادهوك في تقدير توزيع نموذج التخلف الزمني.

(١١,٣,٢) طريقة كويك لنماذج توزيع التخلف الزمني.

(١١,٤) طريقة نموذج التعديل الجزئي.

(١١,٤,١) نموذج نيولوف.

(١١,٤,٢) نموذج فريدمن - كاكن.

(١١,٥) مشكلة تقدير نماذج توزيع التخلف الزمني.

(١١,٥,١) الفرضية I ونموذج لفيتان.

(١١,٥,٢) الفرضية II ونموذج زيلنر - كازيل.

(١١,٥,٣) الفرضية III ونماذج تعديله.

(١١,٥,٤) تقدير ($\rho$) بواسطة Iterative.

(١١,٦) تطبيقات وتمارين.

# الفصل الحادي عشر

## المتغيرات المتباطئة زمنيا Lagged Variable

أوضحنا في الفصول الثلاثة السابقة أهم التطورات في النموذج الخطي العام. لقد سبق وأن تطرقنا إلى الصيغة الاعتيادية لمقدرات المربعات الصغرى. ومن ثم تطرقنا إلى الكيفية التي تكون فيها هذه المقدرات خطية. وغير متحيزة وأفضل معلمات. وتعديل هذه المقدرات في حالة الارتباط الذاتي. وعدم التجانس. والتداخل الخطي المتعدد. وسوف نستمر في هذا الفصل في معالجة نماذج توزيع التباطؤ الزمني (Distributed lag models) وتقديراتها. وسوف يتم تركيزنا على نوعين من هياكل التباطؤ الزمني.

١١,١ طبيعة التخلف الزمني (التباطؤ):

لقد لاحظنا في الفصل الثاني عند بناء النماذج الاقتصادية أنه من المهم أخذ الزمن (Time) بنظر الاعتبار، حيث نجد عادة وجود فترة زمنية بين حركة المتغيرات التابعة التي تستجيب للمتغيرات المستقلة أو تأثير المتغيرات المستقلة التي حدثت في زمن سابق على المتغير التابع في الزمن الحالي. وهذا الوقت Time يطلق عليه عادة بـ التخلف الزمني (Lag). إن إدخال مثل هذه المتغيرات في تحليل الانحدار يجعل نطاق التحليل أوسع وأقرب إلى الواقع. حيث أنه توجد متغيرات قد تعتمد على متغيرات أخرى في نفس الفترة. كما هو الحال في النماذج الساكنة ( static model) وفي أغلب الحالات قد تعتمد هذه المتغيرات على قيم ماضية لبعض المتغيرات فتصبح النماذج حركية (Dynamic model).

وفي نماذج السلاسل الزمنية خاصة توجد فترة أساسية من الزمن تقع بين اتخاذ القرار الاقتصادي. والتأثير النهائي للتغير في متغير السياسة الاقتصادية. فإذا كانت فترة اتخاذ القرار والمتغير المؤثر بها فترة طويلة. إذن لابد من إدخال عنصر التخلف الزمني لهذا المتغير المستقل.

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي والذي يرتبط بدالة الاستهلاك.

... لنفترض بأن شخصا استلم زيادة في راتبه السنوي قدرها ٢٠٠٠ دينار ولنفترض

أيضا بأنها زيادة ثابتة. فما هو تأثير هذه الزيادة في الدخل على مصروفاته الاستهلاكية؟

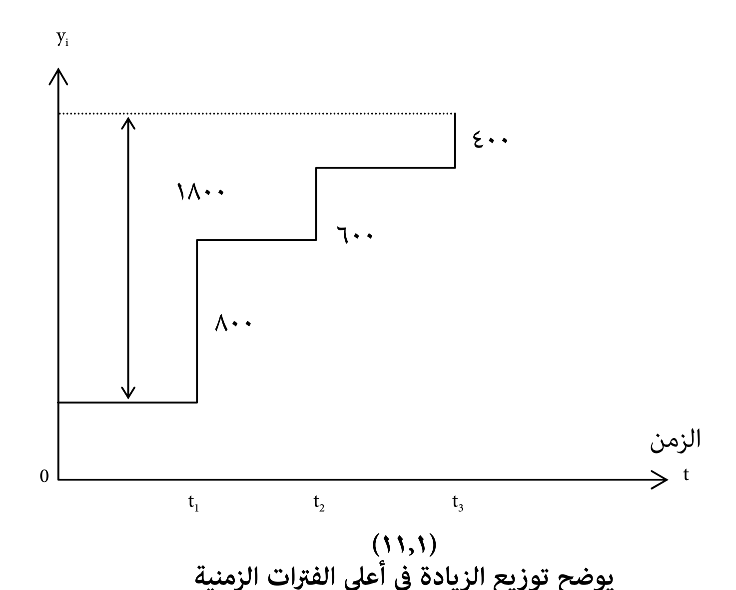
يلاحظ من الخبرة وبصورة عامة، أن مثل هـذه الزيـادة في دخـل الشـخص لا تدفعـه إلى إنفاقها جميعا ومباشرة، وإنما قد يتأتى في زيـادة مصرـوفاته الاسـتهلاكية ففـي السـنة الأولى بعـد زيادة الراتب ($x_t$) قد ينفق (٨٠٠) دينـار وينفــق فـــي السنـــة الثانيـة (٦٠٠) دينـار ($x_{t-1}$) و (٤٠٠) في السنة الثالثة ($x_{t-2}$). وقد يدخر الباقي. وفي نهاية السنة الثالثة فإن مجموع المصروفات الاستهلاكية للشخص زادت إلى ١٨٠٠ دينار. وعليه فيمكن كتابة دالة الاستهلاك هذه كما يلي:

$$Y_t = constant + 0.4x_t + 0.3x_{t-1} + 0.2x_{t-2} + U_t$$

حيث ($Y_t$) تشير إلى المصروفات الاستهلاكية و ($x$) يشير إلى الدخل.

عن المعادلة أعلاه تشير إلى أن الزيادة في الدخل والبالغة (٢٠٠٠) دينار قد توزعت خلال فترة ثلاثة سنوات. وعليه فإنه يطلق على هذا النموذج نموذج توزيع التخلف الزمني ( distributed - lag models). والسبب في ذلك هو أن تـأثير الزيـادة في الـدخل تنتشرـ أو تتـوزع عـلى عـدد مـن الفترات الزمنية.

ويمكن توضيح ذلك بيانيا كما في الشكل (١١,١) أدناه.




**(١١,١)**
**يوضح توزيع الزيادة في أعلى الفترات الزمنية**

وعموما يمكن كتابة الصيغة العامة لنموذج توزيع التخلف الزمني كما يلي:

$$Y_t = a + \beta_o X_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{1-3} + \ldots \beta_s X_{t-s} + U_t \ldots (1)$$

يشير هذا النموذج إلى (s) من فترات التخلف الزمني التي قد تكون نهائية (Finit) أو لا نهائية. وفي الحالة الأولى يكون التخلف (Finit) وفي الثانية يكون (infinit). وتشير المعلمة ($\beta_o$) إلى التأثير المضاعف المعلوم. والسبب هو أنه يعطي متوسط التأثير على (Y) خلال نفس الفترة الزمنية. وتشير المعلمات ($\beta_3, \beta_2, \beta_1$) إلى التخلف (delay) أو تقييس متوسط التأثير على (Y) عندما تتغير (x) بوحدة واحدة خلال الفترات الزمنية السابقة. وأن:

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i = \beta_o + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots \beta_s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وتشير ($\beta$) إلى المجموع النهائي الذي يطلق عليه مضاعف توزيع التخلف الزمني، أو الإجمالي. أو مضاعف توزيع التخلف الزمني في الأجل الطويل.

Total Long - run distribution of Lag multiplier

وبالرجوع إلى دالة الاستهلاك المذكورة أعلاه. نلاحظ أن المضاعف في الأجل القصير يمثل الميل الحدي للاستهلاك (MPC)، ومقداره (٠,٤) في حين نجد أن الميل الحدي للاستهلاك في الأجل الطويل Marginal Long - run (MPC) Propensity to consume هو ٠,٩ = ٠,٢ + ٠,٣ + ٠,٤ فلس في السنة الزيادة، و (٣٠٠) فلس في السنة القادمة، و (٢٠٠) فلس في السنة الثالثة، وعليه فإن التأثير في زيادة الدخل بمقدار دينارا واحدا ستكون (٩٠٠) فلس في الأجل الطويل.

وبوجود (t) التي تشير إلى الفترة الزمنية، يمكن إعادة كتابة النموذج (١) كما يلي:

$$Yt = a + \sum_{i=o}^{s} \beta_i X_{t-i} + U_t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

تصف هذه المعادلة وبصورة ملخصة تأثير المتغير المستقل (x's) الجاري والسابق في المتغير التابع (Y)، وأن (s) تشير إلى عدد فترات التخلف الزمني للمتغير (x's) متضمنة فترات نهائية، أو غير نهائية أي (Finite or Infinite). وحتى إذا كانت (s) نهائية. ولكن كبيرة نسبيا. سيكون من الصعب جدا الحصول على تقديرات دقيقة للمعلمات ($\beta_i$)، والسبب هو أن المتغيرات المستقلة سترتبط مع بعضها. وفي حالة المصفوفات فإن (x'x) ستكون أحادية (Singular) ولهذا فإن وضع بعض القيود على ($\beta_i$) ضروري جدا. وهناك عدة طرق لوضع قيود على ($\beta_i$) ستناقش فيما بعد.

١١,٢ أسباب وجود التخلف الزمني:

بالرغم من أن المثال السابق الذكر أعطى صورة عن طبيعة ظاهرة التخلف الزمني ولكنه لم يعطي بالتفصيل سبب وجوده. وهناك ثلاثة أسباب رئيسية لوجود التخلف الزمني هي:

١- الأسباب النفسية: (Psychological reasons):

بسبب العادات والتقاليد فقد لا يغير الناس عاداتهم الاستهلاكية مباشرة بعد تناقص الأسعار، أو تزايد الدخل وربما يعود ذلك إلى نسق التغير وما يتضمنه من مضار مباشرة. كذلك فإن الشخص الذي يصبح فجأة مليونيرا بربحه إرثا غير متوقع،أو جائزة يا نصيب، فإنه لا يغير نمط استهلاكه إلا بعد فترة طويلة، لأنه قد لا يعرف كيف يستجيب إلى الحالة الجديدة. أيضا هناك حالات كثيرة قد لا يعرف الناس فيما إذا كان هذا التغير ثابتا أم مؤقتا. فإذا كانت الزيادة في الدخل مثلا مؤقتة فإن الشخص قد يلجأ لادخار تلك الزيادة دون إلى تغير نمط استهلاكه.

٢- الأسباب الفنية: (Technological reasons):

لنفترض بأن أسعار رأس المال بالنسبة للعمل قد انخفضت، وعليه فإن تعويض رأس المال مكان العمل يصبح شيء معقول. ولكن ذلك الإحلال أي استخدام وحدات جديدة من رأس المال يحتاج فترة زمنية (فترة الإنجاز). والأكثر من ذلك إذا كان الانخفاض المتوقع بالأسعار أن يكون مؤقتا، فإن الشركات لا تندفع بسرعة في أحلال رأس المال محل العمل، وخاصة إذا كان التوقع أن النقصان في أسعار رأس المال مؤقتا، وسوف يلحقه تزايد في الأسعار أكثر من مستوى الفترة السابقة. وكذلك يمكن توضيح هذه الأسباب في حالة الإنتاج، حيث يتطلب إنتاج سلعة معينة فترة زمنية، وقد تحدث خلالها بعض التغيرات المتعلقة بالإنتاج كالتغير في الأسعار والأجور. وإضافة لذلك فإن عرض المنتجات الزراعية يعتمد هو الآخر على متغيرات كالأسعار في الفترات الزمنية السابقة. وهذه المتغيرات قد تؤثر في قرارات المنتج الزراعي.

٣- الأسباب المؤسسية: Institution reasons:

إن القرارات والتشريعات الحكومية تساهم في إحداث التخلف الزمني فمثلا قد تحول التشريعات الحكومية المنتج من استخدام العمل أو مادة أولية إلى عنصر أو مادة أولية أخرى (أو أي عنصر آخر من عناصر الإنتاج) وعليه فإن الأسباب المؤسسية تؤثر في اتخاذ

القرارات وتجعل بعض المتغيرات تعتمد على متغيرات أخرى بعد مرور فترة زمنية.

لهذه الأسباب فإن التخلف الزمني يحتل مركزا أساسيا في الاقتصاد، حيث يؤثر عل طرق التحليل الاقتصادي سواء في الأجل القصير أو الأجل الطويل، ولهذا السبب مثلا نقول إن الأسعار أو مرونة الدخل في الأجل القصير تكون صغيرة في القيمة المطلقة مقارنة مع مرونة الدخل في الأجل الطويل، وعموما يمكن القول بأن الميل الحدي للاستهلاك في الأجل القصير أقل منه في الأجل الطويل بوجود التخلف الزمني في العوامل المؤثرة على الاستهلاك.

### ١١,٣ تقدير توزيع نماذج التخلف الزمني:

من المؤكد بأن نماذج توزيع التخلف الزمني دورا مهما في التحليل الاقتصادي. أما كيفية تقدير معلمات هذه النماذج فيمكن توضيحه بالصورة الآتية.

نفترض أن لدينا نموذج خطي يشمل متغيرا مستقبلا واحدا وتخلفا زمنيا، كما هو مبين أدناه:

$$Y_t = a + \beta_o X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots U_t \dots\dots\dots\dots (4)$$

وحيث أن هذا النموذج لم يحدد طول فترة التخلف (مجهولية عدد الفترات الماضية). ففي هذه الحالة يطلق على هذا النموذج تسمية توزيع (التخلف)الزمني اللانهائي (Infinite distributed lag Model) بينما النموذج (١) يشير إلى توزيع التخلف الزمني النهائي ( fiinit distributed lag model) والسبب هو كون طول فترة التخلف (s) محددة.

لتقدير قيمة كل من (a و $\beta_s$) يمكن اتباع إحدى الطريقتين التاليتين وهما:

١- طريقة تقدير آدهوك Ad Hoc Estimation of Distributed lag model

٢- طريقة كويك KOYCK Estimation of Distributed lag model

### ١١,٤,١ طريقة آدهوك في تقدير توزيع نموذج التخلف الزمني:

تستخدم طريقة آدهوك في تقدير توزيع نموذج التخلف الزمني لسهولة تطبيقهما رياضيا. فإذا افترضنا وجود نموذج توزيع التخلف الزمني للانهائي (Infinite)، والذي يأخذ صيغة (٤) أعلاه. وبافتراض أن المتغير المستقل ($x_t$) غير عشوائي (Non stochastic) أو على الأقل مرتبط مع الحد العشوائي كما أن ($U_t$) $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}$... وهكذا يخضعون لنفس الفرضية (Non-stochastic) وعليه فنستطيع عندئذ تطبيق مبدأ (OLS) لتقدير معلمات النموذج (٤) وهذه الطريقة استخدمت من قبل (آلت Alt وتنبرجن (Tinbergen)

لقد اقترح (آلت Alt[1] وتنبرجن تقدير معلمات المعادلـة (٤) بالتسلسـل (Sequentially) أي نأخذ:

أولا: انحدار ($Y_t$) على ($X_t$).

ثانيا: انحدار ($Y_t$) على ($X_t$) و ($X_{t-1}$).

ثالثا: انحدار ($Y_t$) على ($X_t$). ($X_{t-1}$) ($X_{t-2}$)، وهكذا إلى نهاية فترة النموذج.

وهذا الأسلوب المتسلسل يقف عندما تكون معلمات انحدار المتغيرات المتخلفة زمنيا غير معنوية أو على الأقل عندما تتغير معلمات أحد المتغيرات من الموجـب إلى السـالب أو بـالعكس. وللتوضيح نأخذ الدراسة التي أخذها آلت (Alt) عند دراسته لاستهلاك النفط (Y) وانحدارها على الطلبات الجديدة (X) والمعتمدة عـلى البيانـات الفصـلية خـلال الفـترة ١٩٣٠-١٩٣٩، وأن نتـائج التقييم كانت كما يلي:

$$Y_t = 8.37 + 0.171X_t \quad \ldots (1)$$

$$Y_t = 8.27 + 0.111X_t + 0.064X_{t-1} \quad \ldots (2)$$

$$Y_t = 8.27 + 0.109X_t + 0.071X_{t-1} - 0.055X_{t-2} \quad \ldots (3)$$

$$Y_t = 8.32 + 0.108X_t + 0.063X_{t-1} + 0.022X_{t-2} - 0.020X_{t-3} \quad \ldots (4)$$

لقد اختار (آلـت) المعادلـة الثانيـة، كأفضـل معادلـة انحـدار، والسـبب يعـود إلى أنـه في المعادلتين الأخيرتين كانت إشارة ($X_{t-2}$) غـير ثابتـة وفي المعادلـة الأخـيرة كانـت قيمـة ($X_{t-3}$) سـالبة وهذه لا يمكن تفسيرها اقتصاديا. وبالرغم من سهولة تطبيق نمـوذج آدهـوك في التقـدير إلا أنـه يعاني من بعض نقاط الضعف التي تتمثل في:

١- لا يوجد دليل أساسي عن الحد الأعلى للفترة المتخلفة زمنيا.

٢- قلة درجات الحرية تجعل الاختيارات المعنوية للمعلمات غير دقيقة.

وعموما فإن الاقتصاديين يعانون من قلة البيانات الدقيقة حول الظواهر الاقتصادية مـما يؤثر في درجات الحرية.

٣- والأهم من ذلك أن بيانات السلسلة الزمنية في حالة نموذج توزيع التخلف الزمني تكون فيهـا المتغيرات المسـتقلة مرتبطـة. وبدرجـة عاليـة أي ظهـور مشـكلة الارتبـاط الخطـي المتعـدد

---

(1) F.F Alt; "Distributed Leges', Econometric, Vol.10 PP.113-128, 1942.

(Multicollinearity)، وهذا مما يجعل معلمات المتغيرات المتخلفة زمنيا غير معنويـة إحصـائيا. ولهذه الأسباب فإن طريقة آدهوك غير معمول بها على نطاق أوسع.

١١،٣،٢ طريقة كويك لنماذج توزيع التخلف الزمني (KOYCK):

لقد قدم كويك طريقة بارعة في تقدير نماذج توزيع التخلف الزمني، ويطلق عليهـا أيضـا تسمية التخلف الهندسي (Geometric log) وهي أكـثر الطـرق شـيوعا واسـتخداما. تفـترض طريقـة التخلف الهندسي بأن الأوزان (Weights) للمتغـيرات المسـتقلة والمتخلفـة زمنيـا جميعهـا موجبـة، وتتناقص هندسيا مع الزمن. والنموذج يتخذ الصيغة التالية:

$$Y_t = \beta_o (X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + U_t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

حيث: $0 < \lambda < 1$

وأن : $\beta_1 = \beta_o\lambda$

$\beta_2 = \beta_o\lambda^2$

واختصارا يمكن كتابة المعادلة (٥) كما يلي:

$$X_t = \alpha + \beta \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda^s X_{t-s} + U_t$$

وتوضح المعادلة (٥) أن تأثير ($X_t$) على ($Y_t$) يتوسع إلى مالا نهاية في الماضي، يعنـي أن: ($S \to \infty$)، ولكن المعلمات تتناقص بنسب ثابتة fixed proportion، وعليه بعد وقت معقول فـإن تـأثير المتغير المستقبل سيكون ضئيلا (negligible). وبموجب طريقة كويـك للتوزيـع يمكـن إعـادة كتابـة للمعادلة (٥) كما يلي:

$$Y_t = a + \beta_o X_t + \beta_1 x_t + \beta_2 X_{t-2} + \ldots U_t$$

ولملائمة الاشتقاق نحذف الحد المطلق (x) فنحصل على:

$$Y_t = \beta_o X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots U_t$$

ولنفرض بـأن ($\beta_s$) جميعـا لهـا نفـس الإشـارة، وتكـون مجموعـا نهائيـا finite Sum، وعليـه فيمكن إعادة كتابة المعادلة (٤) كما يلي:

$$Y_t = \beta (W_o + W_1 D + W_2 D^2 + \ldots) X_t + U_t \ldots$$

وحيث إن:

$$W_I > 0 \text{ and } \sum_{i=o}^{x} W_i = 1$$

وتشير ($W_I$) إلى الأوزان الموجبة. والتي مجموعها لا يزيد على الواحد صحيح. وأن (D) تشير إلى عنصر التأخر (delay operator) أي أن:

$$DX_t = X_{t-1},\ D^2X_t = X_{t-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ et_c.$$

اقترح (koyck) تسلسلا هندسيا تتناقص الأوزان فيه ( W,s) كالآتي:

$$W_i = (1 - \lambda)\lambda_i \qquad 0 < \lambda < 1 \qquad (8)$$

وباستخدام المعادلة (٨) فإنه يمكن كتابة الأوزان كالآتي:

$$W_o = (1 - \lambda)\ \lambda^0$$

$$W_1 = (1 - \lambda)\ \lambda^1$$

$$W2 = (1 - \lambda)\ \lambda 2$$

بتعويض المعادلة (٨) في المعادلة (٧) نحصل على ما يلي:

$$Y_t = \beta\ [\ (1 - \lambda) + (1 + \lambda)\ \lambda D + (1 - \lambda)^2\ D^2 + \ldots)\ ]\ X_t + U_t$$

$$Y_t = \beta\ (1 - \lambda)\ [\ X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \ldots\ )\ ] + U_t$$

وتمثل هذه المعادلة نموذج التخلف الهندسي مع وجود $\beta_0 = \beta\ (1\text{-}\lambda)$. وهذا النموذج للتخلف الهندسي له وسط متخلف يمكن الإشارة إليه بما يلي:

$$\frac{\sum_{i=0}^{\alpha} i\beta_i}{\sum_{i=0}^{\alpha} \beta_i} = \frac{\beta(1-\lambda)\left[0+(1)\lambda+(2)\lambda^2+(3)\lambda^3+\ldots)\right]}{\beta(1-\lambda)\left[1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots)\ \right]}$$

حيث يشير $\frac{\sum_{i=0}^{\alpha} i\beta_i}{\sum_{i=o}^{\alpha} \beta_i}$ إلى الوسط الموزون للتخلف الزمني.

$$i = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots s$$

لنفرض أن $\phi$ (فاي) تشير إلى: $\phi = \lambda + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 + 4\lambda^4 + \ldots$

أذن: $\lambda\phi = \lambda^2 + 3\lambda^3 + 4\lambda^4 \ldots$

وبالطرح نحصل على: $\phi - \lambda\phi = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$

وبتحليل المعادلة أعلاه إلى عواملها الأصلية نحصل على:

$$\phi(1-\lambda) = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

وأن:

$$\phi = \frac{\lambda}{(1-\lambda)\,(1-\lambda)} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}$$

وعليه فإن:

$$\frac{\sum_{i=0}^{\alpha} i\beta_i}{\sum_{i=0}^{\alpha} \beta_i} = \frac{\beta(1-\lambda)\dfrac{\lambda}{(1-\lambda^2)}}{\beta(1-\lambda)\left(\dfrac{1}{1-\lambda}\right)} = \frac{\lambda}{(1-^{\lambda}\ 2)}\ (1-\lambda$$

$$\therefore \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

وهو عبارة عن الوسط للتخلف الزمني أي (Average Lag).

وباستخدام المعادلة (٨) نحصل على:

$$W_0 + W_1D + W_2D^2 + \ldots = (1-\lambda) + (1-\lambda)\lambda D + (1-\lambda)\lambda^2D^2 + \ldots$$

$$= (1-\lambda)\,[\,1 + \lambda D + \lambda^2 D^2 + \ldots\,]$$

وهذه متوالية هندسية يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$= (1-\lambda)\left[\frac{1}{1-\lambda D}\right] = \frac{1-\lambda}{1-\lambda D}$$

إذن يمكن كتابة المعادلة (٧) كما يلي:

$$Y_t = \beta\,\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda D}\,X_t + U_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

ولتبسيط المعادلة (١١) نحتاج إلى:

ضرب طرفي المعادلة بالمقدار $(1-\lambda D)$ لنحصل على:

$$(1-\lambda D)\,Y_t = \beta\,(1-\lambda)\,X_t + (1+\lambda D)\,U_t$$

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \beta\,(1-\lambda)\,X_t + U_t - \lambda U_{t-1}$$

إذن:

$$Y_t = \beta\,(1-\lambda)\,X_t + \lambda Y_{t-1} + (U_t - \lambda U_{t-1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

تعد المعادلة (١٢) من أهم معادلات التخلف الزمني؛ لأنه بدلا من تقدير مالا نهائية من ($\beta'_s$) في المعادلة (٦) فإنه بواسطة المعادلة (١٢) يتم تقدير ($\beta$) و ($\lambda$) فقد وهو معامل انحدار ($Y_{t-1}$), ($Y_t$).

يعد التخلف الموزع لكويك (Koyck Lag distribution) إنجازا رائعا في تبسيط المعادلة (٦) فبدلا من محاولة تقدير عدد كبير من معلمات ($\beta$)، فإنه يكتفي بتقدير معلمتين هما ($\beta$)، و ($\lambda$) من علاقة ($Y_t$) كدالة لكل من ($X_t$) و ($Y_t$-1) ومن تقدير ($W_i$)، والوزن الذي أدخل إلى المعادلة (٦) فيمكن تقدير كل من ($W_i$) ومعلمات الانحدار ($\beta_i$) حيث $i = 1, 2, 3, \ldots, x$ وأن كل من:

$$\beta_o = \beta_o W_o$$

$$\beta_1 = \beta_2 W_2$$

$$\beta_2 = \beta_2 W_2$$

$$\beta_3 = \beta_3 W_3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\beta_i = \beta_i W_i$$

ويلاحظ ما يلي:

١- أن التخلف الزمني لقيم (Y) المذكور في المعادلة (١٢) تتضمن عادة وبصورة جيدة أفضل توليفة للعلامة (good fit).

٢- نعني بالتوليفية الجيدة لتوزيع التخلف الزمني أنها هي التي تأخذ شكل التخلف الموزع لكويك وحسب هذا الشكل فإن قيمة (x) الأولى تأخذ وزنا أكبر. والقيم المتتالية تأخذ أوزانا أقل. (تتناقض بالتدريج) وليس من الضروري أن يكون لذلك تفسير أكثر واقعية. ولكن من الممكن تحقيق تقدير أكثر واقعية وذلك بإعطاء أوزان لعدد من قيم التخلف الزمني. وبعدها يمكن تطبيق أسلوب كويك على البقية. ومثال ذلك نأخذ النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_o X_t + \beta_t X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{t-3} + \beta_4 X t_{-4} + \ldots + U_t \ldots \quad (12.1)$$

حيث يلاحظ في هذا النموذج أن أول معلمتين من معلمات ($\beta$) تركتا بدون أوزان،

وابتداء مـن المعلمـة (β2) تـم افـتراض التنـاقص الهنـدسي. وعليـه فـيمكن إعـادة كتابـة المعادلة (١-١٢) كما يلي:

$$Y_t = \beta_o X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 \left( 1 + \lambda D + \lambda^2 D^2 + \ldots \right) X_{t-2} + U_t \quad \ldots(12.2)$$

أو:

$$Y_t = \beta_o X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 \frac{1}{1-\lambda D} X_{t-2} + U_t$$

وبضرب طرفي المعالة (٢-١٢) في (1-λD) نحصل على:

$$Y_t (1 - \lambda D) - ( 1 - \lambda D)\beta_o X_t + ( 1 - \lambda D) \beta_1 X_{t-2} + (1 - \lambda D)U_t$$

$$Y_t = \beta_o X_t + (\beta_1 - \lambda\beta_o) X_{t-1} + (\beta_2 - \lambda\beta_1) X_{t-2} + \lambda Y_{t-1} + U_t - \lambda U_{t-1} \quad \ldots (12.3)$$

وهذه (١٢,٣) هي المعادلة التي تستخدم في عملية التقدير.

٣- إن توزيع التخلف الزمني لكويك Koyck Lag distribution يمكن تطبيقه على متغيرين مسـتقلين. أو أكثر. ولنلاحظ ذلك نأخذ المثال التالي:

لنفترض بأن دالة الاستهلاك ($Y_t$) تعتمد على متغيرين مستقلين هما ($X_t$)، والذي يشـير إلى الدخل و ($Z_t$)، الـذي يشـير إلى سـعر الفائـدة بالإضـافة إلى ($U_t$) الـذي يشـير إلى حـد الاضـطراب ولتطبيق طريقة كويك في توزيع التخلف الزمني لمتغيرين مستقلين نفـترض أيضـا أن التوزيعـات لها نفس المؤشر (λ). وهي العملية التي تقيس معدل التلاشي في النموذج المتخلف زمنيا في حـين (λ-١) يشير إلى سرعة التعديل في النموذج. وعليه فإن معادلة الانحدار ستأخذ الصيغة التالية:

$$Y_t = \frac{\beta(1-\lambda)}{(1-\lambda D)} X_t + \frac{\lambda(1-\lambda)}{(1-\lambda D)} Z_t + U_t \quad \ldots\ldots (13)$$

وبضرب طرفي المعادلة في المقدار (1-λD) نحصل على معادلة التقدير التالية:

$$(1-\lambda D)\, Y_t = \beta ( 1- \lambda)X_t + \lambda( 1-\lambda)Z_t + (1 - \lambda D)U_t$$

ويفك ترتيبها هذه المعادلة التقديرية التالية:

$$Y_t = \beta(1-\lambda) X_t + \lambda ( 1 - \lambda)Z_t + \lambda Y_{t-1} + (U_t - \lambda U_{t-1}) \ldots (14)$$

أما إذا افترضنا بأن المؤشر (λ) يختلف لكل متغير مستقل عـن الآخـر فـإن المعادلـة (١٤) تعاد صياغتها كالآتي:

$$Y_t = \frac{\beta(1-\lambda_1)}{(1-\lambda_1 D)} X_t + \frac{\lambda(1-\lambda^2)}{(1-\lambda^2 D)} Z_t + U_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

وبضرب طرفي المعادلة (١٥) في $(1-\lambda_2 D)$، $(1-\lambda_1 D)$ لنحصل على المعادلة التالية:

$$(1-\lambda_1 D)(1-\lambda_2 D) Y_t = \beta (1-\lambda_1)(1-\lambda_2 D) X_t + (1-\lambda_1 D)(1-\lambda_2 D) Y_t = \beta (1-\lambda_1)(1-\lambda_2 D) X_t + \lambda_2)(1-\lambda_2 D) Z_t + (1-\lambda_1 D)(1-\lambda_2 D) U_t$$

وبفك المعادلة السابقة (فيما يخص عنصر التأخر (Delay operator) نحصل على الصيغة التقديرية التالية:

$$Y_t\, \beta(1-\lambda_1)X_t + \beta\lambda_2 (1-\lambda_1)X_{t-1} + \lambda (1-\lambda_2)Z_t - Y\lambda_1 (1-\lambda_2)Z_{t-1} + (\lambda_1+\lambda_2)Y_{t-1} - \lambda_1\lambda_2\, Y_{t-2} + [\,(U_t - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 U_t\text{-}2)\,] \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

أن المعادلة (١٦) توضح الأسلوب التطبيقي لطريقة كويك لتوزيع التخلف الزمني لأكثر من متغير مستقل واحد، وتكون الصيغة أكثر تعقيدا فيما لو زاد عدد المتغيرات المستقلة فبدلا من ظهور $(Y_{t-1})$ في الجانب الأيمن من المعادلة (١٦) قد يظهر $(Y_{t-1})$ وهكذا كلما زاد عدد المتغيرات المستقلة. وبهذا تتفق معادلة التقدير في حالة التخلف الزمني مع قيمتها الواقعية.

### ١١,٤ نموذج التعديل الجزئي Partial Adjustment Model أو Adaptive Expectation Model.

لاحظنا كيفية اشتقاق المعادلة (١٢) التي تعتبر أساس نموذج كويك لتوزيع التخلف الزمني لمتغير مستقل واحد. أو أكثر (كما في المعادلة ١٦)، وظهور متغير معتمد واحد، أو أكثر في الجانب الأيمن من المعادلة أي $(Y_{t-1}, Y_{t-2})$ وهناك نماذج أخرى يمكن أن توصلنا إلى نفس المعادلة (١٢)، ومنها نموذجا التعديل الجزئي، ونموذج التوقعات المكتسبة. وعليه لابد من إعطاء فكرة سريعة عنهما وكما يلي:

#### ١١,٤,١ نموذج التعديل الجزئي (نموذج نيرلوف) (The Partial A adjustment)

ويطلق عليه أحيانا بنموذج تعديل الخزين (The stock Adjustment Model) وهو أحد الطرق التي تدلل على عقلانية نموذج كويك. وقد تطور هذا النموذج من قبل نيرلوف (Marc Nerlove). ولشرح النموذج نفترض وجود نموذج التعجيل المرن المأخوذ من النظرية الاقتصادية. ولنفترض حالة التوازن في الأجل الطويل مع وجود كمية من رأس المال المخزون تستخدم للحصول على كمية من الإنتاج تحت فرضية التقدم العلمي السائدة وسعر الفائدة. وللتبسيط تفترض المستوى المرغوب (desired) من رأسمال يساوي $(Y^*)$ وهو دالة خطية لمستوى الإنتاج (X) وكما يلي:

$$Y^*_t = a + \beta X_t + U_t \quad \text{.................................} (1)$$

وأن العلاقة بين المستوى الفعلي (actual) والمرغوب (desired) وضحها نيرلوف (Nerlove) بنموذج التعديل الجزئي، أو نموذج تعديل الخزين. والذي إشار إليه بالمعادلة التالية:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda (\lambda^*_t - Y_{t-1}) + U_t \text{.................................} (2)$$

حيث ($\lambda$) تمثل معلمة التعديل (Coefficient of adjustment).

وتشير إلى معدل التعديل لـ (Y) إلى (Y*) وهي: $0 < \lambda \leq 0$. حيث:

$$Y_t - Y_{t-1} = \text{actual change}$$

$$Y^*_t - Y_{t-1} = \text{dseired change}$$

وأن معادلة التعديل هذه تتضمن الحركة الجزئية من موقع الأساس (Initial position) ($\lambda$) إلى الموقع الأمثل (optimal position). وعن معدل التعديل ($\lambda$) في المعادلة (١٢) كلما اقترب من الواحد كلما كبر التعديل في الفترة الجارية. وبدمج المعادلة (١) و (٢) نحصل على:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda \, [\, x + \beta X_{t-1} - Y_{t-1} \,] \, U_t$$

وبتحليل الأقواس نحصل على:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda x + \lambda \beta X_{t-1} - Y_{t-1} - \lambda Y_{t-1} + U_t$$

وبالتبسيط نحصل على:

$$Y_t = \lambda a + \lambda \beta X_{t-1} + (1 - \lambda) Y_{t-1} + U_t$$

نستنتج بأنه قد تم التوصل إلى المعادلة التقديرية بدون ان تظهر (Y*) وهذا استنتاج في غاية الأهمية، حيث إنه لا تتوفر بيانات عن (Y*). لذلك ومن التدقيق في المعادلة (٣) نجدها مشابهة إلى معادلة (١٢) أي معادلة كويك لتوزيع التخلف الزمني ما عدا كون المعادلة (٣) تتضمن عنصرين هما الحد المطلق (Intercept term) والحد العشوائي (disturbance Term) (ويعد هذا النموذج ونموذج التوقعات المكتسبة امتدادا لنموذج كويك).

١١,٤,٢ نموذج التوقعات المكيفة: Adaptive Expectation Model (ATM) (نموذج فريدمن - كاكن).

يعد نموذج كويك الصيغة الجبرية الصرفة لنموذج آدهوك وينقص نموذج كويك

الأساس النظري. وقد تم سد هذه الثغرة بطريقة أخرى كما يوضحها الاشتقاق الآتي:

لنفترض النموذج التالي:

$$Y_t = a + \beta X^* + U_t \quad ...................................... (4)$$

حيث (Y) تشير إلى الطلب على النقود.

(X*) تشير إلى سعر الفائدة المتوقع.

(U) تشير إلى الخطأ العشوائي.

أن المعادلة (٤) هي عبارة عن كمية النقود دالة في سعر الفائدة المتوقع. وهناك مثال آخر يمكن استخدامه بنفس الأسلوب وهو أن الاستهلاك دالة في الدخل الدائم ( Permanent income) (نظرية فريدمن في الاستهلاك).

والمعادلة (٤) لا يمكن استخدامها كما هي معطاة مباشرة حيث إن (X*) غير معلومة أي لا تتوفر عنها بيانات. وعليه فإن هذه المعادلة لابد وأن تلحق ببعض الفرضيات عن صياغة التوقعات. والفرضية العامة هي التوقعات المكيفة. والتي تصاغ كما يلي:

$$Y^*_t = X^*_{t-1} = (1 - \lambda)(X_t - X^*_t\text{-}1) \quad ............... (5)$$

حيث تشير (λ) إلى (معلمة التوقع Coefficient of expectation وتكون قيمتها ($0 \leq \lambda <$ > ١) تعرف هذه الفرضية أيضا بفرضية التوقع المتطور Progressive Expectation. أو فرضية تعلم الخطأ Error Learning hypothesis. وقد اقترح هذه الفرضية كل من كاكن Gagan[1] وفريدمن Friedman[٢].

وتشير المعادلة (٥) إلى أن التوقعات تتكون من الأجزاء التي تضيفها (λ) كل فترة زمنية، إلى أن تسد الثغرة بين القيمة الحالية للمتغير وقيمته المتوقعة سابقا (its previous expected Value). وعليه فعن نموذج الطلب على النقود المذكور أعلاه يعني أن التوقعات عن سعر الفائدة سوف تستلم كل فترة كجزء (λ) من سعر الفائدة الحالي والسابق والطريقة

---

(1)P. Gagan; "The monetary Dynamic of Hyper initiation"; in M. Friedmen (ed), studies in the Quantity Theory of Money: University of Chicago press, Chicago, 1956.

(2)Mltton Friedmon; A theory of the consumption function: "National Burean of Economic Research. Princeton University press, Princeton in, N.J. 1957.

لعرض المعادلة (٥) وفقا لهذا المنظور ستكون كما يلي:

$$X^*_t = (1 - \lambda) X_t + \lambda X^*_{t-1}$$

ومن ملاحظة المعادلة (٦) نجدها تتضمن القيمة المتوقعة (الدائمية Permanent) للمتغير (X) خلال الفترة (t) وتمثل الوسط (المعدل) الموزون (Weighted Average) للقيمة الحالية للمتغير (x) وقيمته المتوقعة في الفترة السابقة الماضية.

والمثال الآخر الذي يوضح نفس الفكرة هو ما ذكره البروفيسر فريدمن حول دالة الاستهلاك التي هي دالة للدخل الدائم الجاري (Current permanent income function) وهذا الدخل يتحدد بمستوى الفترة الأخيرة للدخل الثابت في ضوء تجربة الدخل الحالي.

وبإعادة كتابة المعادلة (٥) نحصل على:

$$X^*_t - X^*_{t-1} + (1 - \lambda) X^*_{t-1} = (1 - \lambda) X_t$$

أي بصياغة أخرى فإن:

$$X^*_t - X_{t-1} + X^*_{t-1} - \lambda X^*_{t-1} ( = (1 - \lambda)X_t$$

أو:

$$X^*_t - \lambda X^*_t = (1 - \lambda)X_t$$

وباستخدام عنصر التخلف (delay operator) والذي يرمز له بـ (D) تكون المعادلة (٧) كما يلي:

$$(1-\lambda D)X^*_t = (1 - \lambda) X_t$$

إذن:

$$X^*_t = \frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda D)} X_t \quad \text{.......} (8)$$

وبتعويض المعادلة (٨) في المعادلة الأصلية (٤) نحصل على:

$$Y_t = a + \beta \frac{1-\lambda}{(1-\lambda D)} X_t + U_t$$

وبضرب طرفي المعادلة في (1 - λD) نحصل على:

$$(1 - \lambda D)Y_t = (1 - \lambda D) x + \beta (1 - \lambda)X_t + (1 - \lambda D)U_t$$

وطالما (a) هي مقدار ثابت، لا يوجد فيه تخلف زمني. وعليه فإن:

$$Y_t = a (1 - \lambda) + \beta (1 - \lambda)X_t + \lambda X_{t-1} + U_t - \lambda U_t\text{-}1 \quad \text{.....} (9)$$

وهي المعادلة التي تستخدم في عملية التقدير. وبملاحظة أن النموذج (A.E.M) ومعادلته التقديرية (٩) مشابه لنموذج كويك باستثناء أن (A E M) أقوى من ناحية الخلفية النظرية لها. كما سبق ذكره.

١١,٥ مشكلة تقدير نماذج توزيع التخلف الزمني:

مما سبق ذكره من تشابه نموذج كويك مع نموذجي نيرلوف وكاكن - فريدمن، إلا أن النموذجين الأخيرين أكثر تطويرا من حيث التفسير والخلفية النظرية. وعلى أية حال فإن المشكلة ليست في التشابه أو التطوير، وإنما في التقدير. حيث إنه لا يمكن استخدام الصيغة المباشرة لطريقة المربعات الصغرى (OLS) وذلك لسببين هما:

١- وجود ($Y_{t-1}$) في الجانب الأيمن من المعادلة. مع المتغيرات المستقلة.

٢- ظهور مشكلة الارتباط الذاتي.

وقد تم اقتراح عدة طرق لتطبيق أحد النماذج الثلاثة السابقة والتخلص من مشاكل التقدير المذكورة. هناك عدة طرق نذكر منها طريقة استخدام المتغير الأدائي The Method of Instrumental Variable وطريقة حذف الارتباط الذاتي (طريقة داربن) Detecting Auto correlation in Auto gressive Models (Durban Test)، وطرق أخرى. سوف نتطرق إلى أهم تلك الطرق المستخدمة في التقدير لنماذج توزيع التخلف الزمني.

لقد سبق وأن أوضحنا بان فرضية كويك لنمط الزمن أو طريقتي التعديل والتوقعات خلقت قيمة تخلف زمني للمتغير $Y_{t-1}$ في الجانب الأيمن من المعادلة، وبهذا تكونت لدينا مشكلة أخرى في التقدير، حيث أصبح النموذج التقديري كالآتي:

$$Y_t = (a) + \beta_o X_1 + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + U_t$$

وسبق وأن تم حذف (a) باعتبارها قيمة ثابتة، وعليه فالنموذج المتباطؤ زمنيا يأخذ الشكل الآتي:

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + V_t$$

تظهر مشكلة التقدير، ويعتمد أسلوبها على الفرضيات التي سوف توضع حول حد الاضطراب ($V_t$) وعدد من الاحتمالات التي يجب أن تميز. ومشكلة التقدير تظهر بسبب ما يلي:

(a) أن المتغير ($Y_{t-1}$) ليس عنصرا مستقلا عن ($V_t$) وعليه فعند استخدام طريقة المربعات الصغرى سوف تخلق تقديرات متحيزة وخاصة في العينات الصغيرة.

(b) ظهور مشكلة الارتباط الذاتي.

ومن أجل مناقشة طرق التقدير المختلفة يتطلب الأمر مناقشة الفرضيات التـي ستوضـع لحد الاضطراب ($V_t$).

١١,٥,١ الفرضية (١) واقتراح ليفيتان:

تنص الفرضية الأولى على أن:

$(\gamma_t)$ is $N_1D\ (0, \sigma_V^2)$

والتي تشير إلى أن ($V'_t$) (حد الاضطراب) موزع طبيعيا. ومستقلا مع وسط مساو للصـفر. وتباين ثابت، وهذه أبسط فرضية محتملة لحل التعقيد الناتج عـن المشـكلة الأولى (a)، وظهـور تخلف زمني للمتغير التابع ($Y_{t-1}$) في الجانب الأيمن من المعادلة. وهذا يعني أنه لا يوجـد ارتبـاط ذاتي بين متغيرات حد الاضطراب، والمتغير المستقل حيث أن المشكلة (a) تتضمن:

$$E\ (V_t\ Y_t) = E\ (\beta_o V_t + \beta_1 V_t Y_{t-1} + \beta_2 X_t V_t + V_t^2$$

وعليه فإن:

$$E\ (V_t Y_t) = 0 + \beta_1\ E\ (V_t Y_{t-1}) + 0 + \sigma_V^2$$

إذن:

$$E\ (V_t\ Y_t) \neq 0$$

وعموما فإن القيمة المتوقعة للحد

$$E\ (V_t - Y_{t-s}) \neq 0$$

for $S > 0$ for all t.

وإذا تم تطبيق (OLS) على المشكلة (a) فسوف نحصل على تقديرات كفـوءة في العينـات الكبيرة ومتحيزة في العينات الصغيرة. وقد تم تقديم عدة مقترحات لتصحيح ذلـك منهـا طريقـة المتغير الأدائي Instrumental variable.

طريقة المتغير الأدائي The Instrumental Variable:

وقد جاء بهذا الاقتراح البروفيسر ليفيتان N.liviatan والذي تضمن إيجاد متغير أدائي ملائـم ليعوض ($Y_{t-1}$) وأن خطوات المقترح كما يلي:

i) نجد انحدار ($Y_t$) على قيم التخلف الزمني لـ (X) فقط لنحصل على المعادلة المقدرة التالية:

$$\hat{Y}_t = \hat{\gamma}_o + \hat{\gamma}_1 X_{t-1} + \hat{\gamma}_2 X_{t-2} + \dots$$

وعدد فترات التخلف يتوقف على جودة قيم التخلف للمتغير (X)، فإذا كانت (X) مرتبط ذاتيا وبصورة قوية، فإن أفضل تقدير هو الاكتفاء بفترتين أو ثلاث فترات تخلف زمني.

ii) تخلف $(\hat{Y}_t)$ بفترة زمنية واحدة فنحصل على $(\hat{Y}_{t-1})$ ونعوض عنها بمتغير أدائي في النموذج الأصلي. حيث أن $(\hat{Y}_t)$ هي الآن متغير مستقل.

$$Y_t = \beta_o + \beta_t Y_{t-1} + \beta_2 X_{t-2}\ 6\ V^*_t$$

١١،٦،٢ الفرضية ١١ واقتراح زيلنز - كازيل:

تنص هذه الفرضية على أن المتغير العشوائي $(V_t)$ مرتبط ذاتيا مع التحديد التالي:

$$V_t = U_t - \lambda U_{t-1}$$

وهنا يظهر لدينا احتمال كون: الحد (U's) يكون:

$$U's\ are\ NID\ (0,\ \sigma_u^2)$$

وبموجب هذه الفرضية فإن ظاهرة الارتباط الذاتي تظهر ما إذا كان النموذج مطابقا لأحد النماذج التالية:

١- نموذج التخلف الهندسي لكويك.

٢- نموذج كاكن - فريدمن (نموذج التوقعات المكتسبة (المكيفة).

٣- نموذج سولو Solow's Model.

وبموجب فرضية الاحتمال الأول فإنه لا يمكن تطبيق صيغة OLS للاعتبارات التالية:

$$E\ (Y_{t-1}\ ,\ V_t) \neq 0$$

وكنتيجة لذلك فإن طريقة (OLS) غير ممكنة التطبيق وسوف تعطي تقديرات متحيزة. وغير كفوءة. وعليه فإنه من الضروري تطبيق صيغة أخرى للتقدير اقترح كل من زيلنر وكيزيل Geisel - Zellner الطريقة البديلة.

- الطريقة البديلة للتقدير (طريقة Zellner - Geisel للتقدير):

بافتراض النموذج التالية:

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + V_t$$

حيث: $\beta_o = \lambda$

وأن $(\lambda)$ هي معلمة المتغير $(Y_{t-1})$ في نموذج كويك ونموذج كاكن - فريدمن، وإذا

كانت ($\lambda$) معلومة فإنه يمكن تطبيق صيغة (GLS) على البيانات المحولة وكما يلي:

$$(Y_t - \lambda Y_{t-1}) = \beta_o + \beta_2 X_t + V_t$$

أما إذا كانت ($\lambda$) غير معلومة فإن زيلنر Zellner قد اقترح طريقة لمعالجة التخلف الزمني أطلق عليها (Search Procedure) وتتخذ الصيغة التالية:

$$Y_t = a0\lambda + \beta_o ( 1 + \lambda + \lambda^2 + ... \lambda^{t-1}) + \beta_2 (X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^{٢} X_{t-2} + ... \lambda^{t-1} X_1) + \lambda_t$$

وعليه تتضمن هذه المعادلة مجاهيل هي (ao), ($\lambda$), ($P_o$) and ($\beta_2$) ولإيجاد هذه القيم اقترح زيلنر (Zellner) تطبيق صيغة (OLS) ومنها نحصل على تقديرات لقيم معلمات ($\beta$) ذات أقل مجموع من المربعات (Minimum sum of squares).

١١,٥,٣ الفرضية III:

تتضمن الفرضية الأخيرة كون المتغير العشوائي في النموذج أدناه:

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + V_t$$

مرتبطا ذاتيا علاوة على أنه يتبع (1st order auto regressive scheme)

حيث:

$$V_t = pV_{t-1} + U_t$$

بموجب الفرضية $U_t \sim N(o, \sigma_u^2)$ والسبب هو أن ($\lambda_t$) مرتبة ذاتيا ومع وجود متغير متخلف زمنيا في الجانب الأيمن من المعادلة وبتطبيق طريقة (OLS) نحصل على تقديرات للمعلمات متحيزة وغير كفوءة والطرق المقترحة لحل هذه المشكلة هي:

**i- طريقة المتغير الادائي:**

وهذه الطريقة مشابهة للطريقة التي تم التطرق إليها بموجب الفرضية (I) حول ($V'_s$) وكانت خطواتها الأساسية هي:

١- تبديل ($Y_{t-1}$) بالمتغير ($X_{t-1}$) لنحصل على:

$$Y = \hat{\gamma} o + \hat{\gamma} X_{t-1} + \hat{\gamma}_2 X_{t-2} + ...$$

تخلف ($\hat{Y}_t$) بفترة زمنية واحدة إلى ($Y_{t-1}$) وتطبيق (OLS) على:

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 \hat{Y}_{t-1} + \beta_2 X_t - V_t$$

وهذه تعطي تقديرات كفوءة للعينات الكبيرة فقط، وتخلق ارتباطا ذاتيا. وعليه نأتي إلى الطريقة الثانية وهي:

**ii- طريقة المربعات الصغرى العمومية (GLS)**

وهذه الطريقة ملائمـة للتطبيـق عـلى نمـوذج كويـك مـن الدرجـة الأولى، وهـي مطابقـة لأسلوب (OLS). ولكن بتحويل المتغيرات الأصلية، كما في النموذج أدناه:

$$(Y_t - pY_{t-1}) = \beta_o (1 - p) + \beta_1 (Y_{t-1} - pY_{t-2}) + \beta_2 (X_1 - pX_{t-1}) + U_t \qquad (2)$$

اشتقاق المعادلة يعتمد على نموذجنا الأساسي هو:

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + V_t \qquad (1)$$

حيث: $V_t = pV_{t-1} + U_t$

وفي معظم الدراسات الميدانية فإن قيمة (p) غير معلومة. وعليـه هنـاك عـدة مقترحـات لإيجاد قيمة (p) منها الطريقة التكرارية (Iteration Methods).

١١,٦,٤ تقدير (p) بواسطة Iteration:

لإيجاد قيمة (p) نتبع الخطوات التالية:

١- نختار قيمة افتراضية (arbitrary) إلى (p) حيث تقع بين $0<p<1$ وتشير لها بـ ($p^*$).

١- نختار قيمة افتراضية (arbitrary) إلى (p) حيث تقع بين $0<p<1$ وتشير لها بـ ($p^*$).

٢- نعوض قيمة (p) في المعادلة المحولة (٢) لنحصل على:

$$(Y_t - p^*Y_{t-1}) = (\beta_o p - p^*) + \beta_2 (Y_{t-1} - p^*Y_{t-2}) + \beta_2 (X_t - p^*X_{t-1}) + \quad \ldots \ (3)$$

٣- تطبق (OLS) على المعادلة (٣) لنحصل على تقديرات المعلمات ($\beta_t$) والمتبقي ($\hat{e}_t$).

٤- نجد انحدار المتبقي $\hat{e}_t$ على قيمة تخلفه الزمني ($\hat{e}_{t-1}$) ونحصل على المعادلة:

$$\hat{e}_t = \hat{e}_{t-1} + \xi_t$$

ومنها نحصل على المقدر ($\hat{p}$)

٥- باستخدام القيمة الجديدة ($\hat{p}$) نعيد تقدير النموذج المحول للمعادلة التالية:

$$(Y_t - \hat{p} Y_{t-1}) \beta_o (1 - \hat{p}) + \beta_1 (Y_{t-1} - \hat{p} Y_{t-2}) + \beta_2 (X_t - \hat{p} X_{t-1}) + U_t \quad \ldots (5)$$

وهذه المعادلة (٥) تعطي مجموعـة جديـدة للمعلـمات المقـدرة ($\hat{\beta}$). وتقـديرا جديـدا للمتبقي $\hat{e}_t$.

نجد انحدار ( $\hat{e}_t$ ) على ( $\hat{e}_{t-1}$ ) ونعيد هذا الأسلوب نحصل علـى مقـدرات لمعلـمات (β) ذات مواصفات فيها درجة كبيرة من الدقة. عندما تكون قيمة معلـمات (β) لا تتغـير إلا بشـكل ضئيل جدا (الرقم الثالث من الكسر).

١١,٦,١ تطبيقات وتمارين:

لكثرة التطبيقات والطرق المعالجة فإنها تعد بمثابة تطبيق لحالة التخلـف الزمنـي ولهـذا نكتفي بالتمارين:

١- ناقش بتركيز نموذج كويك في توزيع التخلف الزمني، ما هي نقاط الإبـداع في هـذا النمـوذج؟ قارن هذا النموذج مع نموذج آدهوك.

٢- ناقش المفاهيم التالية:

Delay Operator, Average Lag. Geometric Lag
Recursive Variable, Stock Adjustment Model,
Desired Change, Octual change, Expectation Coefficient
Permenant Income Function, Instrumental Variable.
Iterative method,

٣- أوضح أن تطبيق نموذج كويـك في توزيـع التخلـف الزمنـي للمتغـيرات التفسـيرية ونمـوذجي التعديل الجزئي والتوقعات المكيفة تعطي معادلة تقديرية من النوع التالي:

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + V_t$$

وفي حالة افتراضنا أن:

$$V_t = U_t - \lambda U_{t-1} \quad , \qquad 0 < \lambda < 1,$$

حيث أن ($U_s$) موزعة طبيعيا ومستقلة بوسط مساوي للصفر وتباين ثابت.

فما هي المشاكل تقدير المعادلة أعلاه. وما هي الطرق التي تقترحها لمعالجتها؟

٤- إن نموذج التخلف المقترح من قبل كويك ذو استعمال واسع فمثلا:

$$C_t = \beta_o + \beta_1 Y_t + \lambda C_{t-1} + U_t$$

حيث إن $C_t$ تشير إلى إجمالي الاستهلاك. و (Y) يشير إلى إجمالي الدخل.

أ- استعرض النموذج المذكور أعلاه في صيغته المعروفة بنظرية الدخل الدائم.

ب- ناقش مشكلة تقدير هذا النموذج في حالة استخدام طريقة (OLS).

جـ- أوضح الحل المقترح من قبل كويك.

د- هل ترى أن نموذج التوقعات المكيفة يختلف عن نموذج التعديل الجزئي في معالجته لمشكلة تقدير معلمات النموذج أعلاه.

٥- من النموذج التالي:

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + V_t$$

$$V_t = pV_{t-1} + \xi_t$$

بافتراض

$$/ \beta / < 1$$

$$/ p / < 1$$

وأن ($\xi_s$) غير مرتبطة ذاتيا.

أوضح أن استخدام طريقة المربعات الصغرى (OLS) في هذا النموذج تعطي تقديرا للمعلمة ($\beta$) غير متسقة (Inconsistant)، وأن اختبار داربن - واطسون للارتباط الذاتي متحيز نحو قيمة الخطأ العشوائي.

٦- من النموذج التالي:

$$Y_t = \beta X^*_t + U_t$$

حيث ($X^*_t$) تشير إلى القيمة المتوقعة أو المرغوبة للمتغير (X) في الزمن (t) وأن ($U_t$) تشير إلى المتغير العشوائي الذي وسطه الحسابي مساوي للصفر وتباينه $\sigma^2$. وأن ($X^*_t$) مستقلة عن ($U_t$). وبالإضافة إلى ذلك نفترض أن:

$$X^*_t - X^*_{t-1} = (1 - \lambda)(X_t - X^*_{t-1}),$$

حيث $0 \leq \lambda < 1$

أوضح الطريقة التي نحصل منها على توزيع التخلف الزمني ذي الصيغة التالية:

$$Y_t = \beta(1 - \lambda)(X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \ldots) + U_t$$

والتي لها متوسط متخلف متكون من $\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)$

ناقش صعوبات التقدير لمعلمات الانحدار في هذه المعادلة مع توضيح كيفية تبسيط استخدام تحويل نموذج كويك. وهل هناك صعوبات في التقدير في الصيغة المحولة؟.

٧- من النموذج التالي:

$$Y = X\beta + U$$

$$E(u) = 0, \; E(uu') = V$$

وبافتراض كون المتغير العشوائي يتبع الترتيب الأول للارتباط الذاتي:

1st - order auto regressive scheme:

$U_t = pU_{t-1} + \xi_t$

$/p) < 1$

و $\xi_t$ تخضع للفرضيات التالية:

$E(\xi_t) = 0$

$E(\xi_t \xi_{t-1}) = \sigma^2_\xi$ ، $S = 0$ ، for a U (t)

$= 0$ ، $S \neq$

أ- اشتق عناصر (V). ومن ثم أوضح أن ($\hat{\beta}$) تمتاز بكونها (BLUE) بموجب الطريقة العمومية للمربعات الصغرى (Generalized Least Squares).

ب- أوضح أن نفس المقدار ($\hat{\beta}$) يمكن الحصول عليه بطريقة تحويل المعلومات الأصلية باستخدام معلمة (p) المناسبة بطريقة (OLS) لبيانات الصيغة المحولة.

٨- إذا أعطيت النموذج التالي:

$Y = X\beta + U,$

وبافتراض

$E(u) = 0, E(uu') = \sigma^٢$

إضافة أن افتراض كون الحد العشوائي يتبع I[st] order aut regressive scheme.

حيث إن:

$U_t = pU_{t-1} + \xi_t, \quad t = 1,2, ..., n.$

و ١ > / p/، وأن ($\xi_١$) تخضع للفرضيات التالية:

$E(\xi_t) = 0$

$E(\xi_t \xi_t - 1) = \sigma^٢$ , $S = 0$

, for all t.

$= 0$ , $S \neq 0$

المطلوب:

اشتق عناصر المصفوفة (Ω). وأوضح أن الصيغة التالية:

$b = (X'\Omega^{-1} X)^{-1} X'\Omega^{-1} Y$

تعطي أفضل تقدير خطي غير متحيز (BLUE) للمعلمة (β).

# الفصل الثاني عشر
# المتغير الوهمي (المصطنع)
Dummy Variable

(١٢,١) طبيعة المتغيرات الوهمية ودورها.

(١٢,٢) طريقة استخدام المتغير الوهمي وتقديره.

(١٢,٣) تقدير أثر مساهمة متغيرين وهميين.

(١٢,٤) مشاكل تقدير المتغير الوهمي.

(١٢,٤,١) ظهور مشكلة التداخل الخطي المتعدد.

(١٢,٤,٢) ظهور مشكلة عدم التجانس.

(١٢,٥) التوسع في استخدام عدد كبير من المتغيرات الوهمية.

(١٢,٦) التعديل الموسمي باستخدام المتغيرات الوهمية.

(١٢,٧) اختبار المتغير الوهمي.

(١٢,٨) تطبيقات وتمارين.

# الفصل الثاني عشر

# المتغير الوهمي (المصطنع)

## Dummy Variable

سنتناول في هذا الفصل معالجة المتغيرات المستقلة النوعية (الوصفية) الداخلة في تحليل الانحدار. وتمثل المتغيرات النوعية (Qualitative Variable) بمتغيرات وهمية، أو صماء ( Dummy Variables)، ويستخدم هذا المصطلح تحت تسميات كثيرة فمنهم من يطلق عليها تسمية المتغيرات الخيالية، أو التصويرية أو متغيرات اللعبة، أو المصطنعة Artificial، أو فنيا يطلق عليها تسمية متغيرات الواحد / صفر أي One - zero Variables . وجميع هذه التسميات تشير إلى المتغيرات الغير عددية (غير الكمية) أي المتغيرات النوعية (Quantitative) (Qualitative Not) وبإدخال المتغيرات الوهمية نكون قد وسعنا نموذج الانحدار الخطي، ويصبح النموذج مفسرا لسلوكية الظاهرة المدروسة تفسيرا أكثر منطقية وتطابقا مع الواقع.

١٢,١ طبيعة المتغيرات الوصفية ودورها:

في تحليل الانحدار يلاحظ عادة أن المتغير التابع قد لا يتأثر فقط بالعناصر المستقلة التي لها قيم عددية (كمية Quantified) مثل الدخل، الإنتاج، الأسعار، التكاليف، الأوزان، الطول، درجات الحرارة كميات سقوط المطر.. الخ، بل أيضا يتأثر بعناصر نوعية (Qualitative) مثل الجنس، العمر، اللون، الأصل، الدين، القومية، الحرية، السلم، الأوبئة، الكوارث، الزلازل، الإضراب، الأزمات السياسية، التغيرات في سياسة الدولة الاقتصادية، المكان، وإلى أخره من العناصر غير المقاسة رقميا. فمثلا قد يستلم المدرس في الجامعات الأمريكية راتبا أعلى من المدرس بنفس الجامعات، أو قد يستلم المدرس الأبيض راتبا أعلى من المدرس الأسود، وهذه تعود إلى عوامل جنسية وعرقية، فمثل هذه العوامل قد تؤثر على المتغير التابع، وعليه فإن إدخالها لمعادلة الانحدار سوية مع المتغيرات الأخرى

المستقلة أمر ضروري. والطريقة لإدخال هذه المتغيرات الوصفية تعتمد على تكوين متغيرات مصطنعة (Artificial Variables) والتي تأخذ قيم الواحد أو الصفر (١،٠)، حيث يشير الصفر (٠) إلى غياب مساهمة المتغير، في حين يشير الواحد (١) إلى وجود مساهمة المتغير الوصفي،فمثلا يشير الواحد إلى الشخص الحاصل على شهادة البكالوريوس إحصاء، والصفر إلى أنه لا يحمل هذه الشهادة. والقيم (١،٠) هي التي نطلق عليها المتغيرات الوهمية أو Dummy Variables أو أحيانا يطلق عليها المتغيرات التأشيرية (Indicators Variables) أو المتغيرات التصنيفية (Categorical Variables) ويمكن استخدام هذه المتغيرات تماما كما تستخدم المتغيرات المستقلة الأخرى في معادلة خط الانحدار، وأن نماذج الانحدار التي تتضمن صنفا واحدا من المتغيرات المستقلة (الكمية) أو الوصفية يطلق عليها نماذج تحليل التباين Analysis of Variance Models.

وان نماذج الانحدار التي تتضمن كلا الصنفين من المتغيرات المستقلة (الكمية والوصفية Qualitative and qualitative فإنه يطلق عليها نماذج تحليل التباين المشترك ( Analysis of co-Variance models).

وفي هذا الفصل سوف نتطرق إلى نماذج الانحدار من الصنف الثاني، حيث إن نماذج الانحدار من نوع (ANOV) فهي عبارة عن أسلوب (OLS) سواء كان المتغير مستقلا وصفيا أو كميا، حيث إن شكل المعادلة في الحالة الوصفية سيكون كالآتي:

$$Y_i = a + \beta_i D_i + U_i$$

حيث تشير $D_i$ إلى المتغير الوصفي (الوهمي) Dummy variable.

أما في حالة النماذج المتضمنة لكلا النوعين من المتغيرات الكمية والوصفية فإن شكل النموذج سيكون كالآتي:

$$Y_i = a_o + \beta_o D_i + \beta X_i + U_i$$

حيث تشير $Y_i$ مثلا إلى دخل مدرس الجامعة و $x_i$ إلى عدد سنوات الخدمة و $1 = D_i$ إذا كان ذكر والصفر إلى الأنثى أي:

٠ = كان انثى.

تعبر $X_i$ عن متغير كمي qualitative وتعبر $D_i$ عن متغير وصفي (qualitative) وهو الجنس.

١٢,٢ طريقة استخدام المتغير الوصفي وتقديره:

لمعرفة كيفية قياس معلمات المتغيرات الوصفية، لابد أولا من معرفة الكيفية في استخدام المتغير الوصفي. حيث سيصبح الموضوع بعد ذلك عبارة عن تطبيق مباشر لنماذج الانحدار. أسلوب المتغير الوصفي يستعمل القيمة (١) ليدلل على وجود المتغير النوعي والقيمة (٠) على عدم وجوده. ولنأخذ المثال التالي:

لنفترض أن دخل العمال يعتمد على عدد ساعات العمل وعلى الحالة العلمية للعمال، يمكن كتابة هذه الدالة كنموذج كما يلي:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + U_i$$

حيث تشير $Y$ إلى دخل العمال.

$x_2$ إلى عدد ساعات العمل.

$x_4$ $x_3$ إلى نوع الشهادة العلمية.

ويتضمن النموذج أربع معلمات تحتاج إلى تقدير $\beta_k$ حيث ($k$) تساوي 4,3,2,1 فإذا افترضنا وجود بيانات عددية عن $x_2$, $Y$ بالدينار والساعات على التوالي. أما بخصوص الحالة العلمية للعمال فلا تتوفر لدينا بيانات عنها في العينة، سواء كان العامل متعلما أم غير متعلم. ولتوضيح ذلك نستخدم متغيرات وصفية ثنائية كما يلي:

متعلم / غير متعلم: ويرمز له بالرمز $X_3$ وهو يأخذ إما: متعلم = ١، غير متعلم = ٠

غير متعلم / متعلم: ويرمز له بالرمز $X4$ وهو يأخذ إما: غير متعلم = ١، متعلم = ٠

وباستخدام طريقة (OLS) لتقدير قيم ($\beta$) نستخدم المعادلة:

$$\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$$

ومن الضروري جدا ملاحظة صفات المصفوفة ($x'x$) بدقة. وهذا يعني هل أن استخدام المتغيرات الوهمية (الوصفية) سوف يثير مشكلة خاصة؟ لتوضيح ذلك لنفترض بأنه في مثالنا السابق يوجد خمسة عمال مستلمون للدخل هم C, B, A, E, D ويوجد اثنان منهم غير متعلمين وهم C, B أي أن:

| | | X1 | X2 | X3 | X4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | ساعات العمل | متعلم | غير متعلم |
| مستلمي الأجور | A | 1 | $X_{12}$ | ١ | ٠ |
| | B | 1 | $X_{٢2}$ | 0 | 1 |
| | C | 1 | $X_{٣2}$ | 0 | 1 |
| | D | 1 | $X_{٤2}$ | 1 | 0 |
| | E | 1 | $X_{٥2}$ | 1 | 0 |

وكما ذكرنا سابقا بان $X_1$ قيمة ثابتة Constant Value مقدارها (١) وللحصول على تقدير الحـد المطلق $\beta_1$. ولإيجاد (X'X) يتطلب الأمر تحديد مصفوفة (X)، (X') وكما يلي:

$$X' = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} & X_{41} & X_{51} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & X_{42} & X_{52} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{43} & X_{53} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} & X_{44} & X_{54} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \\ X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن المصفوفة (X'X) في جميع حالات تحليل الانحدار ولكل نمـاذج الانحـدار هـي مصفوفة متماثلة (Symmetric) ولذلك يمكن كتابتها بالصورة:

$$X'X = \begin{bmatrix} \sum X_1 & \sum X_1X_2 & \sum X_1X_3 & \sum X_1X_4 \\ \sum X_1X_2 & \sum X_2^2 & \sum X_2X_3 & \sum X_2X_4 \\ \sum X_1X_3 & \sum X_3X_2 & \sum X_3^2 & \sum X_3X_4 \\ \sum X_4X_1 & \sum X_4X_2 & \sum X_4X_3 & \sum X_4^3 \end{bmatrix}$$

وفي هذا المثال فإن هذه المصفوفة تكون بالصورة التالية:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 5 & \sum_{j=1}^{5} X_2 & 3 & 2 \\ \sum_{j-1}^{5} X_2 & \sum_{j=1}^{5} X_2^2 & \sum_{j-1}^{3} X_2 & \sum_{j=1}^{2} X_2 \\ 3 & \sum_{j-1}^{3} X_2 & 3 & 0 \\ 2 & \sum_{j=1}^{2} X_2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

يلاحظ بان العمود (١) في المصفوفة (X'X) يمكن الحصول عليـه مـن إضـافة العمـود (٣) والعمود (٤)، حيث إنه يلاحظ إذا كان عمودا في مصفوفة يساوي مجمـوع عمـودين آخـرين في المصفوفة، فإن شرط (Nonsingularity) لم يتحقق، والمصفوفة لا يمكن إيجـاد معكوسـها. وفي مثـل هذه الحالة نحصل على ما يسـمى بمصـيدة المتغـير الـوهمي The dummuy Variables Trap والمقصود بـ NON - singularity أن المحدد (Determirant)* لا يساوي صفرا، وإنما يساوي كميـة موجبة أو سالبة أي $/D/ \neq 0$ وبهذا يمكن أن نحقق إيجاد معكوس المصفوفة. أما المقصود بـ ( /D' = 0) فهي كون المحدد يساوي صفرا أي (/D/=0) وبهذا لا نستطيع إيجاد معكوس المصفوفة، وعليه إذا كان $/D/ = 0$ فإنه لإيجاد $A^{-1}$ فستكون قيمته مالا نهاية (∞)كما يلي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj = \frac{adj}{0} = \infty$$

ولمعالجة (مصيدة المتغير الوهمي)، فقد اقترح البروفيسر دانيـال سـويتس[1] (Danel Suits) بإعادة كتابة النموذج كما يلي:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + U$$

وقد تم الأخذ بنظر الاعتبار مسـاهمة حالـة واحـدة، ضـمن المتغـير الـوهمي وهـو ($X_3$) (المتعلم)، وأن تأثير مساهمة غير متعلم يمكن ملاحظتها من ($\beta_1$) وللحصول على قيـاس أثـر غـير متعلم، يتم ذلك كما يلي:

$$X_3 = 0 \text{ and } E(y) = \beta_1 + \beta_2 X_2$$

ونفس الشيء بالنسبة لحالة المتعلم فيتم عن طريق:

---

* راجع الملحق (B). المحددات.

(1) Demiei B. Sutts; "Use of Dummy variables In Regression Equations" Journal of American statistical Assoaation; Vol.: 52 1957. PP. 548-551.

$X_3 = 1 , E (y) = (\beta_1 + \beta_3) \beta_2 X_2$

وكصيغة عامة تستخدم لتلافي مصيدة المتغير الوهمي الذي يتبع أسـلوب (٠,١)، وتضـمن المعادلة للحد المطلق $\beta_1$ فإنه يجب أن يكون عدد المتغيرات الوهمية واحدا أقـل مـن المتغـيرات الوهمية المتوقع أن تؤثر على التابع.

وللتوضيح راجع التطبيق الثالث والرابع.

وفي مثالنا السابق فإن عدد المتغيرات الوهمية المؤثرة في المتغـير التـابع (الأجـور) مـتعلم (١) أم غير متعلم (٠) هما متغيرين ($x_3 = 1$) و ($x_4 = 0$) وللتخلص من المصيدة فإننـا نطـرح متغـيرا واحدا وليكن $x_4 = 0$ (كما هو معمولا به في التطبيق الثالث والرابع). .

ولتوضيح الفكرة بصورة أكثر دقة نأخذ المثال التالي الذي يوضح بصورة افتراضية العوامـل المؤثرة على دخل العمال في الولايات المتحدة. لنفترض أنه توجد متغيرات وصفية للدين والمتمثل في البروتستانت ($x_3$) والكاثوليك ($x4$) والهندوس ($x5$) والبـوذيين ($x6$)، والمسـلمين ($x_7$). والأسـلوب المتبع في إدخال المتغيرات الوصفية إلى النموذج التقديري هو:

- تكوين جدول يوضح المتغيرات الوصفية والمتغيرات الكمية وكما يلي:

| | العمال | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_3 = 1$ آخر ٠ وبروتستانت | A | 1 | $X_{12}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | ٠ |
| $X_4 = 1$ آخر ٠ وبروتستانت | B | 1 | $X_{22}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $X_5= 1$ آخر ٠ وبروتستانت | C | 1 | $X_{32}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $X_6 = 1$ آخر ٠ وبروتستانت | D | 1 | $X_{42}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $X_7 = 1$ آخر ومسلم | E | 1 | $X_{52}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

- وعليه فالمعادلة المتضمنة للمتغيرات الوصفية والكمية ستأخذ الصيغة التالية:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 + \beta_7 X_7 + U$$

حيث يشير $Y$ إلى دخل العمال.

$X_2$ إلى عدد ساعات العمل.

أما المعادلة التقديرية (Estimating Equation) والمتضمنة عدد المتغـيرات الوصـفية مطروحـا منه متغير واحد فهي:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 + U$$

حيث أن ($\beta 7$) تشتق من ($\beta 1$) وذلك عند النظر إلى مشاهدات العينة من زاوية

معتقـد العامـل بالـدين الإسـلامي فقـط، فعندئـذ بقيـة المتغـيرات الوصـفية ($x_3\ x_4\ x_5\ x_6$) ستأخذ القيم صفر (أي ٠ = $\beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_6$) وهذا يعني:

| | |
|---|---|
| لمستلمي الدخل من المسلمين | $E(Y) = \beta_1 + \beta_2 X_2$ |
| لمستلمي الدخل من البروتستانت | $E(Y) = (\beta_1 + \beta_3) + \beta_2 X_2$ |
| لمستلمي الدخل من الكاثوليك | $E(Y) = (\beta_1 + \beta_4) + \beta_2 X_2$ |
| لمستلمي الدخل من الهندوس | $E(Y) = (\beta_1 + \beta_5) + \beta_2 X_2$ |
| لمستلمي الدخل من البوذيين | $E(Y) = (\beta_1 + \beta_6) + \beta_2 X_2$ |

مما تقدم يلاحظ بأن $\beta_1, \beta_2$ تظهر في جميـع المعـادلات التقديريـة أعـلاه (الحـد المطلـق والمتغير الكمي) و $\beta_6, \beta_5, \beta_4, \beta_3$ فإنها تقدر فقط المعادلات المنفردة للعينة. وتفسير هذه النتيجـة المهمة يحتاج إلى دقة وعناية أكثر حيث أن كل قيمة من قيم المتغير الوصفي تشير إلى تحـول في خط الانحدار من موضع إلى آخر حيث يتم التأثير على الحد المطلق ويـؤدي إلى تغـير موقعـه في حين أن درجة المنحنى (Slope) أو المعلمة لعدد الساعات ($\beta_2$) ثابتة.

تقدير أثر المتغيرات الوصفية على المتغير التـابع بالطريقـة المـذكورة أعـلاه يـتم بموجـب الفرضيات الثلاث المذكورة أدناه.

١- تأثير المتغيرات الكمية (غير الوصـفية NON dummy) عـلى المتغـير التـابع يكـون هـو نفسـه في جميع المعادلات التقديرية للعينة التي تشمل جميع المعادلات الجزئية.

٢- مساهمة تأثير المتغيرات الوهمية في المتغير التابع تكون من خلال تأثيرها عـلى الحـد المطلـق للمعادلة المعنية.

٣- الإضافة الخطية للحدود الثابتة Linear Additivity يمثل شرط الموجية الخطية للحدود الثابتة.

١٢,٣ تقدير أثر مساهمة متغيرين وهميين:

سبق وأن أوضحنا تقدير تأثير متغير وصفي واحد على المتغير المعتمـد إضـافة إلى المتغـير الكمي. والآن سنتطرق إلى الحالة التي يكون فيها مساهمة تأثيرين هما دالة التعلـيم والـدين في نفس النموذج. ولتوضـيح ذلـك نفـترض بـأن أجـور العـمال قـد تتـأثر بعـدد السـاعات والحالـة التعليمية، والدين، ولنفترض بأنها تأخذ النموذج التالي:

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 + \beta_7 X_7 + \beta_8 X_8 + \beta_9 X_9 + U$$

حيث:

$Y$ = الدخل لمستلمي الأجر

$X_1$ = ذات قيمة مساوية للواحد دائما (يشير إلى الحد المطلق)

$X_2$ = عدد ساعات العمل.

$X_3$ = ١ متعلم، ٠ غير متعلم.

$X_4$ = ١ غير متعلم، ٠ متعلم

$X_5$ = ١ بروتستانت، ٠ غيره.

$X_6$ = ١ كاثوليك، ٠ غيره.

$X_7$ = ١ هندوس، ٠ غيره.

$X_8$ = ١ بوذي، ٠ غيره.

$X_9$ = ١مسلم، ٠ غيره.

لا يمكن تقدير النموذج أعلاه وذلك لوجود مشكلة Sinqularity. وأسهل طريقة للتخلص من ذلك، أن يتم جمع قيم العمود $X_4 + X_3$ مع العمود $X_1$ ونفس الشيء بالنسبة للأعمدة $x_9, x_8 + x_7 + x_6 + x_5$ تضاف إلى العمود $X_1$ وباتباعنا هذه الطريقة لحل المعادلة المذكورة أعلاه فإن معادلة التقدير ستتخذ الصورة الآتية.

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \lambda_1 X_3 + \delta_1 X_5 + \delta_2 X_6 + \delta_3 X_7 + \delta_3 X_7 + \delta_4 X_8 + U$$

والدالة يمكن كتابتها بالصورة التالية مع أخذ القيم المتوقعة للمتغير التابع.

$E(Y) = \beta_1 + \beta_2 x_2$ مسلم + غير متعلم

$E(Y) = (\beta_1 + \lambda_1) + \beta_2 x_2$ مسلم + متعلم

$E(Y) = (\beta_1 + \delta_1) + \beta_2 x_2$ بروتستانت + غير متعلم

$E(Y) = (\beta_1 + \lambda_1 + \delta_1) + \beta_2 x_2$ بروتستانت + متعلم

$E(Y) = (\beta_1 + \delta_2) + \beta_2 x_2$ كاثوليك + غير متعلم

$E(Y) = (\beta_1 + \lambda_1 + \delta_2) + \beta_2 x_2$ كاثوليك + متعلم

$E(Y) = (\beta_1 + \delta_3) + \beta_2 x_2$ هندوس + غير متعلم

$E(Y) = (\beta_1 + \lambda_1 + \delta_3) + \beta_2 x_2$ هندوس + متعلم

$E(Y) = (\beta_1 + \delta_4) + \beta_2 x_2$ بوذي + غير متعلم

$E(Y) = (\beta_1 + \lambda_1 + \delta_4) + \beta_2 x_2$ بوذي + متعلم

يلاحظ أن هذا التحليل يفترض الإيجابية لمعلمات المتغيرات الوهمية.

١٢،٤ مشاكل تقدير المتغير الوهمي:

تقدير تأثيرات المتغيرات الوصفية بالطريقة المذكورة أعلاه يصاحبه ظهور بعض المشاكل سنتطرف إلى أهمها كما يلي:

١٢،٤،١ ظهور مشكلة التداخل الخطي المتعدد:

قد لا تكون الحالة كما هي مذكورة في المثال السابق. ففي حالة وجود مستويين من التعليم (متعلم، غير متعلم) وصفتين من الجنس (ذكر، أنثى). والنموذج يتخذ الصيغة التالية:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \delta_4 x_4 + U$$

حيث أن $x_3, x_2, Y$ يشيران كما هو مذكور في المثال السابق وأن $x4 = 1$ ذكر.

=٠ خلافه.

| Sample | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 1 | $X_{12}$ | 1 | 1 |
| B | 1 | $X_{22}$ | 1 | 1 |
| C | 1 | $X_{32}$ | 0 | 0 |
| D | 1 | $X_{42}$ | 0 | 0 |
| E | 1 | $X_{52}$ | 1 | 1 |

يلاحظ العمود (٣) و (٤) غير متميزين (متشابهين). في هذه الحالة تؤدي إلى ظهور مشكلة الازدواج الخطي المتعدد التام (Perfect of Multicotinearity) بين حالة التعليم والجنس حيث أن جميع المتعلمين ذكور وجميع الغير المتدربين هم إناث. ففي هذه العينة لا يمكن إيجاد تقدير معلمات المتغيرات المستقلة ( $\lambda_4$ , $\delta_4$ )، وعليه فإنه في حالة استخدام المتغيرات الوهمية.على الباحثين أن يكونوا دقيقين في عد المتغيرات الوهمية المستخدمة في نموذج الانحدار وإلا فإنهم سوف يواجهون مشكلة التداخل الخطي المتعدد التام Perfect Multicollinearity وعندئذ فإن المصفوفة (x'x) ستكون Singular أي أن $/ D / = 0$

١٢،٤،٢ ظهور مشكلة عدم التجانس Hetero scedasticity:

عندما يكون المتغير المعتمد ($Y_i$) وصفيا (qualitative) والمتغيرات المستقلة كمية Quantitative فإن معالجة المتغير الوصفي تتم بالصورة المذكورة أدناه ولنفترض مثلا أن:

$$Y_i = \beta_o + \beta_1 x_i + U_i$$

حيث تشير ($X_i$) إلى الدخل بالدنانير.

وأن ($Y_i$) تشير إلى المتغير الوصفي = ١ إذا كانت (i) من العوائل تمتلك سيارة.

ويساوي ( ٠ ) إذا كانت (i) من العوائل لا تمتلك سيارة فالمعادلة أعلاه تحاول أن تشرح تأثير ملكية السيارة ($X_i$) لها قيمتان فقط هما الواحد والصفر (0.1) إذا كانت:

$$U_i = Y_i - \beta_o - \beta_1 x_i$$

فالحد العشوائي أيضا له قيمتان هما:

$$Ui = 1 - \beta o - \beta 1x1$$

أو:

$$Ui = 0 - \beta o - \beta 1xi$$

وهذا يعني أن $U_i$ ليست موزعة توزيعا طبيعيا وأن تباين $e_i$ هو:

$$E(U_i)^2 = (-\beta_o - \beta_1 x_i)^2 (1 - \beta_2 - \beta_1 x_i) + ( 1 - \beta_o - \beta_1 x_i)^2$$

$$(\beta_o + \beta_1 x_i)$$

$$= (\beta_o + \beta_1 X_i) (1 - \beta_o - \beta_1 x_i)$$

$$E (U_i)^2 = E(Y_i) (1 - E(Y_i))$$

ومن هنا نستنتج بان Ui غير متجانسة Hetero - scedastic لأن تباينها يعتمد على $E (Y_i)$ وهذا يعني أن $U_i$ هي غير متجانسة، هذا ما أوضحه كولد بركر بان تباين حد الاضطراب غير ثابت، ويمكن أن يتغير من مشاهدة إلى أخرى. وهذا يعني بأن تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي غير كفوءة، ولا يمكن الاعتماد على قيمة كل من $\beta_o$, $\beta_1$ كمقدرات للنموذج تحت الدراسة. وتصبح تطبيقات اختبارات المعنوية (Significant tests) للمقدرات غير منطقية.

١٢,٥ التوسع في استخدام عدد كبير من المتغيرات الوهمية:

في الوقت الحاضر لوحظ بأن محاولات تكميم المتغيرات غير الكمية (Nonquantifiable) أصبح نوعا من الصرعات أو الطراز الحديث. وقد اقترح البعض بأن التأكيد على مساهمة المتغيرات الوصفية غالبا ما يعطي نتائج مضللة، ويطلق عليها أحيانا بالمتغيرات المزعجة (Nuisance Variables)، وهذا يتضمن ما معناه أنها تخلق مشاكل أكثر مما تعطيه من معلومات. والمثال على ذلك. لو تم أخذ دالة الاستهلاك لبيانات المقطع العرضي في الدول الرأسمالية فإن الاستهلاك إلى $J^{th}$ من العوائل ($C_j$) يمكن أن يعتمد على دخول العوائل ($Y_i$) وعلى الأصول العرقية $Z_{2j}$ (race)، والمعتقدات الدينية $Z_{3j}$ (religion) والثقافة $Z_{4j}$ (edcation) والحالة الزوجية $Z_{5j}$ (Martial / state)، وحجم العائلة

$Z_{6j}$(family size) وإلى آخره مـن العوامـل النوعيـة. وعليـه فـإن جميـع Z's تمثـل متغـيرات وهمية.

والذي يجب ملاحظته بـأن المقـترح المـذكور أعـلاه لا يعنـي بـان العوامـل الاقتصـادية - الاجتماعية ليست لها أهمية وإذا كان تأثير هذه المتغيرات عشوائيا فـإن كـلا مـنهما في المتوسـط سوف يلغي تأثير الآخر. وإذا كانت الاختبارات تعزز ذلك فإن الاقتصاد القيـاسي في حالـة حذفـه لهذه المتغيرات فإنها سوف لا تؤثر على المتغيرات الأساسية التـي تـؤثر عـلى المتغـير التـابع، وقـد أثبتت التجارب والدراسات بأن الدخل العائلي هو العنصر الأكثر حيوية ومعنويـة في تـأثيره عـلى سلوكية الاستهلاك في بيانات المقطع العرضي.

وهناك مقترح آخر جاءت به جين كروكيت Jean Crockett ويتمثل بما يلي:

$$C_{jt} = \beta_o + \beta_1 Y_{jt} + \beta_2 Z_{2jt} + \beta_3 Z_{3jt} + \dots \beta_k Z_{kjt} + U_t$$

$$C_{jt+1} = \beta_o + \beta_1 Y_{jt+1} + \beta_3 Z_{2jt+1} + \beta_3 Z_{3jt+1} + \dots \beta_k Z_{kjt+1} + U_{jt+1}$$

وبالطرح نحصل على:

$$C_j = \beta_1 \Delta Y_j + \beta_2 \Delta Z_{2j} + \beta_3 \Delta Z_{3j} + \dots \beta_k \Delta Z_{kj} + V_j$$

حيث:

$$V = U_{jt} - U_{jt+1}$$

وبموجب فرضية كون مسـاهمة كـل مـن المتغـيرات المـذكورة (العـرق والـدين والثقافـة، والحالة الزوجية وحجم العائلة) لم تتغير خلال الفترة الزمنية، إذن سوف نحصل على:

$$Z_{2j} = Z_{2jt+1} -- Z_{2jt}, Z_{3j} = Z_{3jt+1} -- Z_{3jt}, \dots,$$

$$ZK_j = Z_{kjt+1} -- Z_{kjt}'$$

وجميعها تساوي صفرا وعليه فإن معادلة هذا المقترح ستكون كما يلي:

$$\Delta C_j = \beta_1 \Delta Y_j + V_j$$

وفي الحقيقـة فـإن جميـع هـذه المتغـيرات ثابتـة بـدون تغـير. وإن مجموعـة المتغـيرات الوصفية طالما هي غير كمية، فإنه يمكن تجميعها على شكل مجموعتين من المتغـيرات بـدلا مـن عدد كبير من المتغيرات المصطنعة.

١٢,٦ التعديل الموسمي باستخدام المتغيرات الوهمية:

الاستخدام الأكثر أهميـة لأسـلوب ١-٠ في بيانـات المقطـع العـرضي هـو التعـديل الموسـمي Scasonal Ajustment، وبوجود فرضية الخطية والإيجابية Linearity and Additivity

للمتغيرات المصطنعة، فإن طريقة التعديل الموسمي ستكون أكثر دقة من الطريقة التقليدية السابقة.

الجدول المذكور أدناه يعطي حالة عن استخدام البيانات الموسمية:

إذا كانت المشاهدة في الفصل الأول $Q_1 = 1$

خلافه $= 0$

إذا كانت المشاهدة في الفصل الثاني $Q_2 = 1$

خلافه = ٠

إذا كانت المشاهدة في الفصل الثالث $Q_3 = 1$

خلافه = ٠

إذا كانت المشاهدة في الفصل الرابع $Q_4 = 1$

خلافه = ٠

| $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ | $Q_4$ |
|---|---|---|---|
| ١ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٠ | ١ | ٠ | ٠ |
| ٠ | ٠ | ١ | ٠ |
| ٠ | ٠ | ٠ | ١ |

وبأخذ النموذج التالي:

$$P_t = a_o + x_1S_t + \beta_1Q_{2t} + \beta_3Q_{3t} + \beta_4G_{4t} + U_t$$

ولنفس الأسباب المذكورة سابقا فإن المعادلة التقديرية ستتخذ الصورة التالية:

$$P_t = a_o + x_1S_t + \beta_1Q_{1t} + \beta_2Q_{2t} + \beta_3G_{3t} + U_t$$

والقيم المتوقعة للمتغير التابع (t) تأخذ الصورة التالية:

$$\text{For } Q_1,\ E(P_t) = (a + \beta_1) + x_1S_t$$

$$\text{For } Q_2,\ E(P_t) = (a + \beta_2) + x_1S_t$$

$$\text{For } Q_3,\ E(P_t) = (a + \beta_3) + x_1S_t$$

$$\text{For } Q_4,\ E(P_t) = (a\ S_t)$$

وأن الميل $a_1 = \frac{\delta P}{\delta S}$ ثابت

١٢,٧ اختبار المتغير الوهمي Dummy Variables Test:

لقد تعرض دامودار كإجراتي لاختبار المتغير الوصفية باستخدام بيانات السلسلة الزمنية، كما تعرض لمعادلة انحدار واحدة تقدر العينة جميعها باستخدام المتغيرات الوصفية لكل من الحد الثابت (Intercept) والميل (Slope)، وقد أخذ النموذج التالي:

$$Y_1 = \beta_o + \beta_1D + \beta_2x_1 + \beta_3(D_x)_t + U_t \qquad t = 1,2,3 \ldots T$$

حيث:

D = 1 إذا كانت المشاهدة تابعة للجزء الثاني من العينة.

D = 0 إذا كانت المشاهدة تابعة للجزء الأول من العينة.

وقد حصل على التقديرات التالية:

$$Y_t = -0.2663 - 1.4839D + 0.0470X_t + 0.1034\ (D_x)_t$$

S.E (0.3333) (0.4703) (0.0290) (0.0332)

تشير (SE) إلى الخطأ المعياري (Standard Error).

ويلاحظ بان الحد الثابت، ومعلمة الميل معنوية إحصائيا بمستوي ٩٥% وعليه وبالاستعانة بما ذكره سابقا، فإن هذه النتائج يمكن ترجمتها كما يلي لفترة العينة $T_2$ فإن:

$$E\ (Y_t) = (-0.2663 - 1.1839) + 0.0470 + 0.139)X_t$$

$$= -1.7502 + 0.1504X_t$$

نحصل على $T_1$ولفترة العينة

$$E\ (Y_t) = -0.2663 + 0.0470X_t$$

ويلاحظ بأن نتائج معادلتي انحدار العوامل المستقلة للفترتين تتفق مع النتائج أعلاه، ولتحليل النتائج التي تم الحصول عليها، لقد لوحظ بأن تقديرات كل من الحد الثابت ومعلمات الميل تختلف معنويا عن تقديرات الفترتين، وعليه فإن استخدام المتغيرات الوصفية توفر اختبارا ذو تقدير سهل وواضح، حيث بدلا من تقدير ثلاثة معادلات تقدر معادلة واحدة.

## ١٢,٨ تطبيقات وتمارين:

### ١٢,٨,١ التطبيقات:

التطبيق الأول:

الجدول التالي يوضح الاستثمار المحلي (Y)، والناتج القومي الإجمالي (X) ببلاين الدنانير في الاقتصاد العراقي خلال الفترة ١٩٧٩ - ١٩٩٤. قدر أثر المتغير الوهمي (الحرب والسلم) في إجمالي الاستثمار المحلي؟

| Year | $Y_i$ | $X_i$ | (الحرب والسلم) |
|---|---|---|---|
| 1979 | 9.3 | 90.8 | 0 |
| 1980 | 13.1 | 100.0 | 0 |
| 1981 | 17.9 | 124.9 | 0 |
| 1982 | 9.9 | 158.3 | 1 |
| 1983 | 5.8 | 192.0 | 1 |
| 1984 | 7.2 | 210.5 | 1 |
| 1985 | 10.6 | 212.3 | 1 |
| 1986 | 30.7 | 209.3 | 1 |
| 1987 | 34.0 | 232.8 | 0 |
| 1988 | 45.9 | 259.1 | 0 |
| 1989 | 35.3 | 258.0 | 0 |
| 1990 | 53.8 | 286.2 | 0 |
| 1991 | 59.2 | 330.2 | 0 |
| 1992 | 52.1 | 347.2 | 0 |
| 1993 | 53.3 | 366.1 | 0 |
| 1994 | 52.7 | ٣٦٦,٣ | 0 |

الحل:

١- نكون عمودا إضافيا في الجدول أعلاه يمثل عنصر المتغير الوهمي حيث تشير: $D = 1$ إلى سنوات الحرب وهي تبدأ مثلا من ١٩٨٢ - ١٩٨٥. و $D = 0$ إلى سنوات السلم كما هي موضحة أعلاه.

٢- نستخرج المعادلة التقديرية لإجمالي الاستثمار المحلي، وهي كالآتي:

$$\hat{Y} = -2.58 - 0.16X - 20.81D$$

$$(10.79) \quad (-6.82) \qquad R^2 = 0.94$$

٣- نجري عملية الاختبار والتي منها نجد بان المتغير (D) إحصائيا معنوي بمستوى ٥% حيث أن $\hat{\beta}_o = -2.58$ تعود لزمن السلم. و (-٢٣,٣٩) تعود لزمن الحرب (وهذه تم الحصول عليها من إضافة قيمة المقطع إلى معلمة المتغير الوهمي). أما $\hat{\beta}_2 = 0.16$ فهي معلمة ميل المنتمى.

التطبيق الثاني:

الجدول الآتي يعطي الإنفاق الاستهلاكي (C). والدخل القابل للتصرف (Yd)، ونوع جنس (Sex) رب العائلة، لعينة حجمها (١٢). المطلوب:

أ. إيجاد انحدار (C) على ($Y^d$)، (ب) اختبار اختلاف حد المقطع للعوائل التي يكون رب الأسرة فيها اثنى أوذكرا، (حـ) اختبار اختلاف الميل (MPC) للعوامل التي يكون رب

العائلة فيها أنثى أو ذكر (د) اختبار اختلاف حد المقطع والميل. (هـ) ما هي برأيك أفضل نتيجة؟

| عدد العوائل | الاستهلاك C | الدخل القابل للتصرف $(Y_d)$ | المتغير الوهمي S |
|---|---|---|---|
| ١ | 18.54 | 22.55 | M (0) |
| 2 | 11.35 | ١٤,٠٤ | M (0) |
| 3 | 12.13 | 13.04 | F (1) |
| 4 | 15.21 | 17.50 | M (0) |
| 5 | 8.68 | 9.43 | F (1) |
| 6 | 16.76 | 20.64 | M (0) |
| 7 | 13.48 | 16.47 | M (0) |
| 8 | 9.68 | 10.72 | F(1) |
| 9 | 17.84 | 22.35 | M (0) |
| 10 | 11.18 | 12.20 | F (1) |
| 11 | 14.32 | 16.81 | F (1) |
| 12 | 19.86 | 23.00 | M (0) |

حيث يرمز للجنس كما يلي:

ذكر Male (M) = 1

أنثى Female (F) = 0

الحل:

أ- $\hat{C} = 1.663.6 + 0.75Y^d$

$R_2 = 0.978$

ب- نرمز للمتغير الوهمي D = 1 للعوائل التي رب العائلة فيها أنثى، و D = 0 للعوائل التي رب العائلة فيها ذكر وهذا واضح في عمود المتغير الوهمي في الجدول المذكور أعلاه، والمعادلة التي تشير إلى تقدير المتغير الوهمي للجنس كما يلي:

$$\hat{C} = 186.12 + 0.85Y^d + 832.09$$

جـ- (16.56) (1.82).$R^2 = 0.984$

$$\hat{C} = 709.18 + 0.79Y^d + 0.05Y^dD$$

د- $\hat{C} = -184.70 + 0.83Y^d + 1.757.99D - 0.06Y^dD$

(13.65) (1.03) (-0.57) $R^2 = 0.985$

هـ- يلاحظ من جميع التقديرات أن (D) و (DYd) غير معنويين إحصائيا بمستوى من المعنوية قدره 5% في المعادلات (ب)، (جـ)، (د)، ولا يوجد اختلاف في نسق

الاستهلاك لأرباب العوائل من جنس الذكر أو الإناث. وعليه فإن أفضل تقدير كان التقدير المذكور في الفقرة (أ).

انظر إلى التطبيقين الثالث والرابع .

التطبيق الثالث:

بافتراض توفر البيانات أدناه عن استهلاك الحنطة لمدة ست سنوات حيث كانت السنوات الثلاث الأولى منها سنوات حرب في السنوات الثلاث الأخيرة هي سنوات سلم.

المطلوب: تقدير معلمات النموذج الخطي البسيط للاستهلاك؟

الحل:

| المتغير الوهمي $X_2$ | الإنتاج $X_1$ | الاستهلاك C | السنوات | |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ١٠ | ٧ | ١ | سنوات الحرب |
| ٠ | ١٢ | ٨ | ٢ | |
| ٠ | ١٤ | ١٠ | ٣ | |
| ١ | ١٧ | ١٣ | ٤ | سنوات السلم |
| ١ | ٢٠ | ١٥ | ٥ | |
| ١ | ٢٣ | ١٩ | ٦ | |

أن النموذج المطلوب تقدير معلماته هو:

$$C_t = a + b_1 X1i + b_2 X_{2i}$$

وحيث أن:

$$X2_i \begin{cases} 0 & \text{تمثل سنوات الحرب} \\ 1 & \text{تمثل سنوات السلم} \end{cases}$$

وعليه فإن: $\hat{\beta} = (x'x)^{-1} x'y$

وتمثل x مصفوفة بيانات المتغيرات المستقلة وهي:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 1 & 17 & 1 \\ 1 & 20 & 1 \\ 1 & 23 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_t = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 13 \\ 15 \\ 19 \end{bmatrix}$$

وبحل منظومة المعادلة $\hat{\beta}$ نحصل على:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b1 \\ b2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.7 \\ 0.92 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن نموذج الاستهلاك التقديري هو:

$C_t = -2.7 + 0.92X_1 - 0.05X_2$

وبالتالي فإن نموذج الاستهلاك خلال فترة الحرب والسلام تكون كالآتي:

زمن الحرب حيث $X = 0$ $\quad \hat{C}_t = -2.7 + 0.92 \times 1 \quad \rightarrow$

زمن السلم $\quad \hat{C}_t = -(-2.7 + 0.05) + 0.9X$

حيث أن $X = 1$

التطبيق الرابع:

الجدول الأتي يعطي إجمالي الاستثمار المحلي ($Y_t$) والناتج القومي الإجمالي ($X_t$) بملايين الدنانير وابتداء من سنة ١٩٣٩ - ١٩٥٤

المطلوب أجراء انحدار Y/X.

اختبر التقديرات مستوى ٠,٠٥ وأوضح فيما إذا كان استعمال $D = 1$ لسنوات الحرب و $D = 0$ للسنوات الأخرى معنويا إحصائيا أم لا؟

| السنوات | $Y_t$ | $X_t$ | D |
|---|---|---|---|
| 1939 | ٩,٣ | 90.8 | 1 |
| 1940 | 13.1 | 100.0 | 1 |
| 1941 | 17.9 | 124.9 | 1 |
| 1942 | 9.9 | 158.3 | 1 |
| 1943 | 5.8 | 192.0 | 1 |
| 1944 | 7.2 | 210.5 | 1 |
| 1945 | 10.6 | 212.3 | 0 |
| 1946 | 30.7 | 209.3 | 0 |
| ١٩٤٧ | 34.0 | 232.8 | 0 |
| 1948 | 45.9 | 259.1 | 0 |
| 1949 | 35.3 | 258.0 | 0 |
| 1950 | 53.8 | 296.0 | 0 |
| 1951 | 59.2 | 330.2 | 0 |
| 1952 | 52.1 | 247.2 | 0 |
| 1953 | 53.3 | 347.2 | 0 |
| 1954 | 52.7 | 366.3 | 0 |

الحل:

$$\because \hat{\beta} = (X'X)^{-1} - X'y = \begin{bmatrix} a \\ b1 \\ b2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} n & \sum x & \sum D \\ \sum X & \sum x^2 & \sum XD \\ \sum D & \sum XD & \sum D^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum D^2 \end{bmatrix}$$

أيضا نحتاج إلى إيجاد قيمة $(X'X)^{-1}$ وهذا يتطلب اتباع جميع الخطوات التي سبق شرحها في الفصول السابقة لإيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$.

ولقد تم إيجاد قيمة معلمات المعادلة التقديرية كالآتي:

$$\hat{Y}_t = -2.58 + 0.16 \times -20.8D$$

$$\hat{t}: \quad (10.79) \quad (-6.82)$$

$$t: 2.16$$

$$R^2 = 0.94$$

ولاختبار فرضي العدم $Ho : B_2 = 0$

والتبديل $H_1: B \neq 0$ :

ومن مقارنة $\hat{t}$ مع t الجدولية لمستوى معنوية ٠,٠٥ ولدرجات حرية $13 = n - k$ ولكون أن $\hat{t}$ أكبر من t الجدولية فإن هذا يعني أن المتغير الوهمي D معنوي إحصائيا عند مستوى معنوية قدره ٠,٠٥.

يلاحظ أن القيمة المطلقة (حد القطع) تتساوى في سنوا الحرب هي $D = 0$

$$\therefore \hat{Y}_t = -2.58 + 0.16X$$

بينما قيمة (a) في سنوات السلم هي $D = 1$ وهذا يعني أن:

$$a = a - b_2$$

$$= 2.58 - 20.8 = -23.38$$

بينما تبقى (b1) تتساوى قيمة ثابتة هي ٠,١٦ هو الميل المشترك.

١٢,٨,٢ تمارين:

١- ناقش ما يلي:

أ- مفهوم المتغير الوهمي ودوره في تقدير النماذج القياسية.

ب- مفهوم جداول تحليل التباين المشترك.

جـ- مقترح جين كريكت لمعالجة مشاكل نماذج المتغيرات الوهمية.

د- مصيدة المتغير الوهمي Dammy Variable Trap.

و- التعديل الموسمي باستخدام المتغير الوهمي.

هـ- اختبار Chow.

٢- من نموذج دالة الاستهلاك التالية:

$$C_t = \beta_o + \beta_1 Y_t + \beta_2 W_t + \beta_3 W_t Y_t + U_t$$

حيث (c) تشير إلى الاستهلاك. (y) تشير إلى الدخل، (w = 1) تشير إلى زمن الحرب، (W = 0) تشير إلى زمن السلم، (u) تشير إلى الخطأ العشوائي.

أ- قارن بين دالة الاستهلاك في زمن الحرب ودالة الاستهلاك في زمن السلم.

ب- وضح أن تقديرات المربعات الصغرى لمعلمات الانحدار التي تم الحصول عليها تعطي نموذجين منفصلين من ($C_t$) على ($Y_t$)، واحدة مقدرة من بيانات فترة الحرب، والثانية مقدرة من بيانات فترة السلم.

٣- نفترض أن النموذج الذي يقدر رواتب أساتذة الجامعة يأخذ الصورة الآتية:

$$Y_t = a_o + a_1 D_{1i} + a_2 D_{2i} + a_3 (D_{1i} + D_{2i}) + \beta X_i + U_i$$

حيث:

| | |
|---|---|
| ($Y_i$) | تشير إلى الراتب السنوي لمدرسي الجامعة. |
| ($X_i$) | تشير إلى مدة الخدمة الجامعية |
| ($1 = D_1$) | إذا كان المدرس أنثى و ($0 = D_1$) إذا كان ذكرا. |
| ($1 = D_2$) | إذا كان المدرس متزوج و ($0 = D_2$) إذا كان عازب. |
| ($D_2 + D_1$) | يشير هذا الحد إلى التأثير المتداخل (Interaction effect) |

المطلوب:

١- ماذا يعني الحد ($D_2 + D_1$) وما هو تفسيرك الاقتصادي للمصطلح Interaction effect؟

٢- ماذا تعني المعلمة ($a_3$)؟

٣- أوجد $E(Y_i / D_1 = 1, D_2 = 1, X_i)$ واشرح معنى ذلك.

# الفصل الثالث عشر

# التحيز الآني ونماذج المعادلات الآنية

Simultaneous - Equations Models

# الفصل الثالث عشر

# التحيز الأني ونماذج المعادلات الآنية

## Simultaneous - Equations Models

ناقشت الفصول السابقة تقدير معالم النماذج ذات المعادلة المنفردة Single - equation Models التي تفسر العلاقات الاقتصادية المتضمنة لمتغير واحد هو ($y_i$) يعتمد في سلوكيته على متغير مستقلا واحد أو أكثر ($X's$) ويأخذ شكل الدالة الخطية وتبنى تلك النماذج على توفر فرضية العلاقة بين السبب cause والتأثير effect، أي أن المتغيرات المستقلة تمثل السبب والمتغير التابع يمثل التأثير. وعلى كل حال فإنه قد توجد حالات يكون جريان التأثيرات ذي طريقين بين المتغيرات الاقتصادية حيث تؤثر المتغيرات المستقلة في المتغيرات التابعة وعلى العكس قد يحدث، وهذا يعني أن متغيرا اقتصاديا قد يتأثر بمتغير أو متغيرات اقتصادية أخرى وبنفس الوقت قد يتأثر بنفسه أيضا. ولو أخذنا مثلا انحدار الطلب على النقود ($M_d$) كدالة لسعر الفائدة ($R$) فبموجب نموذج المعادلة المنفردة يفترض أن يكون سعر الفائدة ثابتا، ولكن ماذا يحدث لو كان سعر الفائدة ($R$) دالة للطلب على النقود ($M_d$)؟ على هذا الأساس نحتاج إلى معادلتين، الأولى تمثل اعتماد الطلب على النقود كدالة في سعر الفائدة؛ والثانية تمثل اعتماد سعر الفائدة كدالة في الطلب على النقود. أي أن ($M_d$) تعتمد على ($R$) وأن $R$ تعتمد على ($M_d$) وهذا يعني إننا نحتاج إلى معادلتين، وهذا يقودنا إلى اعتماد أسلوب جديد في التقدير هو استخدام نماذج المعادلات الآنية Simultaneous Equation Models، وهي النماذج التي تعالج أكثر من معادلة انحدار واحدة. متضمنة العلاقة المتداخلة بين المتغيرات قيد الدراسة.

سنقتصر في هذا الفصل على معالجة طبيعة نماذج المعادلات الآنية وبعض المشاكل الإحصائية المتعلقة بها

١٣,١ طبيعة نماذج المعادلات الآنية:

إن وجود نماذج المعادلات الآنية يسبب عدم اتساق مقدرات المعالم والتحيز في تقدير معلمات النموذج إذا تم استخدام الطريقة (OLS) في التقديرات ولذا لابد من الحصول على مقدرات متسقة غير متحيزة. لكي يكون تفسيرها للظواهر الاقتصادية صحيحا، إن أبسط صيغة لنماذج المعادلات الآنية هي نماذج المعادلتين الآنيتين Two - equations Model والمثال التقليدي المستخدم من الاقتصاد هو نموذج العرض والطلب. وهناك نماذج أكثر تعقيدا. منها النماذج القطاعية ونماذج الدخل القومي (راجع الفصل الثاني وكذلك الملحق الإحصائي - المصفوفات).

في جميع هذه النماذج توجد معادلتان أو أكثر وكل واحدة تحتوي على متغير معتمد أو داخلي، وأن تقدير هذا المتغير في كل معادلة يعتمد على بقية المعادلات. فلو أخذنا المعادلتين التاليتين:

$$y_{1i} = \beta_{1o} + \beta_{12}y_{2i} + X_{1i} + U_{1i} \quad \dots (1)$$

$$y_{2i} = \beta_{2o} + \beta_{21}y_{1i} + X_{1i} + U_{2i} \quad \dots (2)$$

ففي حساب مقدرات معلمات النموذج أعلاه بتطبيق (OLS) على كل معادلة منفردة وليس على النموذج ككل نحصل على معلمات غير متسقة ومتحيزة والسبب يعود إلى عدم تطبيق أساسية من فرضيات (OLS) وهي استقلالية المتغيرات التوضيحية عن المتغيرات العشوائية $U_i$. حيث نجد في المثال أعلاه بأن $(y_1)$و $(y_2)$ هما متغيرات التابعة (الداخلية وأن $(x_1)$ هو المتغير المستقل (الخارجي) وأن $(U_1)$ و $(U_2)$ يمثلان حدود الاضطراب ففي هذه الحالة ما لم يثبت كون $(y_2)$ و $(y_1)$ مستقلين عن $(U_2)$ و $(U_1)$ على التوالي فإنه لا يمكن الحصول على تقديرات لمعلمات النموذج تتميز بالاتساق وعدم التحيز.

ولتوضح هذه الفكرة نأخذ بعض التطبيقات من النظرية الاقتصادية[1]وبعدها سوف نعرض الطريقة الرياضية لأسلوب نماذج المعادلات الآنية:

---

لمزيد من الإطلاع راجع:

(1) D. Gugarati: Basic Econometrics op.cit.pp.335 - 348.

(٢) الدكتور عادل عبد الغني محبوب، مرجع سابق. الفصل الحادي عشر.

١٣,٢ التطبيق الأول: نموذج العرض والطلب:

Demand and Supply Model :

في حالة التوازن يتحدد سعر السلعة (p) والكمية المطلوبة (Q) من خلال تقاطع كل من منحنى العرض والطلب. وللسهولة نفترض أن العلاقة بين المتغيرات علاقة خطية ولذا فإن الدالتين تأخذان الصورتين التاليتين:

حيث $\alpha_1 > 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Demand function } Q_t^d = \alpha_o + \alpha_1 P_1 + U_{1t} \\ \text{Supply function } Q_t^s = \beta_o + \beta_1 P_t + U_{2t} \\ \text{Equilibrium Identity } Q_t^d = Q_t^s\end{array}\right\} \quad ...(٣) \quad \beta < 0 \text{ وحيث}$$

حيث تتمثل معلمات النموذج في ($a^s$) و ($\beta^s$). ومن أساسيات النظرية الاقتصادية أنه في حالة كون ($x_1$) سالبة فإن منحنى الطلب ينحدر إلى الأسفل، وإذا كانت $\beta_1$ موجبة فإن منحنى العرض يتجه إلى الأعلى.

من هذا النموذج الآني نجد بان التغيرات التي تحدث في $U_{1t}$ (بسبب عوامل خارج النموذج مثل الدخل والثروة والذوق) والتي تؤثر على ( $Q_t^d$ ) وتحول منحنى الطلب إلى الأعلى إذا كانت ($U_{1t}$) موجبة إلى الأسفل إذا كانت ($U_{1t}$) سالبة.

وكما هو معروف بأن كلا من (p) و (Q) تتأثر عند انتقال منحنى الطلب وبالمقابل فإن ($U_{2t}$) تتغير بسبب المناخ، الاستيرادات وغيرها وتؤثر على منحنى العرض وبالتالي يتأثر كل من السعر والكمية.

من هذا المثال نجد أن هناك حالة اعتمادية تداخلية بين (P) و (Q) من جهة وبين ($U_{2t}$) و ($P_t$) من جهة أخرى، وبين ($U_{1t}$) و ($P_1$) من ناحية أخرى مما تجعل فرضية الاستقلالية لطريقة (OLS) غير متحققة أي غير متسقة ومتحيزة (أي غياب فرضية عدم وجود ارتباط بين المتغيرات المستقلة وحد الاضطراب).

١٣,٣ التطبيق الثاني: النموذج الكنيزي في تحديد الدخل:

Keynesian Model of income determination :

لنأخذ الصيغة البسيطة لنموذج كينز حيث نجد أن:

دالة الاستهلاك Consumption function هي:

$$C_t = \beta_o + \beta_1 Y_t + U_t \ldots \quad \ldots (4)$$

الدالة التطابقية للدخل

$Y_t = C_t + I_t$

وأن $I_t = S_t$

حيث: $S_t$ = الإدخال = $I_t$ = الاستثمار

$C_t$ = الاستهلاك ، $Y_t$ = الدخل

t = الزمن ، $U_t$ = الحد العشوائي

$\beta_1, \beta_0$ = معلمات النموذج

وكما أوضحنا في الفصل الثاني بان $\beta_1$ تدل على الميل الحدي للاستهلاك أي MPC وقيمتها تقع بين الصفر والواحد ويلاحظ من المعادلتين أعلاه بان هناك علاقة اعتمادية تداخلية بين (Y) و (C) وبين (Y) والحد العشوائي ($U_t$) كما في المعادلة (٤)، وان (Y) غير مستقلة عن ($U_t$) وأي توقع للتغير في $U_t$ بسبب عوامل خارجية كثيرة فإن دالة الاستهلاك ستتغير وبالتالي سيتبعها في التغير ($Y_t$).

من هذا نستنج مرة أخرى بان طريقة المربعات الصغرى التقليدية (OLS) لتقدير معلمات النموذج لا تعطي تقديرات متسقة.

١٣,٤ نموذج فيلبس في الأجور والأسعار Phillips Model:

لنفترض لدينا نموذج فيلبس الذي يربط الأجر النقدي والأسعار بالشكل التالي:

$$W_t = a_o + x_1 UN_t + x_2 P_t + U_{1t} \quad \dots (6)$$

$$P_t = \beta_o + \beta_1 W_t + \beta_2 R_t + \beta_3 M_t + U_{2t} \quad \dots (7)$$

حيث:

W تشير إلى معدل التغير في الأجور النقدية:

UN إلى معدل البطالة.

R إلى معدل تغير كلفة رأس المال.

M إلى معدل تغير سعر المواد الأولية المستوردة.

t إلى الزمن

$U_1, U_2$ إلى حدود الاضطراب

P إلى معدل تغير الأسعار.

من المعادلتين أعلاه نلاحظ بان المتغير (P) يدخل في معادلة الأجور وأن المتغير (W) يدخل في معادلة السعر، وكلا المتغيرين يعدان تابعين بصورة مشتركة (jointly dependent)،

وعليه فإن المتغيرين المستقلين يتوقع أن يكونا مرتبطين مع حدود الاضطراب وهنا أيضا تكون طريقة OLS غير مقبولة لتقدير معلمات المعادلات الآنية بصورة منفردة.

١٣,٥ نموذج والأرس للتوازن العام:

Walrasian Model of gemerel Equilibrium:

يهيئ هذا النموذج المثال التقليدي للعلاقة المتداخلة بين القطاعات الاقتصادية المختلفة. (وباستبعاد موقتا حدود الاضطراب مؤقتا ولتكن):

| | |
|---|---|
| كميات السلع المنتجة في الاقتصاد | $x_1, x_2 \dots , x_n$ |
| أسعار تلك السلع | $P_1, P_2 \dots, P_n$ |
| كميات الخدمات المنتجة (المستخدمات) | $Y_1, Y_2 \dots, Y_n$ |
| أسعار ومستخدمات الخدمات | $W_1, W_2 \dots, W_n$ |

يمكن شرح نموذج والرأس للتوازن العام كما يلي:

دول الطلب تتضمن:

**Demand Functions :**

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = F(P_1, P_2, \dots P_n, W_1, W_2, \dots W_n) \\ X_2 = F(P_1, P_2 \dots Pn, W_1, W_2, \dots W_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots) \\ X_3 = F(P_1, P_2, \dots P_n, W_2, \dots W_m) \end{array}\right\} \quad (8)$$

تتضمن المنظومة (٨) على (n) من المعادلات التي تصف سوق الطلب على (n) من السلع المعبر عنها بأسعارها وأسعار (m) من المستخدمات دوال العرض تمثلها المنظومة (٩) كما يلي:

**Supple Functions.:**

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = a_{1t} W_1 + a_{12} W_2 + \dots a_{1m} W_m \\ P_2 = a_{2t} W_1 + a_{22} W_2 + \dots a_{2m} W_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots) \\ P_n = a_n, + a_{n2} W_2 + \dots + a_{mm} W_m \end{array}\right\} \quad (9)$$

تمثل ($a_{ij}$) معلمات المنظومة (٩) وهي بنفس الوقت تعتبر معاملات الإنتاج. وتوضح كل دالة عرض على أن سعر وحدة xi مساوية إلى كلفة إنتاجها مضروبة في أسعارها.

إضافة إلى منظومـة دوال العـرض (٨) ودوال الطلـب (٩) هنـاك منظومـة دوال التـوازن:

Equilibrium Functions

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} X_1 + a_{21}X_2 +\dots a_{m1}X_n = Y_1 \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \dots a_{n2}X_n = Y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1m}X_1 + a_{2m}X_2 + \dots a_{nm}X_n = Y_m \end{array}\right\} \quad (10)$$

وعليه تتوفر لدينا شروط التوازن لسوق عوامل الإنتاج التي توضـح بـان إجـمالي الكميـة المطلوبة. يجب أن تساوي إجـمالي الكميـة المعروضـة. أذن توجـد ($m + n + n$ ) أو ($2n + m,$) مـن المعادلات لتحديد ($2n + m$) من المجاهيل في المنظومة، أي أنه يوجد:

n من الأسعار لـ (n) من السلع.

m من الأسعار لـ (m) من المستخدمات.

n من المعادلات لـ (n) من السلع.

الغرض الأساسي من عرض نموذج والرس هـو لإعطـاء صـورة عـن طبيعـة التـداخلات بـين السلع المنتجة والمستهلكة في الاقتصاد وأسعار تلك السلع حيث أن استهلاك اللحم مثلا لا يعتمد فقط على أسعاره، وإنما على أسعار لحم الدجاج وأسعار المنتجات الأخرى المنافسة.

### ١٣,٦ التطبيق الثالث: نموذج كليفن القياسي:

يتلخص نموذج كليفن القياسي بما يلي:

دالة الاستهلاك Consumption Function

$$C_t = \beta_o + \beta_1 P_t + \beta_2 (W + W')_t + \beta_3 P_{t-1} + U_{1t}$$

دالة الاستثمار Investment Function

$$I + \beta_4 + \beta_5 P_t + \beta_6 P_{t-1} + \beta_7 k_{t-1} + U_{2t}$$

دالة الطلب على العمل Demand for Labour Functions

$$W_t = \beta_s + \beta_9 (Y + T - W_{t-1}) + \beta_{11t} + U_{3t}$$

متطابقات Identities

وعليه فإن:

$$Y_t + T_t = C_t + I_t + I_t + G_t$$

$$Y_t = W_t^1 + W_t^{'} + P_t$$

$$K_t = K_{t-1} + I_t$$

حيث تشير C = الاستهلاك. I= الاستثمار، G = الانفاق الحكومي P= الربح.

W= الأجور في القطاع الخاص، W' = الأجور في القطاع العام، K = المخزون من رأس المال، T = الضرائب، Y = الدخل القابل للتصرف، t = الزمن، $u_1, u_2, u_3$ = الحد العشوائي يتضمن هذا النموذج على K, P, Y, W', I, C وهي متغيرات تابعة أو داخلية مشتركة، وعلى $Y_{t-1}, P_{t-1}, K_{t-1}$ وهي متغيرات محددة مسبقا وقيمتها معروفة من الفترة السابقة. وأن المعادلات الست أعلاه بما فيها المعادلات المتطابقة تدرس التداخلات بين المتغيرات الست الداخلية.

هناك عدة طرق لتقدير معلمات النماذج الآنية. ولكون متغيرات هذه النماذج متداخلة فإن تقديرها بواسطة OLS تكون متحيزة غير متسقة إذ ما تم تقديرها منفردة حيث تظهر مشكلة ما يسمى بالتحيز الآني.

١٣,٧ مشكلة التحيز الآني:

كما أوضحنا في الفصول السابقة بأن طريقة المربعات الصغرى لا تصلح لتقدير معلمات المعادلة المنفردة الواقعة ضمن منظومة من المعادلات الآنية لوجود متغير واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة مرتبطا مع الحد العشوائي الأمر. الذي يجعل هذه المتغيرات غير متسقة ومتحيزة. ولتوضيح ذلك نأخذ النموذج الكينزي البسيط لتحديد الأجور، ولنفترض لتقدير معلمات دالة الاستهلاك أن:

$$E(U_t) = 0$$

$$E(U_t^2) = \sigma_u^2$$

$$E(U_tU_s) \neq 0 \qquad (t \neq s)$$

$$Cov(I_t, U_t) = 0$$

وتمثل هذه فرضيات نموذج الانحدار الخطي البسيط، ولإثبات كون $(Y_t)$ مرتبطة بـ $(U_t)$ وأن $(\beta_1)$ تقديرا غير متسق للمعلمة $(\beta_1)$.

نبدأ بإثبات أن: $(Y_t)$ مرتبطة مع $(U_t)$ باتباع الخطوات التالية:

نعوض بالمعادلة (٤) في المعادلة(٥) نحصل على:

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 Y_t + U_t + I_t$$

وبالترتيب نحصل على:

$$Y_t - \beta_1 Y_t = \beta_o + I_t + U_t$$

$$Y_t ( 1 - \beta) = \beta_o + T_t + U_t$$

وبقسمة طرفي المعادلة على ($1- \beta_1$) نحصل على:

$$Y_t = \frac{\beta_o}{(1-\beta_1)} + \frac{1}{(1-\beta_1)} I_t + \frac{1}{(1-\beta_1)} U_t \quad ...(11)$$

وبأخذ القيمة المتوقعة نحصل على:

$$E(Y_t) = \frac{\beta_o}{(1-\beta_1)} + \frac{1}{(1-\beta_1)} I_t \quad ... (12)$$

وذلك لأن:

$E(U_t) = 0$ بموجب الفرضية المذكورة أعلاه.

وأن $I_t$ هو متغير خارجي (أي قيمته محددة مسبقا) ، أي $E(J_t) = I_t$ وبطـرح المعادلـة (١٢) من المعادلة (١١) نحصل على:

$$Y_t - E(Y_t) = \frac{U}{1-\beta_1}$$

$$U_t - E(U_t) = U_t$$

كذلك فإن:

$$U_t - E(U_t) = U_t$$

وحيث إن التباين المشترك (Covariance) بين ($Y_t$) و ($U_t$) هو:

$$Cov(U_t, Y_t) = E\{[Y_1 - E(Y_t)].[U_t - E(U_t)]\}$$

بما أن $E(U_t) = 0$ حسب الفرضية.

إذن:

$$Cov(U_t, Y_t) = E\{U_t[Y_t - E(Y_t)]\}$$

$$= E\left\{Ut\left[\frac{\beta_o}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{U_t}{1-\beta_1}\right] - \left[\frac{\beta_o}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t\right]\right\}$$

$$= E\left\{Ut\left[\frac{\beta_o}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{1}{1-\beta_1} U_t - \frac{\beta_o}{1-\beta_1} - \frac{1}{1-\beta_1} I_t\right]\right\}$$

إذن: $\text{Cov}(U_t, Y_t) = \frac{1}{1-\beta} . E(U^2)$

وبما أن: $\sigma_u^2$ $E(U^2)$ ، وأن $\sigma_u^2 \neq 0$

إذن: $\text{Con}(U_t , Y_t)\ \frac{1}{1-\beta_1}\ \sigma_u^2$

إذن: $\text{Cov}(U_t , U_t) = \frac{\sigma_u^2}{1-\beta_1} \neq 0$

من هنا نستنتج بان حد الاضطراب (المتغيرات العشوائية) في معادلة الاستهلاك مرتبطة وعليه فإن تطبيق طريقة (GLS) مباشرة إلى المعادلة (٤) تعطي تقديرات لكل من $\beta_o$, $\beta_1$ متحيزة، حيث أن بموجب فرضية (OLS) أن $(Y_t)$ غير مرتبطة مع $(U_t)$ أي أن المعلمات متحيزة لأن فرضية استقلالية المتغيرات المستقلة عن الحد العشوائي غير متحققة.

ولإثبات أن مقدر المربعات الصغرى $(\beta_1)$ غير متسق؛ بسبب وجود الارتباط بين $(Y_t)$ و ( $U_t$) نلاحظ ما يلي:

$$\beta = \frac{\sum (C_t - \overline{C})(Y_t - \overline{Y})}{\sum (Y_t - \overline{Y})^2}$$

وباستخدام طريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي فإن معامل الارتباط هو:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum C_t\, Y_t}{\sum Y_t^2} = \frac{\sum Y_t\, U_t}{\sum y_t^2}$$

وبتعويض ما يعادل قيمة $C_t$ من دالة الاستهلاك (٤) نحصل على:

$$\hat{\beta}_1\ \frac{(\beta_o + \beta_1 Y_1 + U_t)Y_t}{\sum y_1^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum Y_t\, U_t}{\sum y_t^2}$$

لأن $\sum y_t$ = صفر وان ١ = $(\sum Y_t y_t / \sum y_t^2)$

ويقال بأن المقدر متسق (consistent) إذا كانت غايته الاحتمالية (Probability Limit)واختصارا (Plim) تساوي قيمة ذلك المقدر الحقيقي في المجتمع الإحصائي.

ولبيان ذلك بالنسبة $(\beta_1)$ فإن قيمته هي:

$$(\hat{\beta_1}) = \beta_1 + \frac{\sum Y_t U_t}{\sum y_t^2}$$

وهـو مقـدر غـير متسـق $\beta_1$ ، والجـدير بالـذكر أن غايـة هـذا المقـدر لا تسـاوي القيمـة الحقيقية للمعلمـة فبتطبيـق قواعـد الغايـة الاحتماليـة Probability Limit عـلى المعادلـة المـذكورة نحصل على.

$$\text{Plim } (\hat{\beta}_1) = \text{Plim } (\beta_1) + \text{Plim } \left( \frac{\sum y_t U_t / n}{\sum Y_1^2 / n} \right)$$

وبقسمة كل من البسط والمقام في الحـد الثـاني للجانـب الأيمـن مـن المعادلـة عـلى عـدد المشاهدات (N) نحصل على:

إذن:

$$\text{Plim } (\hat{\beta_1}) = \beta_1 + \frac{P\lim\left(\sum Y_t U_t / n\right)}{P\lim\left(\sum y_t^2 / n\right)}$$

وفي هذه الصيغة فإن الكميات داخل القوسين تعبر عـن التبـاين المشـترك بـين ($Y_t$) و($U_t$) من جهة وتباين المتغير ($Y_t$) في الصيغة من جهة أخرى. وتعنـي الصـيغة الأخـيرة أيضـا أن الغايـة الاحتمالية للمقدار ( ($\hat{\beta_1}$) تساوي $\beta_1$ مضافا إليها نسبة الغايـة الاحتماليـة للتبـاين المشـترك بـين ($Y_t$) و ($U_t$) إلى الغاية الاحتمالية للمتغير ($y_1$) في العينة. وكلما كبر حجم العينـة (N) فـإن التبـاين المشترك المتوقع بين ($y_1$)، ($U_t$) يساوي التباين المشترك الحقيقي في المجتمع أي:

$$E\left[ Y_t - E(y_t) \right] \left[ U_t - E(U_t) \right]$$

وهذا يساوي المقدار:

وكما تم توضحيها سابقا.

$$\frac{\sigma_u^2}{(1-\beta_t)}$$

وبصورة مشابهة كلما يتجه حجم العينة (n) إلى مـالا نهايـة يكـون تبـاين المتغـير ($Y_t$) في العينة مساويا بصورة تقريبية لقيمة التباين الحقيقية في المجتمع. ولنرمـز لهـا $\sigma_Y^2$. وبـالتعويض في المعادلة (١٣) أعلاه نحصل على:

$$Plim\ (\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \frac{\sigma^2/(1-\beta_1)}{\sigma_Y^2}, < \beta_1$$

وبإعادة ترتيب المعادلة أعلاه كالآتي:

$$Plim\ (\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \frac{1}{1-\beta_1}\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_Y^2}\right) \quad \dots (14)$$

فإذ $0 < \beta < 1$ وأن كلا من $(\sigma^2)$، $(\sigma_Y^2)$ موجبة فهـذا يعنـي أن $Plim\ (\hat{\beta}_1)$ مـن المعادلـة (١٤) أكبر من $(\beta_1)$ الحقيقة وهذا يعنـي أن المقـدار $(\hat{\beta}_1)$ يفـوق (Overestimate) قيمـة المعلمـة $(\beta_1)$ الحقيقية وبهذا فإن $(\hat{\beta}_1)$ هـي تقـدير متحيـز وهـذا التحيـز لا يـتلاشى مهـما كـبر حجـم العينة(١).

ومن هـذا نخلـص إلى أن تقـدير معلـمات معـادلات الـنماذج الآنيـة بطريقـة المربعـات الصغرى قد تكون متحيزة وغير متسقة، وبهذا تتكون لدينا مشكلة هي مشكلة التحيز الآني التي تتطلب حلا. وهناك مشكلة أخرى متصلة بنماذج المعادلات الآنية هي مشـكلة التشـخيص التـي ستكون محورا للفصل القادم.

وقبـل البـدء بعـرض مشـكلة التشـخيص لابـد مـن إعطـاء الصـيغة العامـة general form للمعادلات الآنية لتوضيح المفاهيم الخاصة بالمتغيرات الداخلية Endogenous والخارجية Exogenous والصيغة المختزلة Reduced form.

١٣,٨ الصيغة العامة لنماذج المعادلات الآنية وعدم اتساق طريقة OLS:

لتعميم الصيغة السابقة لنماذج المعادلات الآنيـة لنفـترض لـدينا الهيكـل العـام لنمـوذج خطي متكون من (G) مـن المعـادلات الهيكليـة، وكـل معادلـة تحتـوي عـلى (G) مـن المتغـيرات الداخلية و (K) من المتغيرات المحددة مسبقا ومتغيرات الحد العشوائي الموزعـة توزيعـا طبيعيـا. وبكتابة المعادلات واحدة تلو الأخرى تتكون لدينا الصيغة الهيكليـة للنمـوذج العـام (GLM) كـما يلي:

$$\beta_{11} Y_{1i} + \beta_{12} Y_{2i} + \dots + \beta_{1G} Y_{Gi} + \beta_{11} X_{1i} + \beta_{12} X_{2i} + \dots Y_{1k} X_{ki} = U_{1i}$$
$$\beta_{21} Y_{1i} + \beta_{22} Y_{2i} + \dots + \beta_{2G} Y_{Gi} + \beta_{21} X_{1i} + \beta_{22} X_{21} + \dots + Y_{2k} X_k i = U_{2i}$$

… … … … .. … … … … … … … … … … … … … … … … … … … (15)

(١) الدكتور عادل عبد الغني محبوب: "الاقتصاد القياسي"، مرجع سابق. الفصل الحادي عشر.

$$\beta_{G1}Y_{1i} + \beta_{G2}Y_{2i} + \beta_{GG}Y_{Gi} + \beta_{G1}X_{1i} + \beta_{G2}X_{2i} + ... + = U_{Gi}$$

حيث:

$$i = 1, 2, 3, ............ (N)$$

وأن ($y_i$) و ($x_i$) تمثـل الانحرافـات عـن الأوسـاط الحسـابية ($\bar{y}, \bar{X}$)، وأن ($Y^s$) تشـير إلى المتغـيرات الداخليـة (انحـراف القـيم عـن أوسـاطها الحسـابية). وأن ($X^s$) تشـير إلى المتغـيرات المحددة مسبقا. ويمكن كتابة هذه المنظومة من المعـادلات عـلى شـكل مصـفوفة تأخـذ الصـيغة التالية:

$$\beta Y_t + TX_i = U_i \qquad ... (16)$$

حيث:

$$Y_i = \begin{bmatrix} Y_{1i} \\ Y_{2i} \\ \vdots \\ Y_{Gi} \end{bmatrix} \quad , Xi = \begin{bmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ \vdots \\ X_{ki} \end{bmatrix} \quad , Ui \begin{bmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ \vdots \\ U_{Gi} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{1i} & \beta_{12} & ... & \beta_{1G} \\ \beta_{2i} & \beta_{22} & ... & \beta_{2G} \\ \\ \beta_{Gi} & \beta_{G2} & ... & \beta_{GG} \end{bmatrix} , T \quad \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & ... & X_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & ... & X_{2k} \\ \\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & ... & X_{Gk} \end{bmatrix}$$

أما رتب هذه المنظومة من المصفوفات فهي:

متجه المتغيرات الداخلية $Y_i = G.1$

متجه المتغيرات المحدد مسبقا $X_i = K.1$

متجه حد الاضطراب $U_i = G.1$

مصفوفة معلمات المتغيرات الداخلية $\beta_i = G.G$

مصفوفة معلمات المتغيرات المحددة مسبقا $T_i = G.K$

أما إذا أدخلنا جميع المشاهدات المتوفرة لكـل مـن X, Y. وباسـتخدام المصـفوفات يمكـن إعادة كتابة نموذج منظومة المصفوفات (١٦) كما يلي:

$$\beta Y + TX = U \qquad ... (18)$$

حيث إن:

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1N} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & \beta_{2N} \\ \\ y_{Gi} & y_{G2} & \dots & y_{GN} \end{bmatrix}, X \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1N} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2N} \\ \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kN} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1N} \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2N} \\ \\ U_{G1} & U_{G2} & \dots & U_{GN} \end{bmatrix}$$

أما رتب هذه المنظومة العامة من المصفوفات فهي كالآتي:

مصفوفة المتغيرات الداخلية $Y = G.N$

مصفوفة المتغيرات المحدد مسبقا $X = K.N$

مصفوفة المتغيرات العشوائية $U = G.N$

تتضمن منظومة المعادلات الهيكلية (G) من المعادلات و (G) من المجاهيل، ولحل الصيغة المختزلة نفترض أن (β) هي المصفوفة غير أحادية وبضرب طرفي المنظومة (١٦) مسبقا بمصفوفة (β) نحصل على:

$$Y_1 + \beta^{1} Tx_i = \beta^{1} U_i \quad \dots [19]$$

أو اختصار يمكن كتابة الصيغة (١٩) كالآتي:

$$Y_1 + \pi xi + V_i$$

حيث أن المصفوفة (π) تشير إلى ($-\beta^{1}T$) وهي ذات رتبة (G.K) وتمثل معلمات الصيغة المختزلة، وهي عبارة عن:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1K} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2K} \\ \\ \pi_{G1} & \pi_{G2} & \dots & \pi_{GK} \end{bmatrix} \quad \dots [21]$$

وأن المصفوفة ($V_i$) تشير إلى:

$$V_t = \beta^{-1} U_i$$

وهي ذات رتبة (G.1) تمثل الحد العشوائي في الشكل المختزل للنموذج، وعلى هذا الأساس أذن الصيغة المختزلة لمعادلات النموذج تكون كالآتي:

$$\begin{bmatrix} y_{1i} = & \pi_{11}X_{1i} + & \pi_{12}X_{2i} + \dots & \pi_{1k}X_{ki} + & V_{1i} \\ y_{2i} = & \pi_{21}X_{1i} + & \pi_{22}X_{2i} + \dots & \pi_{2k}X_{ki} + & V_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{Gi} = & \pi_{G1}X_{1i} + & \pi_{G2}X_{2i} + \dots & \pi_{G5}X_{Ki} + & V_{Gi} \end{bmatrix} \quad \dots [22]$$

$$Y = \pi X + \pi \quad \dots [23]$$

وتشير إلى (N) من المعادلات حيث:

مصفوفة المتغيرات الداخلية $Y = G.N$

مصفوفة المعلمات $X = G.K$

مصفوفة المتغيرات المحددة مسبقا $X = K.N$

مصفوفة الحد العشوائي $V = G.N$

ومن هذه المنظومة نستنتج أن كل متغير داخلي مرتبط مع الحد العشوائي ولهذا فإن استخدام طريقة المربعات الصغرى لتقدير معلمات النموذج الاقتصادي تعطي مقدرات متحيزة. وعليه لحل مشكلة التحيز الآني والحصول على مقدرات متسقة غير متحيزة يتم استخدام إحدى الطرق التالية:

١- طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين. (2SLS).

Two stage Least Squares

٢- طريقة المعلومات المحدودة للمعادلات المنفردة أو (نسبة المربعات الصغرى).

Limited Information single equation or

Least Squares Ratio (LST)

٣- طريقة المربعات الصغرى ذات المراحل الثلاث (3SLS).

Three stage least squares

٤- طريقة المعلومات الكاملة للاحتمال الأعظم (FLML)

Full information Maximum Likelihood

وسنكتفي في هذا الكتاب بهذا القدر تاركين معالجة هذه الطرق إلى دراسات أكثر تعمقا وعلى مستوى الدراسات العليا.

١٣,٩ تطبيقات وتمارين:

١٣,٩,١ التطبيقات:

راجع تمارين وتطبيقات الفصل الثاني:

نفترض وجود نموذج اقتصادي كلي بسيط يتكون من معادلتين كالآتي:

$$M_t = a_0 + a_1 Y_t + U_{1t}$$

$$Y_t = b_o + b_1 M_t + b_2 I_t U_{2t}$$

المطلوب:

أ- حدد المتغيرات الداخلية (Endogenous) والخارجية (Exogenous) وما هي نتيجة التقدير بواسطة (OLS).

ب- أوجد الصيغة المختزلة؟

الحل:

أ- من النموذج أعلاه نجد أن: ($M_t$) تشير إلى عرض النقد خلال فترة زمنية (t)، والمتغير (Y)، (I)، يشيران إلى الدخل القومي والاستثمار على التوالي. وبما أن (M) تعتمد على (Y) في المعادلة الأولى. و (Y) تعتمد على (M) في المعادلة الثانية. إذن فإن كل من (M)، (Y) متغيرين معتمدين بعضهما على البعض الآخر (Jointly determined). ولهذا فإن النموذج أعلاه يعد نموذجا من نماذج المعادلات الآنية. حيث أن (M)، (Y) متغيرات داخلية، في حين (I) هو متغير خارجي، والذي تتحدد قيمته خارج النموذج. وعليه فإن التغير (Change) في ($U_{1t}$) يؤثر على (M) في المعادلة الأولى، في حين أنه يؤثر على (Y) في المعادلة الثانية. وكنتيجة لذلك فإن ($Y_t$)، ($U_t$) مرتبطان وهذا يؤدي إلى أن التقدير بموجب (OLS) متميز وغير متسق لكل من معادلة (M) ومعادلة (Y).

ب- معادلة الصيغة المختزلة الأولى يمكن الحصول عليها من تعويض المعادلة الثانية في الأولى وبعد التعديل نحصل على:

$$M_t = a_o + a_1 (b_o + b_1 M_t + b_2 I_t + U_{2t}) + U_{1t}$$

$$M_t = \frac{a_o + a_1 b_o}{1 - a_1 b_1} + \frac{a_1 b_2}{1 - a_1 b_1} I_t + \frac{U_{1t} + a_1 u_{2t}}{1 - a_1 b_1}$$

$$M_t = \pi_o + \pi_1 I_t + U_{1t}$$

أما معادلة الصيغة المختزلة الثانية فيمكن الحصول عليها من تعويض المعادلة الأولى من المعادلة الثانية وبعد التعديل نحصل على:

أو:

$$Y_t = b_o + b_1 (a_o + a_1Y_t + U_{1t}) + b_{2I} + U_{2t}$$

$$Y_t = \frac{a_o + a_1 b_o}{1 - a_1 b_1} + \frac{b_2}{1 - a_1 b_1} I_t + \frac{b_1 u_{1t} + u_{2t}}{1 - a_1 b_1}$$

$$Y_t = \pi_2 + \pi_3 I_t + G_t$$

١٣,٩,٢ تمارين:

١- اشتق النموذج المختزل المناظر للنموذج الهيكلي التالي:

$$C_t = a_{to} + a_t Y_t + U_1$$

$$I_t = b_o + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + U_{2t}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث المتغيرات الداخلية هـي ($Y_t, I_t, C'_t$) أي الاسـتهلاك. الاسـتثمار والـدخل عـلى التـوالي. والمتغيرات المسبقة التحديد هي $Y_{t-1}, G_t$ أي الإنفاق الحكومي والدخل المتخلف زمنيا.

أشرح معنى المعلمات الهيكلية ومعلمات النموذج المختـزل، ووضـع العلاقـة بـين هـذين النوعين من المعلمات.

٢- ما نوع مفهومك لنماذج المعادلات الخطية، وما هـو اختلافهـا عـن الـنماذج الخطيـة، وأيهـما أفضل في عرض المشاكل الاقتصادية، ولماذا؟

٣- ناقش بالتفصيل المقصود بمشكلة التحيز الآتي، وما هو طريق التخلص من التحيز؟

٤- أشتق رياضيا الصيغة العامة لنماذج المعادلات الآنية، مع تطبيق مثال رقمي.

٥- ما هو مفهومك للصيغة المختزلة، وهل يمكن إيجادها دائما للنماذج التي تتكون من معادلات متعددة؟

٦- الاقتصادي G.Menges كون نموذجا قياسيا للاقتصاد الألماني كما يلي:

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 I_t + U_{1t}$$

$$I_t = \beta_3 + \beta_4 Y_t + \beta_5 Q_t + U_{2t}$$

$$C_t = \beta_6 + \beta_7 Y_t + \beta_8 C_{t-1} + \beta_9 P_1 + U_{3t}$$

$$Q_t = \beta_{10} + \beta_{11} Q_{t-1} + \beta_{12} R_t + U_{4t}$$

حيث:

الدخل القومي. (I) صافي رأس المال (C) الاستهلاك (Q) الأرباح، (P) الرقم

القياسي التكاليف المعيشة (R) الإنتاجية الصناعية (t) الزمن، ($U'_s$) المتغيرات العشوائية.

أ- ما هي المتغيرات الداخلية (Endogenous)، والخارجية (Exogenous).

ب- هل توجد معادلة منفردة في هذا النموذج يمكن تقديرها بطريقة (OLS).

٧- كون نموذجا من المعادلات الآنية للعرض والطلب على الخدمات الصحية. ونموذج آخر للعرض والطلب على النقود. حدد المتغيرات الداخلية والخارجية.

٨- إذا أعطي النموذج الآتي المتكون من ثلاث معادلات:

$$Y_{1t} = a_0 + a_1X_t + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = b_o + b_1Y_{1t} + b_2 + u_{2t}$$

$$Y_{st} = c_o + c_1Y_{2t} + c_2 + u_{3t}$$

أ- اشرح لماذا يعتبر هذا النموذج من نماذج المعادلات الآنية؟

ب- هل تصلح طريقة (OLS) التقدير معلمات حل معادلة من معادلات هذا النموذج؟ ولماذا؟

٩- النموذج التالي يكون معادلتين هيكليتين تمثلان نموذجا مبسطا للعرض والطلب:

$$\text{Demand: } Q_t = a_0\ a_1P_t + a_2Y_t + u_{1t}$$

حيث: $a_1 > 0, \text{ and } a_2 <$ ٠

$$\text{Supply: } Q_t = b_o + b_1P_1 + u_{2t}$$

حيث: $b_1 > 0$

وإن: (Q) تشير إلى الكمية، (P) الأسعار، و (Y) دخل المستهلك. (t) الزمن.

أ- لماذا يعتبر هذا من نماذج المعادلات الآنية؟

ب- حدد المتغيرات الداخلية والخارجية في هذا النموذج.

جـ- لماذا يكون التقدير بطريقة (OLS) لمعلمات نموذج العرض والطلب متحيزة وغير متسقة؟

د- أوجد الصيغة المختزلة لهذا النموذج الهيكلي.

هـ- لماذا تعد هذه الصيغة المختزلة مهمة؟ وماذا تقيس معلمات هذه الصيغة لنمـوذج السـوق أعلاه؟

# الفصل الرابع عشر

## التشخيص

Identification

(١٤,١) طبيعة مشكلة التشخيص.

(١٤,٢) التوسع في عرض مشكلة التشخيص .

(١٤,٣) تأثير المضاعفات (مضاعفات كيندلبركر).

(١٤,٤) التشخيص والتشخيص العلوي والسفلي.

(١٤,٥) قواعد التشخيص.

(١٤,٥,١) التشخيص بموجب الدرجة.

(١٤,٥,٢) التشخيص بموجب الرتبة.

(١٤,٦) تطبيقات وتمارين.

# الفصل الرابع عشر

## التشخيص Identification

تظهر مشكلة التشخيص قبل عملية التقدير (Estimation) ويقصد بالتشخيص إمكانية تقدير المعلمات الهيكلية (Structural Parameters) لنماذج المعادلات الهيكلية من معلمات الصيغة المختزلة. يقال عن المعادلة في المنظومة أنها مشخصة تماما (Exaclty Identified) إذا كان عدد المتغيرات الخارجية (المستقلة) Exogenous في المعادلة مساويا لعدد المتغيرات الداخلية (المعتمدة) في المعادلة مطروحا منه واحد. وعلى كل حال فإن المعادلة في المنظومة التي يراد تشخيصها قد تكون ذات تشخيص علوي over identification (أو ذات تشخيص سفلي Under Identification)، إذا كان عدد المتغيرات الخارجية في المعاجلة يتجاوز (أو يقل) من عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة مطروحا منه واحد، وهذا شرط ضروري necessary وليس شرطا كافيا Sufficient للتشخيص.

### ١٤,١ طبيعة مشكلة التشخيص:

لتوضيح طبيعة مشكلة التشخيص نستعين بمثال من النظرية الاقتصادية. ففي حالة المنافسة الكاملة Perfect Competition يتحقق شرط التوازن Equilibrium Condition عند التقاء منحنى العرض والطلب في نقطة معينة مثل "Q" والنموذج هذا يمكن تمثيله بالمعادلات الثلاثة التالية:

الكمية المطلوبة $Q_d = f_1 (P)$

الكمية المعروضة $Q_s = f_s (P)$

معادلة التوازن $Q_d = Q_s$

وفي حالة افتراض الدالة الخطية فإن النموذج يكتب بالصيغة التالية:

دالة الطلب $Q_d = a_1 + b_1 p$

دالة العرض $Q_d = a_1 + b_2 P$

دالة التوازن $Q_d = Q_s$

ففي حالة افتراض ثابت العوامل على حالها أي (Ceteris paribus) فإن نموذج الدالة الخطية يعتبر نموذجا مشخصا، وعملية التقدير تأخذ مجراها الاعتيادي، ونحصل على حالة التوازن نتيجة التقاء منحنى العرض مع الطلب.

ولكن لعدم واقعية هذه الفرضية فإنه قد يتغير منحنى العرض أو منحنى الطلب خلال الفترة الزمنية ويتبع ذلك تغير في نقطة التوازن.

فمشكلة التشخيص Identification Problem تبحث في محاولة تشخيص المعلمات الهيكلية للمعادلات المنفصلة المكونة للنموذج، ومن البيانات المستحصلة ميدانيا. ففي النموذج أعلاه لا توجد مشكلة تشخيص والسبب هو عدم تضمن النموذج للمتغيرات التحويلية Shift Variables التي تضمن تشخيص النموذج. وهذه المتغيرات التحويلية هي التي نطلق عليها أحيانا بالمتغيرات الخارجية أو المستقلة.

وفي الدراسات الميدانية يضيف القياسيون حد الاضطراب Disturbance (U:)Term ليمثل العناصر التي حذفت من معادلات النموذج (راجع الفصلين الأول والثاني). فإذا افترضنا بان $U_1 \rightarrow 0$ وأن $U_2$ كبيرة نسبيا فإن منحنى العرض سيكون مشخصا ويمكن كتابة نموذج العرض والطلب كما يلي:

دالة العرض $Q_s = a_1 + b_1P + U_1$

(٢)

دالة الطلب $Q_d = a_2 + b_2P + U_2$

دالة التوازن $Q_s = Q_d + U_3$

وفي حالة إدخال الدخل كمتغير تحويلي ولنقل (Y) على دالة الطلب فنحصل على النموذج (٣) وهو:

دالة التوازن $Q_s = a_1 + b_1P + U_1$

(٣)

دالة الطلب $Q_d = a_2 + b_2P + C_2Y + U_2$

دالة التوازن $Q_s = Q_4 + U_3$

والتحويل في منحنى دالة الطلب يعود إلى مساهمة الدخل في تأثيره على الطلب، ومعادلة العرض تعتبر مشخصة تماما Just Identified، ويمكن تقدير معلماتها $(a_1, b_1)$، في حين تعتبر معادلة الطلب غير مشخصة Unidentified. وذلك لاحتوائها على متغير خارجي.

وللتوضيح نأخذ المثال التالي مفترضين فيه وللتبسيط بأن الحد العشوائي مساو للصفر $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ وعليه فإن:

دالة الطلب هي (٤)... $Q_d = a_2 + b_2P + C_2Y$

ودالة العرض هي (٥)... $Q_s = a_1 + b_1P$

وبضرب المعادلة (٤) في قيمة ثابتة ولتكن (λ) وكذلك المعادلة (٥) في (λ-١) لنحصل على:

$$\lambda Q_d = a_2 + b_2P + C_2Y$$

$$(1-\lambda)Q_s = (1 - \lambda)a_1 + (1 - \lambda)b_1P$$

وبجمع المعادلتين نحصل على:

$$\lambda Q_d + (1 - \lambda)Q_s = \lambda a_2 + (1 - \lambda)_{a1} + \lambda b_2P) + (1 - \lambda) b_1P + \lambda C_2Y]$$

وبما أن شرط التوازن هو: $Q_d = Q_s = Q$

إذن:

$$Q = \underbrace{\lambda a_2 + (1 - \lambda)a_1} + \underbrace{\lambda b_2 + (1-\lambda)b_1}P + \underbrace{\lambda C_2}Y$$

المتغير الخارجي ومعامل المتغير الحد الثابت

إذن:

$$Q = x + \beta P + \lambda C_2Y$$

وهي معادلة (hybrid) والتي يمكن تقدير معلماتها. وبموجب هذا الأسلوب نحصل على تركيبة خطية من المعادلات (Linear Combinations of equations). وعليه وبوجود العلاقات الخطية فإن معيار التشخيص Identification Criterion هو انه عند ضرب طرفي المعادلات بعامل مشترك وبجمع المعادلات الناتجة نحصل على Linear Combinations of equations، وعليه في النموذج أعلاه فإن معادلة العرض تخضع لهذا المعيار في حين معادلة الطلب لا تخضع له.

بعد هذا التقديم لمشكلة التشخيص، لابد من التطرق إلى شروط أو قواعد التشخيص وهذا يتطلب استخدام النموذج الخطي العام (GLM) المعتمد على عرض مشكلة التشخيص باستخدام المصفوفات أولا ثم التطرق إلى القواعد.

١٤,٢ التوسع في عرض مشكلة التشخيص:

من الفصل الثالث عشر لاحظنا أن هيكل تركيب النموذج الخطي العام أخذ الصيغة التالية:

وأن رتب هذه المنظومة كالآتي:

$$\beta Y_1 + T_{Xt} = U$$

(G.G) (G.1) * (G.K) (K.1) = (G.1)

(G.1) + (G.1)

G.1 = G.1

والصيغة المختزلة هي:

$$Y_t = \pi X_t \sqrt{Y_t}$$

حيث لاحظنا في الفصل الرابع عشر:

$$\pi = -\beta^{-1}T \quad \text{and } \gamma_t = \beta^{-1}U_t$$

(G.G) (G.K) = (G.G)(G.1)

$\pi$ = (G.K) $\sqrt{Y}$ =(G.1)

(G.1)

إذن: $\therefore \pi = G.1$

وكذلك ففي النموذج الخطي العام نلاحظ أن معاملات المتغيرات المحددة مسبقا ($\pi$'s) تدعى مضاعفات كيندلبركر أو تأثير المضاعفات. ولشرح الصيغة العامة للتشخيص باستخدام المصفوفات نأخذ المثال التالي:

لنفترض أن هيكل النموذج يتكون من المعادلتين (كما في المثال السابق) وهما:

$$Y_1t = \beta_{12}Y_2t + \gamma_{11}X_1t + 1_t$$

$$Y_{2t} = \beta_{21}Y_1t + U_2t$$

ومن أجل معرفة تشخيص معادلات النموذج نتبع الخطوات التالية:

أولا: يوضح النموذج أعلاه في صيغة النموذج الخطي العام GLM كما يلي:

$$Y_1t - \beta_{12}Y_2t - \gamma_{11}X_1t = U_1t$$

$$-\beta_{21}Y_1t + Y_2t = U_2t$$

ثانيا: تستخدم المصفوفات لشرح النموذج الخطي العام كما يلي:

بما أن:

$$\beta Y_1 + TX_t = U_t$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_{11} \\ 0 \end{bmatrix} . [X_{1t}] = \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \end{bmatrix}$$

ثالثا: توجد الصيغة المختزلة عن طريق الضرب المسبق للمعادلة في الخطوة الثانيـة في المقـدار $\beta^{-1}$ لنحصل على:

إذن $\beta^{-1}\beta Y_t + \beta^{-1}TX_t = \beta^{-1}U_t$

$$Y_t = \beta^{-1}TX_t + \beta^{-1}U_t$$

نفترض بان $-\beta^{-1}T = \pi$

و $\beta^{-1}U_t = \gamma_t$

إذن الصيغة المختزلة هي: $Y_t = \pi X_t + \gamma_t$

وتستخدم الصيغة المختزلة لتشخيص تـأثير متغـيرات الجانـب الأيمـن مـن المعادلـة عـلى المتغيرات في الجانب الأيسر. ولتوضيح ذلك نتبع ما يلي:

رابعا: يتم إيجاد معكوس المصفوفة ($\beta$) للحصول على ($B^{-1}$) ولتحقيـق ذلـك نطبـق صيغة إيجاد معكوس المصفوفة والتي هي:

$$\beta^{-1} = \frac{1}{|\beta|} \text{adj}(\beta)$$

وبما أن:

$$\therefore \beta = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

إذن محددها هو: $|\beta| = 1 - \beta_{12}\beta_{21}$

١٤,٣ تأثير المضاعفات (مضاعفات كيندلبركر) :

(Kimdleberger Multipliers) Impact Multipliers:

تقيس $\pi$ تأثير الزيادة في وحدة واحدة من ($X_1$) عـلى قيمـة $Y_1$ وهـذا التـأثير يتركـب مـن جزأين هما:

(i) التأثير المباشر علـى $Y_1$ من خلال المعملة $\gamma_{11}$ كما هو موضح في المعادلـة (٧) مـن النمـوذج الهيكلي.

(ii) والتأثير الإضافي (غير المبـاشر) الناتج عن التغـير في $(X_1)$ يـؤثر عـلى $(Y_1)$ وأن $(Y_1)$ تـؤثر عـلى $(Y_2)$ المعادلة (٨) وبالمقابل فإن $(Y_2)$ تؤثر على $Y_1$ من خلال المعلمة $(B_{12})$، كما في المعادلة (٧).

وإجمالي هذه التأثيرات تظهر في ( $\pi$ ) حيث إن التأثير المباشر على $(Y_1)$ عندما تكون $(Y_2)$ ثابتة هو $(\gamma_{11})$ والتأثير غير المباشر على $(Y_1)$ هو عبارة عن:

$$\frac{\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\,\beta_{21}}-\gamma_{11}=\frac{\gamma_{11}-\gamma_{11}\,(1-\beta-\beta_{12}\,\beta_{21})}{1-\beta_{12}\,\beta_{21}}=\frac{\gamma_{11}\,\beta_{12}\beta_{21}}{1-\beta_{12}\,\beta_{21}}$$

وعليه فإن التأثير المباشر وغير المباشر للمتغير $X_1$ على $Y_1$يتكون من

$$\pi_{11}=\gamma_{11}+\frac{\gamma_{11}\,\beta_{12}\,\beta_{21}}{1-\beta_{12}\,\beta_{21}} \qquad \dots (13)$$

أن معادلات الصيغة المختزلة يمكن اعتبارها معادلة انحدار - فلـو تـوفرت لـدينا بيانـات عن كل من $(X_1)$ و $(Y_1)$ عندئذ يمكـن تطبيـق طريقـة المربعـات الصـغرى (OLS) للحصـول عـلى تقديرات متسقة للمعلمات ($\hat{\pi}$,s ) ويمكن الإشارة لها عندئذ بـ ( $\hat{\pi}_{11}, \hat{\pi}_{21}$ ) ... وهكــذا. وهـذه الطريقــة تعـرف بطريقة المربعـات الصغـرى غـير المباشـرة Indirect least Squares Method (ILS).

١٤،٤ التشخيص والتشخيص العلوي والسفلي:

على ضـوء المثـال أعـلاه يمكـن توضـيح مشـكلة التشـخيص باسـتخدام طريقـة المربعـات الصغـرى لتقديـر كل من $(\pi_{11})$ و $(\pi_{21})$ وهـذا يعـني هـل بالإمكـان تقــدير المعلمــات $(\beta_{21})$، $(\beta_{12})$، $(\gamma_{11})$ من تقدير معاملات الصيغة المختزنة؟

في المثـال نسـتطيع أن نحصـل عـلى تقـدير للمعلمـة $(\beta_{21})$ بقسـمة ( $\hat{\pi}_{21}$ ) عـلى ( $\hat{\pi}_{11}$ ) حيث:

$$\frac{\hat{\pi}_{21}}{\pi_{11}}=\left[\frac{\beta_{21}\,\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\,\beta_{21}}\Big/\frac{\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\,\beta_{21}}\right]=\frac{\beta_{21}\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\,\beta_{21}}\cdot\frac{1-\beta_{12}\beta_{21}}{\gamma_{11}}$$

$$\therefore=\beta_{21}\quad i:e\ \hat{\beta}_{21}=\frac{\hat{\pi}_{21}}{\pi_{11}}$$

ويلاحظ من المعادلة الهيكلية الثانية أن:

$$\frac{\hat{\pi}_{22}}{\pi_{12}}=\left[\frac{\beta_{21}\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\beta_{22}} \Big/ \frac{\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\beta_{21}}\right]=\frac{\beta_{21}\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\beta_{21}}\cdot\frac{1-\beta_{12}\beta_{21}}{\gamma_{11}}$$

$$=\beta_{21} \quad i:e\ \hat{\beta}_{21}=\frac{\hat{\pi}_{22}}{\hat{\pi}_{12}}$$

.. من هذا نستنتج أن هناك تقديران متساويات للمعلمة ($\beta_{21}$) أمكن الحصول عليهما باستخدام تقديرات مختلفة من الصيغة المختزلة وفي هذا الحالة يقال أن المعلمة ($\beta_{21}$) لها تشخيص علوي Over Identification. لوجود أكثر من طريقة لتقدير المعلمة ($\beta_{21}$) ولهذا تعد المعادلة (٢) ذات تشخيص علوي لوجود تقديرين لمعلمة ($\beta_{21}$) وذلك لعدم وجود متغيرات محددة مسبقا في هذه المعادلة. في حين نجد أن معلمات المعادلة (٧) غير مشخصة Unidentified في حين تظهر مشكلة التشخيص السفلي في حالة حذف متغير مستقل أو أكثر.

مما سبق يتضح بان النموذج الاقتصادي أو ما يسمى البناء الهيكلي للنموذج الاقتصادي يتكون من المعادلات الهيكلية، وكل معادلة من هذه المعادلات تتكون من متغيرات داخلية ومتغيرات خارجية، وهي على نوعين خارجية معطاة (given) وداخلية للفترات السابقة ( Previous Year) ويطلق على المتغيرات الخارجية بنوعيها بالمتغيرات المحددة قيمها مسبقا ( Pre-determined variables) ويمكن تمثيلها بالمتغيرات ($X_t$) و ($Y_{t-1}$) ومعاملاتها ($\gamma'_s$) كذلك يطلق عليها المتغيرات التحويلية التي تسبب تغيرا في سلوكية المعادلة. في حين المتغيرات الداخلية يمكن تمثيلها بالمتغيرات ($Y_t$) ومعاملاتها هي ($\beta's$)، وتحدد قيمة هذه المتغيرات بواسطة المتغيرات المحددة مسبقا والحد العشوائي. أي باشتقاق ما يسمى بمعادلة الصيغة المختزلة ( The Reduced form Equation). وأن الصيغة الهيكلية للمعلمات ($\pi's$) في الصيغة المختزلة تسمى بمضاعفات كيند لبركر أو تأثير المضاعفات (Multipliers Impact)، والتي توضح الأثر المباشر (Direct) والأثر غير المباشر (Indirect effects) للزيادة في ($X_t$) على ($Y_t$). وأن النسبة (Ratio) بين تقديرين ($\pi's$) أي

$\frac{\pi_{21}}{\pi_{11}}$ وتشخص المعلمات أو $B_{21} = \frac{\pi_{21}}{\pi_{11}}$. وعليه فالتشخيص يحتاج إلى إيجاد النسبة بين هيكلين من المعلمات. وهذا ما سنقوم بتوضيحه في المثال أدناه. ولنفترض النموذج الهيكلي التالي:

$$Y_{1t} = \beta_{12}Y_{2t} + \gamma_{11}X_{1t} + \gamma_{12}X_{2t} + U_t \quad .... (7)$$

$$Y_{2t} = \beta_{12}Y_{1t} + U_t \quad ... (8)$$

حيث أن $Y_1$ يشير إلى الدخل القومي.

$Y_2$ يشير إلى المخزون التقديري.

وكلاهما يشيران إلى المتغيرات الداخلية والتي تتحد قيمتها في النموذج بتداخل المعادلات.

$X_1$ يشير إلى الاستثمار (مستقل).

$X_2$ يشير إلى الإنفاق الحكومي.

وكلاهما يشيران إلى المتغيرات الخارجية والتي تتحد قيمتها خارج نطاق النموذج.

ويتم التوصل إلى الصيغة المختزلة لهذا النموذج وذلك بتخليص الجانب الأيمن من معادلاته من ($Y_1$) و ($Y_2$)، وبتعويض المعادلة (٨) في المعادلة (٧) نحصل على:

$$Y_{1t} = \beta_{12}\ [\ \beta_{21}Y_{1t} + U_{2t}\ ] + \gamma_{11}X_{1t} + \gamma_{12}X_{2t} + U_{1t}$$

$$Y_{1t} = \beta_{12}\beta_{21}Y_{1t} + \gamma_{11}X2_{1t} + \gamma_{12}X_{2t} + \beta_{12}U_{2t} + U_{1t}$$

$$Y_{1t} = \beta_{12}\beta_{21}Y_{1t} = \gamma_{11}X_{1t} + \gamma_{12}X_{2t} + \beta_{12}U_{2t} + U_{1t}$$

$$Y1t = (1 - \beta_{12}\beta_{21}) = \gamma_{11}X_{1t} + \gamma_{12}X_{2t}\beta_{12}U_{2t} + U_{1t}$$

$$Y_{1t} = \frac{Y_{11}}{1-\beta_{12}\beta_{21}} X_{1t} + \frac{\gamma_{12}{}^{*}}{1-\beta_{12}\beta_{21}} X_{2t} + \text{disturbances}$$

or

$$Y_{1t} = \frac{1}{1-\beta_{12}\beta_{21}}\left[\gamma_{11}X_{1t} + \gamma_{12}X_{2t}\right] + \text{disturbances} \quad ... (9)$$

وأيضا:

---

* يشير الرمز $\gamma$ (كاما) إلى معلمات المتغيرات المستقلة.

$$Y_{2t} = \frac{\beta_{21}}{1-\beta_{12}\beta_{21}}\gamma_{11}X_{1t} + \gamma_{12}X_{2t} + \text{disturbances} \quad ...(10)$$

وقد تم الحصول على المعادلة (١٠) من تعويض المعادلة (٩) في المعادلة (٨). كذلك فإن كل من المعادلة (٩) و (١٠) يوضحان اعتماد المتغيرات الداخلية على كل من المتغيرات المحددة مسبقا مضافا إليهما حد الاضطراب ($U_{1t}, U_{2t}$). وان المعادلتين (٩) و (١٠) تمثلان معادلات الصيغة المختزلة للنموذج الهيكلي أعلاه والذي يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$Y_{1t} = \pi_{11}X_{1t} + \pi_{12}X_{2t} + \text{disturbances} \quad ...(11)$$

$$Y_{2t} = \pi_{21}X_{1t} + \pi_{22}X_{2t} + \text{disturbances} \quad ...(12)$$

حيث تشير:

$$\pi_{11} = \frac{\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\beta_{21}}, \pi_{12} = \frac{\gamma_{12}}{1-\beta_{12}\beta_{21}}$$

وأن:

$$\pi\pi_{21}\frac{\beta_{21}\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\beta_{21}}, \pi_{22} = \frac{\beta_{21}\gamma_{12}}{1-\beta_{12}\beta_{21}}$$

وتمثل هذه المعلمات الهيكلية للصيغة المختزلة. وأن ($\pi$'s) تمثل مفهوما مهما في علم الاقتصاد وهو تأثير المضاعف Impact Multiplier والذي هو عبارة عن تأثير التغير في متغير واحد على المتغيرات الأخرى للحالة المدروسة.

إيجاد المرافقات Cofactor والمحولة Transportation وكما يلي:

$$\beta^{c} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{21} \\ -\beta_{12} & 1 \end{bmatrix}, \beta^{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \beta^{-1} = \frac{1}{/\beta/}\text{adj}\beta = \frac{1}{1-\beta_{12}\beta_{21}}\begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

إذن بالتعويض نحصل:

$$\pi = -\beta^{-1}T$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} \\ =- \\ \pi_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta_{12}\beta_{21}} & \frac{\beta_{12}}{1-\beta_{12}\beta_{21}} \\ \frac{\beta_{12}}{1-\beta_{12}\beta_{21}} & \frac{1}{1-\beta_{12}\beta_{21}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\gamma_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهكذا نجد أن:

$$\pi_{11} = \frac{\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\beta_{2}}, \quad \pi_{21} = \frac{\gamma_{11}\beta_{21}}{1-\beta_{12}\beta_{21}}$$

خامسا: ولمعرفة التشخيص نأخذ النسبة بين معلمات المعادلتين كما يلي:

$$\frac{\beta_{12}\,\pi_{21}}{\pi_{11}} = \frac{\beta_{21}\,\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\,\beta_{21}} / \frac{1-\beta_{12}\,\beta_{21}}{\gamma_{11}} = \beta_{21}$$

إذن المعادلة الثانية في النموذج الهيكلي هـي المعادلـة المشخصـة Identified وعليـه فإنـه يمكن تقدير العلاقة الاقتصادية لها.

ولتوضـيح أكـثر يمكـن تطبيـق النتـائج التـي تـم الحصـول عليهـا في الخطـوة الخامسـة وتعويضها في الصيغة المختزلة كما يلي:

إذن

$$Y_t = \pi X_t + \sqrt{\gamma_t}$$

$$Y_1 t = \pi_{11} X_{1t} + \sqrt{\gamma_t}$$

وبالتعويض بالنتيجة الأولى نحصل على:

$$Y1t = \frac{\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\,\beta_{21}} X_1 t + \gamma_t$$

وفي المعادلة الثانية:

$$Y_2 t = \pi_{21} X_1 t + \sqrt{\gamma_{2t}}$$

بالتعويض نحصل على:

$$Y_2 t = \frac{\beta_{21}\,\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\,\beta_{21}} X_1 t + \gamma_1 t + \gamma_2 t$$

إذن المعادلة (٨) في النموذج الهيكلي السابق مشخصـة، ويمكـن إيجـاد تقـدير للمعلمـة ($\beta_{21}$). أما إذا كانت المعادلة غير متضمنة لمعلمة واحد فيقال عنها معادلـة ذات تشـخيص سـفلي Under identified، أما إذا تضمنت أكثر من معلمتين فيقال عنهـا بأنهـا ذات تشـخيص علـوي Over Identified. وهذا واضح من المثال أعلاه.

تتناول مشكلة التشخيص تحديد اختبـار الأسـلوب المتبـع في عمليـة تقـدير المعلـمات فـإذا كانت لدينا مشـكلة التشـخيص السـفلي فهـذا يعنـي لا توجـد طريقـة إحصـائية لتقـدير معلـمات المعادلة. أما إذا كانت المعادلة مشخصة فإنه يوجد طريقة لتقـدير المعلـمات وأفضـل طريقـة هـي طريقة المربعات الصغرى غير مباشر Indirect least Squares. أما إذا كانت المعادلة ذات تشخيص علوي Over Identification فإنه توجد عدة طرق للتقدير عدا طريقة المربعات الصغرى غير المبـاشرة (ILS). ولا توجد اتفاق بـين القياسـيين حـول أيهـما أكـثر واقعيـة للتشـخيص Identification أو التشـخيص العلوي Over Identification أو التشخيص السفلي Under Identification ومناقشة هذه المواضـيع متروكـة إلى دراسات أكثر تخصصا وتعمقا.

### ١٤,٥ قواعد التشخيص:

يمكن اكتشاف ما إذا كانت المعادلة مشخصة أم غير مشخصة عن طريق بحث توفر أحد شرطين هما شرط الدرجة Order Condition وشرط الرتبة Rank Condition ويمكن تلخيص هذين الشرطين كما يلي:

#### ١٤,٥,١ شرط التشخيص بموجب الدرجة Order Condition:

وهو الشرط الضروري Necessary Condition للتشخيص، وبموجبه ولكي تكون المعادلة مشخصة، يجب أن يكون عدد المتغيرات المحددة مسبقا المستبعدة من المعادلة قيد الدرس أقل من عدد المتغيرات الداخلية المشمولة في تلك المعادلة بأقل من الواحد الصحيح. وهذا يمثل الشرط الضروري وليس الشرط الكافي Sufficient للتشخيص. ولتوضيح ذلك نأخذ الرموز التالية:

$R$ = عدد المتغيرات في النموذج (الداخلية والمحددة مسبقا) والمستبعدة من المعادلة التي يراد تشخيصها أن $R = Y_t + X_t$

$G$ = عدد المتغيرات الداخلية في النموذج (المعادلات الهيكلية) والتي تتمثل في ($Y_t$)

$K$ = عدد المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج (المعادلات الهيكلية) والتي تتمثل في ($X_t$).

إذن:

$$R = Y_T + X_T = G + K$$

في النموذج الهيكلي مستبعد منه المعادة الهيكلية التي يراد تشخيصها فإذا افترضنا بأن:

$g$ = عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة الهيكلية التي يراد تشخيصها.

$k$ = عدد المتغيرات المحددة مسبقا في المعادلة الهيكلية التي يراد تشخيصها والمعادلة الهيكلية التي يراد تشخيصها بموجب شرط الدرجة يجب أن تتوفر فيها ما يلي:

$$R = (G - g) + (K - k) \geq G - 1$$

وبإعادة ترتيبها فإن:

$$R = (G + K) - (g + k) \geq G - 1$$

أي أن شرط الدرجة لمعادلة التشخيص هي:

$$R \geq G - 1$$

أي أن (R) يجب أن تكون أما أكبر أو مساويا على الأقل لعدد المتغيرات الداخلية في النموذج ناقصا الواحد الصحيح. أيضا يمكن أن نحصل على صيغة أخرى لشرط الدرجة وكما يلي:

$$(G + K) - (g + k) \geq G - 1$$

وبفك الأقواس نحصل على:

$$G + K - g - k \geq G - 1$$

وبالترتيب نحصل على: $(G - g) + (K - k) \geq G - 1$

وبطرح $G - g$ من كلا الطرفين نحصل على أن:

$$(K - k) \geq (G - 1) - (G - g)$$

وبفك الأقواس نحصل على:

$$(K - k) \geq G - 1 - G + g$$

إذن: $(K - k) \geq (g - 1)$

وتمثل الصيغة الأخيرة شرط التشخيص بموجب الدرجة أي أن عدد المتغيرات المحددة مسبقا والمستبعدة في المعادلة يجب لا تكون أقل من عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة المراد تشخيصها مطروحا منها الواحد الصحيح $(g - 1)$.

التطبيق الأول: حول التشخيص Identity وغير التشخيص Unidentity

لنأخذ نموذج العرض والطلب التالي:

$$Q_s = a_1 + b_1P \quad \dots (1)$$

$$Q_d = a_2 + b_2P + C_2Y \quad \dots (2)$$

$$Q_s = Q_d \quad \dots (3)$$

ولتطبيق شرط الدرجة على المعادلة (١) نلاحظ بأن النموذج الهيكلي يتضمن أربعة متغيرات منها ثلاث متغيرات داخلية (Qd, Qs, P) ومتغير خارجي واحد هو (Y). إذن لتشخيص المعادلة (١) نجد بأن:

$$G = 3 \quad , K = 1$$

$$g = 2 \quad , K = 0$$

بتطبيق شرط الدرجة على هذه المعادلة نحصل على ما يلي:

$$R = (G + K) - (g + k) \geq G - 1$$

$$\therefore R = (3 + 1) - (2 + 0) \geq 3 - 1$$

$$= 4 - 2 \geq 2$$

$$R = 2 \geq 1$$

$$\therefore R = 2 = 1$$

إذن المعادلة الأولى مشخصة Identify حيث ينطبق عليها شرط الدرجة، وبتطبيق شرط الدرجة على المعادلة الثانية للتشخيص نحصل على:

بما أن:

$$R = 3.K = 1, g = 2, k = 1$$

$$\therefore R = (G + K) - (g + k) \geq G - 1$$

$$= (3 + 1) - (2 + 1) \geq 3 - 1$$

$$R = 4\text{-}3 \geq 2$$

$$\therefore R = 1 \geq 2$$

إذن المعادلة الثانية في النموذج غير مشخصة Unidentify حيث أن الواحد غير مساو إلى (٢) أو أكبر منها وعليه لا نستطيع إيجاد تقدير لها من البيانات المتوفرة.

التطبيق الثاني: حول التشخيص العلوي Over - Identification

الشرط الضروري للتشخيص العلوي لمعادلة معينة هو عبارة عن عدد المتغيرات في المعادلة أقل أو مساويا لعدد المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج وليس في المعادلة الهيكلية أي.

$$g \leq (K - k)$$

وللتوضيح نأخذ النموذج التالي:

$$Y_{1t} = \beta_{12} Y_{2t} + \gamma_{11} X_1 t + \gamma_{12} X_{12} + U_1 t \quad \dots (1)$$

$$Y_{2t} = \beta_{12} Y_{1t} + \qquad U_2 t \quad \dots (2)$$

وبتطبيق شرط الدرجة للتشخيص العلوي للمعادلة (٢) نجد أن:

$$Y1t = 2, K = 2, g = 2, k = 0$$

$$(g - 1) = (K - k)$$

$$2 - 1 = (2 - 0)$$

$$2 < 2$$

وعليه طالما الجانبين متساويين إذن فإن الشرط الضروري يطابق المعادلة لثانية وبالتالي فهي معادلة ذات تشخيص علوي.

١٤،٥،٣ شرط التشخيص بموجب الرتبه Rank Condition:

ويطلق عليه أحيانا الشرط الكافي للتشخيص، ومن أجل الحصول على الشرط الضروري والكافي للتشخيص فإنه من الضروري اشتقاق شرط الرتبة. وإحدى الطرق المستخدمة للحصول على شرط الرتبة هو ما يلي:

بما أن الصيغة المختزلة للنموذج الهيكلي نأخذ الشكل التالي:

وهي تتضمن معلماتها $Y_t = \pi X_t + \gamma$

وبما أن: $\pi = -\beta^{-1}T$

بضرب الطرفين في ($\beta$) وبالترتيب نحصل على:

$$\beta\pi = -T$$

أو $\beta\pi + T = 0$

وبأخذ الرتب: (G.G) (G.K) + (G .k) = (G.K)

(G.K) + (G.K) = (G.K)

وهي مصفوفة الصفر (Null matrix) (G.K) = (G.K)

فإذا أخذنا المعادلة الأولى من النموذج الخطي العام (G.L.M) سنحصل إذن على:

$$\beta_1\pi + \gamma 1 = 0$$

وبأخذ الرتب: (1.G) (G.K) + (1.K) = (1.K)

(1.K) + (1.K) = (1.K)

وهي رتبة مصفوفة الصفر (1.K) = (1.K)Null matrix

وحيث أم أن ($\beta_1$) ذات رتبة (1.G) وتمثل الصف الأول في مصفوفة ($\beta$) أي أن:

$$\beta_1 = [\ \beta_{1t} \quad \beta_{t2} \quad \beta_{t3} \quad \dots \beta_1 G]$$

وإن ($\gamma_1$) ذات رتبة (1.K) وتمثل الصف الأول في مصفوفة (T) أي أن:

$$\gamma 1 = [\ \gamma_{1t} \quad \gamma_{t2} \quad \gamma_{t3} \quad \dots \gamma_1 K\ ]$$

وكذلك يمكن إعادة كتابة $\beta\pi + T = 0$ بشكل مصفوفة كما يلي:

$$\beta\pi + T = 0$$

$$[\ \beta \quad T\ ], \pi = 0$$

أي:

$I_k$

(G.G) (G.K) (G.K) (K.K) = (G.K)

(G.K) (G.K) (K.K) = (G.K)

(G.K) (K.K) = (G.K)

(G.K) = (G.K)

حيث ($I_k$) تشير إلى مصفوفة الوحدة (Identity matrix) وبالاستعانة بـالرموز المسـتخدمة مـن قبل الأستاذ جونستن J. Johnston فيمكن إعادة كتابة المعادلة أعلاه كما يلي:

A. W = 0

حيث إن: $A = [\beta \quad T]$

وإن: $W = \begin{bmatrix} \pi \\ I_k \end{bmatrix}$

وأن [ A ] هـي المصـفوفة ذات الرتبـة (G.K) .G وتشـمل جميـع المعلـمات الهيكليـة في النموذج ويمكن توضيحها كما يلي:

بما أن مصفوفة [ A ] تتضمن [T β] وهي ذات الرتبة التي وتساوي

(G.G) (G.K)

(G.K) .G وتأخذ الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_1 G & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_1 K \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_2 G & \gamma_{22} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_2 K \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \dots & \beta_{GG} & \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \dots & \gamma_{GK} \end{bmatrix}$$

أما (W) فهي المصفوفة ذات درجة (G + k). K ولها رتبة تساوي K. وهذه المصـفوفة يمكـن توضيحها كالآتي:

بما أن:

$$W = \begin{bmatrix} \pi \\ \\ I_k \end{bmatrix} \begin{matrix} (G..)+(K.K \\ \\ (G.K), K \end{matrix}$$

ويمكن تمثيل (W) كمصفوفة بصورة أكثر توضيحا كالآتي:

$$W = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\end{matrix}}\right\} \pi \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\end{matrix}}\right\} I_k \end{matrix}$$

فإذا أخذنا الصف الأول من المصفوفة [A] نرمز له $x_1$ ونضربه في المصـفوفة (W) فنحصـل على الصفر أي:

$$a_1 = \{ (\beta_{11} \quad \beta_{21} \quad ... \quad \gamma_{11} \quad \gamma_{12} \quad ... \gamma_1 K) \} \; W = 0$$

$$1.(G + K) \qquad\qquad (G + K).\, K = 1.K = 0$$

$$(1.K) = 0$$

أي:

$$a_1 = [\, \beta_{11} \quad \beta_{21} \quad ... \gamma_{11} \quad \gamma_{12} \qquad ... \gamma_1 k \,] \, . \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$A.W = 0$$

إذن:

وعليه فإن $W = 0$

حيث المصفوفة الصفرية من رتبة (1.K).

وبسبب كون المصفوفة [W] معلومة وان [π] يمكـن تقـديره بواسـطة OLS وأن (Ik) هـي مصفوفة الوحدة وكون ($x_1$) غير معلومة فإننا بحاجة إلى توفير بعض المعلومات المسبقة Priori In formation أو قيود أولية (Priori Restrictions) عن النمـوذج لتسـاعد في عمليـة تشـخيص معادلاتـه. وهذه المعلومات يمكن أن تكون على نوعين:

١- قيـد الصـفر - وغـير الصـفر (Zero - Nonzero) وتوضـح هـذه القيـود كـون بعـض العنـاصر في (x1) تساوي صفرا لأن المتغيرات العائدة لها لا تظهر في المعادلة الأولى.

٢- قيد التجانس الخطي (Linear homogenous)، فمثلا التوليفة الخطية للمعلمات Linear Combination of coefficients تساوي صفرا أي:

$$\beta_{14} = \beta_{15}$$

وبما أن: $\beta_{14} - \beta_{15} = 0$

وهذه القيود الأولية يمكن أن توضح في الصيغة التالية:

$$a_1 Q = 0$$

حيث أن [Q] هي ذات درجة (G + K) من الصفوف. وعمود لكل قيد فمثلا:

$$(a)\ \beta_{13} = 0$$

$$(b)\ \beta_{12} = \beta_{14} = 0$$

$$\beta_{12} - \beta_{14} = 0$$

إذن فإن (Q) في هذه الحالة يمكن أن تكتب كما يلي:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ : & : \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبوضع كلا المعادلتين $x1W = 0$ سوية فإننا نستنتج بأن ($x_1$) سوف

$$\alpha\ Q = 0$$

$$\underset{(G+K)}{a_1} \Big[ \underset{(G+K)\,K}{W} \quad \underset{(G+K)\,.\,R}{Q} \Big] = 0 \quad ...\ (*)$$

حيث تشير (R) إلى عدد الأعمدة في المصـفوفة Q (أي عـدد القيـود الأوليـة) وعليـه فـإن المعادلة الأخيرة (*) تمثل مجموعة (K + R) من المعادلات في (G + K) من المجاهيـل، أي أن حاصـل الضرب [W Q] يعطي:

$$\underset{(1.4)}{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \end{bmatrix}} . \underset{3(4.3)}{\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{(1.3)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

وهي عبارة عن ثلاث معادلات متجانسة في أربعة (G + K) مجاهيل كالآتي:

$$\beta_{11}\,\pi_{11} + \beta_{12}\,\pi_{21} + \gamma_{11} + 0 = 0$$

$$\beta_{11}\,\pi_{12} + \beta_{12}\,\pi_{22} + \gamma_{12} + 0 = 0$$

$$0 + 0 + 0 + \gamma_{12} = 0$$

وبإعادة كتابة المعادلة بالشكل التالي:

$$x_1\,[\,W \quad Q\,] = 0$$

$$[\,1.\,(G+K)\,]\;[\,(G+K\,(k\,]\;[(G+K)\,.\,R\,]$$

ويمكن أن تشير إلى رتبة (W) بالحد التالي $x\,(W) = K$ وكذلك رتبة Q بالحد التالي $\infty\,(Q) = R$ حيث أن $R < (G+K)$ وللبرهنة على أن x1 مشخصة فإن رتبة $[\,W \quad Q]$ يجب أن تساوي $(G+K)\,-1$ وهي في حالة $\infty\,[Q \quad A] = (G-1)$ وهو شرط الرتبة للتشخيص وهو الذي يوفر شرطي الضروري والكفاية سويه.

١٤,٦ تطبيقات وتمارين:

١٤,٦,١ التطبيقات:

(لاحظ تطبيق الأول، الثاني)

التطبيق الثالث: لنأخذ النموذج التالي وبصيغة النموذج الخطي العام (GLM) كما يلي:

$$\beta_{11}\,Y_1t + \beta_{12}\,Y_2t + \gamma_{11}X_1t + \gamma_{12}X_2t = U_1t$$

$$\beta_{21}\,Y_1t + \beta_{21}\,\pi_2t + \gamma_{21}X_1t + \gamma_{22}X_2t = U_2t \qquad C.L.M$$

كلا المعادلتين غير مشخصتين بسبب عدم وجود قيود أولية في كل معادلة وعليه سنفترض قيودا أولية في كل منهما.

لنفترض بأن القيود الأولي هي: $\gamma_{12} = 0, \gamma_{22} = 0$

ففي المعادلة الأولى ستكون (Q) عبارة عن متجه بأربعة عناصر أي:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ and } AQ = \begin{bmatrix} \beta_{11} & b_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \beta_{21} & b_{22} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{12} & = & 0 \\ Y_{22} & & Y_{22} \end{bmatrix}$$

$$(2.4) \qquad (4.1) \qquad (2.1)$$

وهكذا نجد بأن: $\infty\,(AQ) = 1 = (G-1)$.

وهذا يعني بأن المعادلة الأولى مشخصة حيث أن $\gamma_{22} \neq 0$

وإذا افترضنا بان $\gamma_{22} = 0$ فإن المتغير $(X_2)$ سوف يختفي وعليه لا يوجد داع لتشخيصها.

وباتباع نفس الأسلوب نضع القيود الأولية على المعادلة الثانية لتشخيصها كما يلي:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore AQ = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & Y_{11} & Y_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \\ Y_{31} \end{bmatrix}$$

وبما أن: $\gamma_{21} + 0$

إذن: $\gamma_{11}$

$0$

إذن: $\infty (AQ) = 1 = G - 1$

$1 = 2 - 1$

$1 = 1$

إذن المعادلة الثانية مشخصة، وذلك لتوافر الشرط الضروري والكافي هو شرط الرتبة. ولأهمية الموضوع نأخذ المثال الثاني أدناه.

التطبيق الرابع: لنأخذ النموذج الهيكلي للعرض والطلب والمتكون من:

$$Q_s = a_1 + b_1P + U_1 \quad \dots (1)$$

$$Q_i = a_2 + b_2P + C_2Y + U_2 \quad \dots (2)$$

$$Q_s = Q_d \quad + U_3 \quad \dots (3)$$

وللتأكد من كون المعادلة (١) و (٢) مشخصة أم لا نتبع الخطوات التالية:

١- تحديد المتغيرات الهيكلية للنموذج:

يتكون النموذج من ثلاث معادلات وثلاثة متغيرات داخلية هي $Q_s$, $Q_d$, $(P)$ أي $G = 3$، وكذلك يتكون من متغيرين خارجيين هما $Z, Y$ حيث إن $Z = 1$ وهو متغير اصطناعي Dummy ليمثل الحد الثابت.

٢- إعادة ترتيب النموذج الهيكلي بتطبيق المعادلة $\beta Y_t + TX_t = U_t$ وكما يلي:

$$Q_s + 0 - b_1P + 0 - a_1Z \quad = U_1$$

$$0 + Q_d - b_2P + C_2Y - a_2Z = U_2$$

$$Q_s + Q_d + 0 + 0 + 0 = U_3$$

٣- استخدام المصفوفات لتطبيق المعادلة:

$$\beta Y + TX_t = U_t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & -b_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_d \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ -C_1 & -a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

٤- لاختبار التشخيص للمعادلة الأولى نحتاج تطبيق شرط الرتبة

(الشرط الضروري والكافي للتشخيص) والذي يشار إليه بما يلي:

$$AQ = G - 1 \qquad a\,(AQ) = G - 1$$

وبما أن $A = [\,\beta \quad T\,] = A$

إذن بالتعويض فإن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -b_2 & -c_2 & -a_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_s \\ Q_d \\ P \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

٥- ولتحديد (Q) فمن الضروري تحديد عدد القيود في المعادلة (١)

والقيد الذي يستخدم هو قيد الاستبعاد أي استبعاد المتغير ($Q_d$) وكذلك المتغير الخـارجي ($Y$)، وعليه فمن الخطوة الثانية نجد مصفوفة القيود كالآتي:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$AQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & -b_1 & 0 & -a_1\\0 & 1 & -b_2 & -c & -a_2\\1 & -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\1- & -c\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

(3.5) (5.2) (3.2)

٦- وبتطبيق شرط الرتبة نحصل على:

$\infty$ (AQ) = 2 and G - 1 = 3 - 1 = 2

إذن: $\infty$ (AQ) = 2 = G - 1 = 2

إذن: 2 = 2

وعليه فإن المعادلة الأولى للنموذج الهيكلي لسوق العرض والطلب مشخصة.

٧- نتبع نفس الخطوات بالنسبة لتشخيص المعادلة (٢) في النموذج الهيكلي:

وكما يلي في المعادلة الثانية يوجد قيد واحد وهو استبعاد $Q_s$:

إذن:

$$Q=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$AQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & -b_1 & 0 & -a_1\\0 & 1 & -b_2 & c_2 & -a_2\\1 & -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

(3.5) (5.1) (3.1)

وعليه فإن: (AQ) = 1 = G - 1

1 = 3 - 1

$t \neq 2$

من هذا نستنتج بأن المعادلة الثانية غير مشخصة.

وفي نهاية هذا الفصل فإنـه لا يوجـد اتفـاق بـين الاقتصـاد بـين القياسـيين حـول واقعيـة التشخيص فهل حالة فوق التشخيص Over Identification أكثر واقعية من حالة Under Identification ، والتطرق إلى هذا الموضوع يحتاج دراسات متعمقة خارج نطـاق هـذا الكتـاب. وقبـل أن ينتهـي هذا الكتاب لابد من الإشارة إلى أن بقية الطرق لمعالجة المعادلات الآنية هي الأخـرى تحتـاج إلى دراسات أوسع وأعلى من مستوى هذا الكتاب الذي اكتفينا فيه بأن أعطينا الأسـس الأوليـة لهـذا الموضوع.

١٤,٦,٢ التمارين:

١- ما هو المقصود بمفهوم التشخيص؟ متى تكون المعادلة في النمـوذج مشخصـة. ذات تشـخيص علوي، وذات تشخيص سفلي؟ وهل هذه الصيغ كافية (Sufficient) للتشخيص؟

٢- من نموذج العرض والطلب التالي:

Demand $: Q_t = a_o + a_1P_t + U_{1t}$ $, a_1 < 0$

Supple $: Q_t = b_o + b_1P_t + U_{2t}$ $, b > 1$

أ- حدد فيما إذا كان الطلب والعرض مشخصا. ذا تشخيص علوي أو ذا تشخيص سفلي.

ب- ماذا يعني إنحدار ($Q_t$) على ($P_t$)، ناقش.

٣- من نموذج العرض والطلب التالي:

Demand $: Q_t = a_o + a_1P_t + a_2Y_t + U_{1t}$ $, a_1 < 0, a_2 > 0$

Supple $: Q_t = b_o + b_1P_t + b_2T + U_{2t}$ $, b_1 > 0, b_2 > 0$

أ- حـدد فـيما إذا كانـت دالـة العـرض أو الطلـب مشخصـة، ذات تشـخيص علـوي، أو ذات تشخيص سفلي.

ب- أوجد الصيغة المختزلة.

جـ- أشتق صيغة للمؤشرات الهيكلية.

٤- إشارة إلى نموذج العرض والطلب التالي:

Demand $: Q_t = a_o + a_1P_t + a_2Y_t + a_3W_t + U_{1t}$

Supple $: Q_t = b_o + b_1P_t + U_{2t}$

حيث ($W_t$) تشير إلى الثروة. وتوقع $a_3 > 0$

أ- حدد فيما إذا كانـت معادلـة العـرض أو الطلـب مشخصـة، ذات تشـخيص علـوي، أو ذات تشخيص سفلي.

ب- احسب مؤشرات المنحنى الهيكلية.

٥- من النموذج الكلي البسيط التالي:

$$C_t = \beta_{10} + \beta_{11}Y_t + U_{1t}$$

$$I_t = \beta_{20} + \beta_{21}Y_t + \beta_{22}Y_{t-1} + U_{2t}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث (C) الاتفاق على الاستهلاك. (I) الإنفاق على الاستثمار (Y) الدخل. (G) الإنفاق الحكومي. (متغير محدد مسبقا) ($Y_{t-1}$) متغير محدد مسبقا.

أ- اشتق معادلات الصيغة المختزلة وحدد أي منها مشخصة تماما، ذات تشخيص علوي، أو ذات تشخيص سلفي.

ب- أي من الطرق تستخدم لتقدير معلمات النموذج.

٦- اشتق شطري الدرجة والرتبة للتشخيص، حدد التشخيص (Identifibility) لدوال الاستهلاك والاستثمار في النموذج في التالي:

$$C_t = a_o + a_1Y_t + a_2C_{t-1} + U_{1t}$$

$$I_t = \beta_o + \beta_1 r_t + \beta_2 I_{t-1} + U_{2t}$$

$$r_t = \gamma o + \gamma_1 Y_1 + \gamma_2 M_t + U_{3t}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث: (C) = الاستهلاك، (Y) = الدخل. (I) = الاستثمار، ($r_t$) = سعر الفائدة، ($M_t$)= عرض النقود، ($G_t$) = الإنفاق الحكومي، والمتغيرات ($M_t$) , ($G_t$) هي متغيرات خارجية، وأن المتغيرات العشوائية تحقق فرضيات نموذج الانحدار الخطي التقليدي.

٧- اكتب نموذج العرض والطلب لسلعة معينة بحيث تكون معادلات العرض والطلب ذات تشخيص علوي، أعط شرحا على ضوء النظرية الاقتصادية.

تم بعون الله

"و الله ولي التوفيق"

# الملاحق

الملحق (A): المفاهيم الأساسية المستخدمة في الاقتصاد القياسي التحليلي.

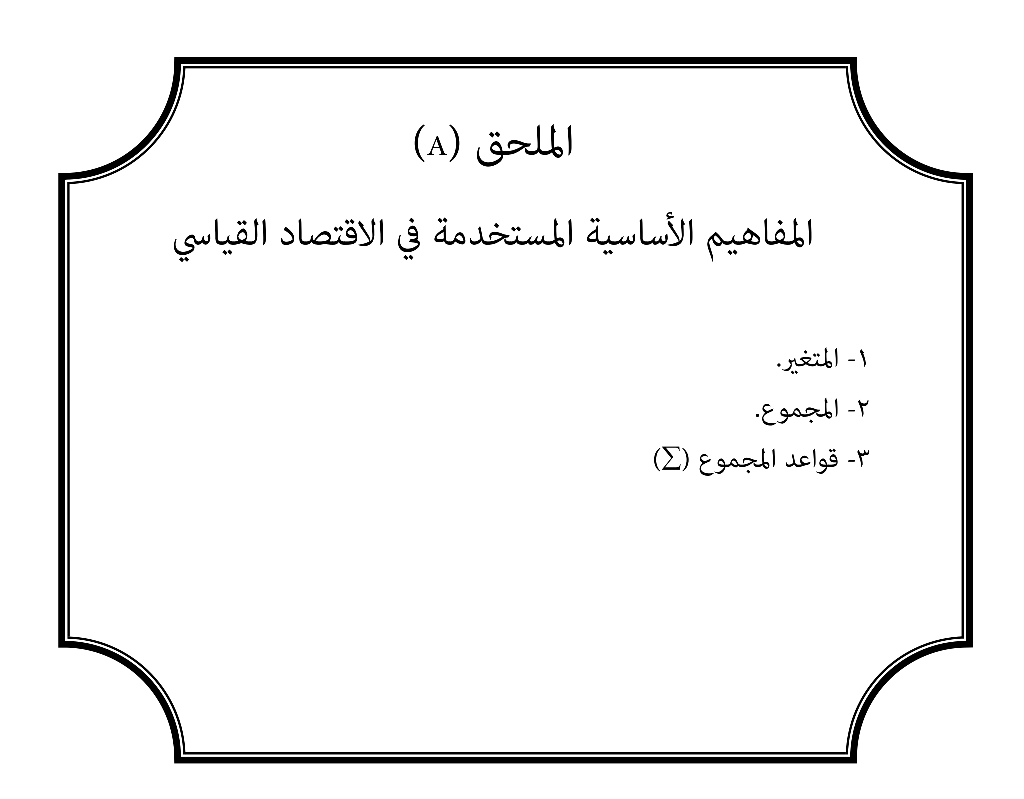
الملحق (B): جبر المصفوفات المستخدمة في الاقتصاد القياسي التحليلي .

الملحق (C): المشتقات وقواعد التفاضل.

الملحق (D): التوزيع الطبيعي لكل من $F, \chi^2, t, Z$.

الملحق (E): اختبار الفرضيات.

الملحق (F): الجداول الإحصائية والقياسية المستخدمة في الاختبارات.



# الملحق (A)

## المفاهيم الأساسية المستخدمة في الاقتصاد القياسي

١- المتغير.

٢- المجموع.

٣- قواعد المجموع ($\sum$)

# الملحق (A)

# المفاهيم الأساسية المستخدمة في الاقتصاد القياسي

المتغير Variable:

يمثل الظاهر المدروسة التي تتغير مفرداتها ويرمز إليه بأحد الرموز مثل $X_i$.

* المجموع : $\Sigma$ Summation

يشير إلى مجموع مفردات المتغير ويأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

حيث إن i = ١،٢،٣، ....... n

X = الظاهرة المدروسة أو المتغير

n = حجم القيمة أو عدد المشاهدات المدروسة

مثال (١):

أوجد مجموع البيانات (data) التالية:

20, 19, 18, 21, 22

الحل:

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} X_i = 20 + 19 + 18 + 21 + 22 = 100$$

كذلك يمكن إيجاد جزء من مجموع $X_i$.

مثال:

$$\text{Find } \sum_{i=1}^{3} X_i = 20 + 19 + 18 = 57 \text{ Where : } i = 1,2,3$$

$$\text{Find } \sum_{i=3}^{4} X_i = X_3 + X_4 = 21 + 22 = 39$$

$$\text{Find } \sum_{i=1}^{5} X_i = X_3 + X_4 + X_5 = 18 + 21 + 22 = 61$$

القوانين الخاصة بالمجموع $\left( \sum_{i=1}^{n} X_i \right)$:

أي لمجمــوع مفــردات المتغيــر $\sum X_i$ هنــاك مجموعــة مـن القـوانين الخاصــة بالمجمـوع منها:

١- مجموع الثابت:

إذا كانت (C) تمثل قيمة ثابتة فإن مجموعها عبارة عن nc أي

$$\sum_{i=1}^{n} C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = nc$$

مثال (٢) أوجد $\sum$ لعدد (٧) ستة مرات؟

الحل:

$$\sum_{i=1}^{6} 7 = n.c = 6\ (7) = 42 \text{ i.e } = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 7\ (6)$$

$$\therefore\ C = 42$$

٢- ضرب الثابت (C) في مفردات (مشاهدات) المتغير (الظاهرة) أي:

$$\sum_{i=1}^{n} CX_i$$

في هذه الحالة فإن الثابت يخرج كعامل مشترك ويوضع قبل $\sum$ كما يلي"

$$\sum_{i=1}^{n} CX_i = C\sum_{i=1}^{n} X_i$$

والسبب هو أن: $\sum_{i=1}^{n} CX_i = CX_1 + CX = + \dots + CX_n$

ويأخذ العامل المشترك تحصل فإن: $= C \sum X_i$

مثال (٤):إذا كانت Xi تساوي $Xi = 2,4,6,8,10$ وكان الثابت $C = 3$، أوجد $\sum CX_i$

الحل:

$$\because \sum CX_i = C\sum X_i = 3\ (2 + 4 + 6 + 8 + 10)$$

$$= 3(30)$$

$$\therefore \sum CX_i = C\sum Xi = 90$$

٣- إذا كان $X_i$ يمثل متغيرا ما، وأن b،a ثوابت فإن:

$$\sum_{i=1}^{n}(a + bX_i) = na + b\sum X_i$$

مثال: بافتراض أن $a = 5$، $b = 2$ وأن:

$$X_i = 2, 4, 6, 8, 10$$

أوجد: $\sum_{i=1}^{n}(a + bX_i)$

الحل:

$$\because \sum_{i=1}^{n}(a + bX_i) = na + b\sum X_i$$

$$= 5\ (5) + 2\ (2 + 4 + 6 + 8 + 10)$$

$$= 25 + 2(30)$$

$$\therefore \quad = 25 + 60 = 85$$

٤- مجموع قيم متغيرين يساوي مجموع كلا منهما أي:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + y_i) = \sum X_i + \sum y_i$$

مثال (٥) بافتراض أن: $X_i = 2, 4, 6, 8, 10$

$$y_i = 5, 10, 15, 20, 25$$

أوجد: $\sum_{i=1}^{n}(X_i + y_i)$

الحل:

$$\because \sum_{i=1}^{n}(X_i + y_i) = \sum X_i + \sum y_i$$

$\because \sum X_i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 \quad = 30$

$\because \sum y_i = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 = 75$

$\therefore \sum X_i + \sum y_i = 30 + 75$

$\therefore \sum (X_i y_i) = 105$

٥- أمثلة مهمة:

مثال (٥,١) مجموع المربعات: Sun Squares:

مما يأتي أوجد $\sum X_i^2 \quad , (\sum X_i)^2$

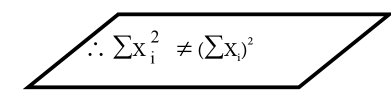
$X_i = 2, 4, 6, 8 , 10$

الحل:

$\therefore \sum X_i^2 = (2)^2 + (4)^2 + (6)^2 + (8)^2 + (10)^2 \quad = 220$

$\therefore (\sum X_i)^2 = (2 + 4 + 6 + 8 + 10)^2 = (30)^2 \quad = 900$

من هنا نستنتج بأن:




مثال (٥,٢) مجموع ضرب المتغيرات:

مما يأتي أوجد: $\sum X_i y_i \neq \sum x \sum y_i$

بافتراض أن: $Xi = 2, 4, 6, 8 , 10$

$y_i = 4, 10, 15, 20, 25$

$\therefore \sum Xiyi = (2)(4) + (4)(10) + 6(15) + 8(20) + (10)(25) = 555$

$\sum X_i \sum y_i = \sum X_i = (2 + 4 + 6 + 8 + 10) \quad = 20$

$\sum y_i = (4 + 10 + 15 + 20 + 25) \quad = 75$

$\therefore Xiyi = (30)(75) = 2250$

وهذا يعني بأن $\sum Xiyi \neq \sum Xi \sum yi$

مثال (٥,٣): جمع، طرح، ضرب وقسمة مفردات المتغير بثابت: أوجد:

إذا كانت: $\sum X_i + 7 \quad , \quad \sum X_i - 7$

$X_i = 2,4,6,8,10 \qquad \sum (X_i + 7) \quad , \sum (X_i - 7)$

الحل:

$\because X_i = 2, 4, 6, 8, 10 \quad \text{and } n = 5$

$\therefore \sum X_i + 7 = (2 + 4 + 6 + 8 + 10) + 7$

$= 30 + 7 \quad = 37$

وأيضا فإن: $\sum X_i - 7 = 23$

بينما:

$\sum(X_i + 7) = \sum X_i + n(7)$

$= 30 + 5\ (7)$

$= 30 + 35 = 65$

$\therefore \sum (X_i + 7) \neq \therefore \sum X_i + 7$

$\sum (Xi - 7) \neq \sum X_i - 7$

مثال (٥,٤) أوجد قيمة المقدار التالي: $\frac{\sum X_i - 3}{2} \quad , \quad \frac{\sum X_i + 3}{2}$

باستخدام البيانات المذكورة أعلاه.

$\therefore \sum X_i = 30 \qquad \therefore \frac{\sum X_i + 3}{2} = \frac{30+3}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$

وأيضا: $\frac{\sum Xi - 3}{2} = \frac{30-3}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$

بينما $\sum$ للمقدار ككل يختلف عما ذكر أعلاه وكالآتي:

مثال (٥,٥) $\sum \frac{X_i - 3}{2}$ وهذا يعني ما يلي:

$$\sum \frac{X_i - 3}{2} = \left(\frac{X_1 - 3}{2}\right) + \left(\frac{X_2 - 3}{2}\right) + \left(\frac{X_3 - 3}{2}\right) + \left(\frac{X_4 - 3}{2}\right) + \left(\frac{X_5 - 3}{2}\right)$$

بالتعويض: $= \frac{2-3}{2} + \frac{4-3}{2} = \frac{6-3}{2} + \frac{8-3}{2} + \frac{10-3}{2}$

$= -0.5 + 0.5 + 1.5 + 2.5 + 3.5 = 7.5$

مثال (٥,٦): أوجد $\sum_{i=1}^{3} (5X_i - 1) =$

$(5X_1 - 1) + (5X_2 - 1) + (5X_3 - 1) = (5(2) - 1) + (5(4) - 1) + (5(6) - 1)$

$= 9 + 19 + 29 = 57$

تمارين:

١- أوجد قيمة المقادير الإحصائية الآتية:

$$\sum_{i=1}^{4} 5 \;,\; \sum_{i=1}^{5} 7 ,\; \sum_{i=1}^{10} X_i ,\; \sum_{i=1}^{10} X_i y_i ,\; \sum_{i=1}^{n} aX_i ,\; \frac{\sum_{i=1}^{6} X_i f_i}{\sum_{i=1}^{6} fi}$$

حيث أن: $X_i = X_1, X_2, X_3, ..., X_n$:

٢- إذا علمت أن المغيرين $y_i, X_i$ يأخذان القيم التالية:

$X_1 = 2 \quad , X_2 = -5 \quad , X_3 = 4 \quad , X_4 = 8$

$y_1 = -3 \quad , y_2 = -8 \quad , y_3 = 10 \quad , y_4 = 6$

احسب ما يلي:

① $\sum X$ ② $\sum y$ ③ $\sum Xy$ ④ $\sum X^2$ ⑤ $\sum y^٢$ ⑥ $\sum Xy^2$ ⑦ $(\sum X)(\sum y)$ ⑧ $\sum (X + y)(X-y)$

⑨ $$\frac{n\sum Xy - (\sum X)(\sum y)}{n\sum X^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}$$

⑩ $$\frac{n\sum Xy - (\sum X)(\sum y)}{\sqrt{n\sum X^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}\sqrt{n\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}}}$$

٣- من المعلومات المتوفرة عن المتغيرين $y_i, X_i$:

$X_i = 5 , 4, 9 , 8, 10 , 12.$

$yi = 3, 7, 6, 8, 14, 7.$

احسب ما يلي:

① $\sum X_i^2$ ② $\frac{\sum X_i - 1}{\sum y_i}$ ③ $\sum X^٢ \frac{(\sum X)^2}{n}$ ④ $(\sum X)^٢$

⑤ $\sum (X_i - y_i)^2$ ⑥ $\frac{\sum X_i}{\sum y_i} - 1$ ⑦ $\sum y_i^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}$

# الملحق (B)

## جبر المصفوفات

B1 - أساسيات المصفوفات

B2 - أنواع المصفوفات

B3 - العمليات الحسابية للمصفوفات

B4: نموذج بسيط لتحديد الدخل القومي

# الملحق (B)

# جبر المصفوفات المستخدمة في الاقتصاد القياسي التحليلي

B.1 أساسيات المصفوفات Matrices:

يقصد بالمصفوفة Matrix المنظومة التي تضم مجموعة من الأعداد والقيم والرموز التي تشكل عناصر المصفوفة المرتبة في شكل صفوف (n) Rows وأعمدة (m) Columns وتقرأ المصفوفة عادة بـ (n.m). وتأخذ المصفوفة بعناصرها شكل مستطيل أو مربع محصورة داخل قوسين. ويرمز للمصفوفة بالرمز [A] أو [B] أو أي حرف كبير. أما عناصرها فيرمز لها بالحرف الصغير ومذيله بدليل يوضح موقع العناصر في داخل المصفوفة مثل aij في المصفوفة [A] حيث تشير (i) إلى رقم الصنف وأن (j) تشير إلى رقم العمود. وعليه تكتب المصفوفة بصورة عامة كما يلي:

$$\underset{(n.m)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ am1 & am2 & \cdots & amn \end{bmatrix}$$

فمثلا يكون موقع العنصر a32 في الصنف الثالث العمود الثاني. وتشير (n.m) إلى درجة المصفوفة (order) فالمصفوفة A هي من الدرجة (٣,٣) أي أن المصفوفة متكونة من ثلاثة صفوف ثلاثة أعمدة. وعليه فإن درجة المصفوفة تذيل تحت اسم المصفوفة أي (2.3) A.

مثال١: حدد درجة المصفوفة A التالية:

$$\underset{(3.2)}{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

أن درجة هذه المصفوفة هي (٣,٢) أي ثلاثة صفوف بعمودين وهي أيضا تساوي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = 4 & a_{12} = -2 \\ a_{21} = 10 & a_{22} = 1 \\ a_{31} = 2 & a_{32} = 6 \end{bmatrix}$$

(3.2)

B.2 بعض أنواع المصفوفات:

سيتم ذكر الأنواع من المصفوفات ذات العلاقة الوثيقة بالقياسي التحليلي وهي:

١- المصفوفة المربعة Square Matrix:

وهي المصفوفة التي يكون عدد الصفوف (n) فيها مساويا لعدد الأعمدة (m) فمثلا:

إذا كانت المصفوفة [ A ] مصفوفة مربعة ومن الدرجة (n . m) فإنها تأخذ الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 10 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.3)

٢- المصفوفات المتساوية Equalized matrices:

يقال للمصفوفتين [A] و [B] بأنهما متساويتان إذا كانت كل العناصر في المصفوفة [A] مساوية لكل العناصر المناظرة لها في المصفوفة [B] أي أن: aij = bij وأن المصفوفتين لهما نفس الدرجة أي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow B = (2.2) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

(2.2)

٣- المصفوفة المحولة Transpose of matrix:

إن مبدول المصفوفة [A] مثلا هو عبارة عن مصفوفة جديدة يرمز لها بالرمز [A'] أو $A^T$. ويمكن الحصول عليها بتحويل أو تبديل الصفوف في المصفوفة [A] إلى أعمدة وأعمدتها إلى صفوف. فإذا كانت لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

(3.2)

فإن مبدولتها هي:

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

(3.2)

ومن هذا نستنتج أن المصفوفة [A] ذات الدرجة (٣,٢) بالتحويل أصبحت درجتها (٢,٣) أي تحويل الصفوف إلى أعمدة والأعمدة إلى صفوف.

٤- المصفوفة المتماثلة Symmetrie Matrix:

وهي مصفوفة مربعة تكون عناصرها (ij) مساوية إلى (ji) ولذلك فإن محولة المصفوفة مساو المصفوفة الأصلية أي A = A'. والمثال الآتي يوضح ذلك:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

فإن مبدولتها هي:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

٥- المصفوفة الصفرية Zero matrix:

هي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها تساوي صفرا وتأخذ الشكل الآتي:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وأن عملية جمع أو طرح عناصر هذه المصفوفة من عناصر مصفوفة أخرى يترك المصفوفة الجديدة بدون تغير. أي عندما تضيف أو تطرح عناصر المصفوفة [A] إلى أو من عناصر المصفوفة [B] فإن ذلك لا يغير عناصر المصفوفة [B].

وعند ضرب عناصر المصفوفة الصفرية في عناصر مصفوفة أخرى ينتج عنه مصفوفة صفرية. أي حالتها حالة الصفر في العمليات الجبرية الاعتيادية.

٦- المتجه الأفقي والعمودي Row and Column Vector:

إذا كانت درجة المصفوفة هي (1-n) فتسمى عندئذ متجها أفقيا أو صفيا ومثال ذلك هو:

$$\underset{(1.n)}{X} = [X_{11}, X_{12}, X_{13}, ..., X_n]$$

درجة هذا المتجة هي (1.n) أي صف واحد بـ (n) من العناصر.

أما إذا كانت درجة المصفوفة هي (n.1) فتسمى عندئذ متجها عموديا.

ومثال ذلك هو:

$$\underset{(n.1)}{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ bn1 \end{bmatrix}$$

٧- المصفوفة القطرية Diagonal Matrix:

هي المصفوفة المربعة التي تكون جميع عناصرها القطرية مساوية للصفر بينما العناصر القطرية فتتكون من قيم عددية مختلفة كما هو موضح أدناه:

$$\underset{(3.3)}{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة لها استخدام واسع في تحليل القياسي.

٨- المصفوفة العددية Scalar Matrix:

وهي المصفوفة التي عناصرها القطرية مساوية قيما ثابتة (K) وبحيث أن $K \neq 1$ كالمصفوفة الآتية:

$$\underset{(3)}{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

٩- المصفوفة المحايدة (مصفوفة الواحد) Identity matrix (Unit):

وهي المصفوفة القطرية التي عناصر القطر فيها مساوية للواحد الصحيح وبقية العناصر خارج القطر تساوي صفرا. ويرمز لها بالرمز ($I_n$) وتأخذ الشكل الآتي:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولهذه المصفوفة أهميتها البالغة في الدراسات القياسية. وتكون مصفوفة الواحد مشابهة للعد واحد في الجبر العادي. وعليه فما دام ضرب المصفوفة في مصفوفة الواحد يترك

المصفوفة الأصلية بدون تغير فإنها تأخذ النسق الآتي:

$$AI = IA = A$$

كما أن ضرب مصفوفة الواحد في نفسها يترك المصفوفة بدون تغير أي:

$$I^* I = I^2 = I$$

١٠- المعامل العددي (Scaler):

تدعى المصفوفة المكونة من صف واحد وعمود واحد بالعامل العددي.

مثال: $\underset{(1.1)}{A} = [28] \text{ or } \underset{(1.1)}{B} = [8]$

١١- المصفوفة الجزئية Sub-Matrix:

هي المصفوفة التي نحصل عليها عند حذف صف أو عمود (أو أكثر) من المصفوفة الأصلية. فإذا كانت المصفوفة الأصلية هي:

$$A= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

حيث تم تجزئتها إلى المصفوفات الجزئية الآتية:

$$\underset{3..3}{A_{11}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \; \underset{(3.1)}{A_{12}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \; \underset{(1.3)}{A_{21}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; \underset{1.1}{A_{22}} = [1]$$

وهناك أنواع أخرى من المصفوفات قد لا نحتاجها في هذه الدراسة، وأن ما تم ذكره هو أهم ما تم استخدامه في دراسة القياسي الاقتصاد التحليلي، وستجد تطبيقات عليها ابتداء من الفصل السادس ولغاية الفصل الرابع عشر.

B.3 العمليات الحسابية للمصفوفات:

١- عملية جمع وطرح المصفوفات Addition and Subtraction of matrices:

إذا كانت المصفوفتان [A] و [B] لها نفس الدرجة (n.m) فإن حاصل جمعها أو (طرحها) يساوي المصفوفة [C] والتي درجتها مساوية إلى (n.m).وكل عنصر من عناصرها Cij هو حاصل جمع (أو طرح) العنصرين المتناظرين من المصفوفتين أي: a11 مع $C_{11} = b_{11}$ وهذا يعني أيضا:

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}] = [C_{ij}]$$

مثال:

أوجد مجموع المصفوفتين [A] و [B]، ثم أوجد حاصل طرحهما:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\therefore A + B = \underset{(2.2)}{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}} + \underset{(2.2)}{\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{(2.2)}{\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}} = C$$

أيضا فإن:

$$A - B = \underset{(2.2)}{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}} - \underset{(2.2)}{\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = C$$

وعليه لا يجوز جمع أو طرح مصفوفتين من درجتين مختلفتين.

٢- خواص الجمع:

إذا كانت المصفوفات [A]، [B] و [C] نفس الدرجة (n.m) وعليه فإن لهما الخواص التالية:

1. $A + B = B + A$

2. $A + [B + C] = [A + B] + C$

أيضا $A + [B - C] = [A + B - C$

3. $K [A + B] = kA + KB = [A+B]$

حيث إن K هو معامل عددي (Scaler).

٣- ضرب المصفوفات Matrices Multyiphcation:

يمكن ضرب المصفوفتين [A] و [B] في حالة واحدة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة [A] مساويا لعدد الصفوف في المصفوفة [B] أي نضرب عناصر كل صف من المصفوفة [A] في عناصر كل عمود في المصفوفة [B] وحسب الترتيب وثم نجمع حاصل الضرب.

مثال: أوجد حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix} B=\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 5 & 10 \\ 13 & 2 \end{bmatrix} = C = \begin{bmatrix} (3)6+6(5)+7(13) & (3)(12)+6(10)+11(2) \\ 12(6)+9(5)+11(13) & (12)(12)+9(10)\ 11(12) \end{bmatrix}$$

(2.3) (3.2) (2.2)

$$C=\begin{bmatrix} 139 & 110 \\ 260 & 256 \end{bmatrix}$$

(2.2)

أي أن المصفوفة [C] حققت شرط التطابق (Conformable).

وإذا لم يتحقق شرط التوافق فإن ذلك يعني لا يجوز إجراء عملية الضرب.

مثال:

المصفوفتان [C] و [A] غير قابلتين للضرب لأنهما غير متوافقتين أي:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 10 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(2.3) $\neq$ (2.3)

حيث يتضح بأن الصفوف لا تساوي الأعمدة وعليه لا تتم عملية الضرب.

مثال:

أوجد القيمة (V) من البيانات عن السعر (P) والكمية (Q) المذكورة أدناه:

$$Q=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 9 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(٤,٤) الأعمدة = الصفوف (٤,١)

الحل:

∴ القيمة = الكمية في السعر ← $\therefore V = q.P$

(4.1) (4.4) (4.1)

(4.1) = (4.1)

∴ عملية الضرب جائزة لتوفر شرط التوافق وهو أن عدد الأعمدة مساو لعدد الصفوف.

وأن حاصل الضرب هو متجه عمودي متكون من أربعة صفوف وعمود واحد.

٤- ضرب متجهين:

لضرب متجهين نتبع نفس قاعدة ضرب مصفوفتين وهي التطابق بين الأعمدة والصفوف.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

(1.3) (3.1)

ولتوفر شرط التوافق وهو أن الأعمدة مساوية للصفوف، إذن يجوز إجراء عملية الضرب لنحصل على (١,١) وهو عامل عددي Scaler أي:

$$\therefore [A] * [B] = [a1b1 + a2b2 + a3b3] = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

بافتراض أن مصفوفة [A] و [B] نأخذ البيانات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} * B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \end{bmatrix}$$

(1.3) (3.1) (1.1)

(1.1) Scaler

٥- ضرب مصفوفة بمتجه:

باتباع نفس صيغة الضرب وهي البحث عن تساوي الأعمدة مع الصفوف في كل من درجة المصفوفة والمتجه.

مثال:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \therefore Xb = \begin{bmatrix} 31 \\ 20 \\ 36 \end{bmatrix}$$

(3.3) (3.1)

(3.3) (3.1) (3.1)

٦- ضرب متجه بمصفوفة:

إذا كان المتجة [b] هو: $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$

وأن المصفوفة [X] هي: (١,٣)

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{3} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}$$

(3.3)

وعليه فإن حاصل ضربهما هو مصفوفة [C] ذات الدرجة (١,٣)

مثال:

إذا كانت

$$b = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [b][x] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 53 & 21 \end{bmatrix}$$

٧- خواص عملية ضرب المصفوفات:

إذا كانت المصفوفات [A] ، [B]، [C] هي مصفوفات متوافقة (Conformable) فإن حاصل ضربها هو:

1. $A\,[B.C] = [A.B]C$
2. $A\,[\,B + C\,] = AB + AC$
3. $[A + B\,].\,C = AC + BC$
4. $(A)'A = A$
5. $(A + B)' = A' + B'$
6. $(AB)' = B'A'$
7. $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$
8. $(ABC)\text{-}1 = C^{-1}\,B^{-1}\,A^{-1}$
9. $(A^{-1})^{-1} = A$
10. $(A^{'})\text{-}1 = A^{-1}$
11. $A^{-1}A = I$
12. $AX = b$

بالضرب المسبق في لـ A نحصل على:

$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$

$$X = A^{-1}b$$

حيث إن $A^{-1}A = I$. والصيغة الأخيرة تمثل محددة كريمر، أن لهذه الخواص أهمية بالغة في اشتقاقات مكونات قدرات النموذج القياسي وخصائصها واختباراتها.

٨- معكوس المصفوفة Inverse of matrix:

لإيجاد معكوس المصفوفة [A] نطبق الصيغة التالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} . \text{adj } A$$

وعليه نتبع الخطوات أدناه للحصول على معكوس مصفوفة A:

١- التحقق من أن المصفوفة مربعة لأنه لا يمكن إيجاد معكوس المصفوفة لغيرها.
٢- استخراج المحدد والتأكد بأن قيمة المحدد لا تساوي صفر أي $0 = |A|$.
٣- إيجاد مصفوفة المرافقات (Co-factor) أي $A^c$.
٤- إيجاد محولة (مبدولة) مصفوفة المرافقات أي $A^T$ أو $A'$.
٥- ضرب المقدار $\frac{1}{|A|}$ في عناصر المصفوفة المحولة $A^T$ لنحصل على $A^{-1}$.
٦- للتأكد من أن المعكوس صحيح نضرب معكوس المصفوفة $A^{-1}$ بالمصفوفة ذاتها A لنحصل على مصفوفة الوحدة أي $A^{-1}. A = I$.

مثال:

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

١- أن المصفوفة [A] ذات درجة (٣,٣) وهي مربعة إذن يجوز إيجاد معكوس لها.

٢- تستخرج المحدد $|A|$ ويجب أن لا تساوي قيمته صفرا، فقيمة المحدد تساوي:

$$|A| = [4\,(3) - (-1)1\,] -1\,[(-2)(4) -3\,(1)\,] + (-5)\,[(-2)(-1) -3\,(3)\,] \neq 0$$

٣- نجد مصفوفة المرافقات $A^C$ كما يلي:

$$A^C = \begin{bmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 1 & 31 & 7 \\ 16 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

٤- نجد مبدول المصفوفة $A^T$ كما يلي:

$$A^T = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} = adjA$$

٥- نضرب مصفوفة ajd في $\frac{1}{|A|}$ لنحصل على معكوس المصفوفة A-1 كما يلي:

$$A^{-1} = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/98 & 1/98 & 16/98 \\ 11/98 & 31/98 & 6/98 \\ -7/98 & 7/98 & 14/98 \end{bmatrix}$$

٦- وللتأكد من صحة الجواب نطبق القاعدة التالية: $A^{-1} A = 1$

وعليه:

$$A^{-1} = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B.4 نموذج بسط لتحديد الدخل القومي (نموذج التوازن الكلي البسيط):

إذا كان لدينا نموذج اقتصادي عن مكونات الدخل القومي يأخذ الشكل الآتي:

النموذج (١)

$$y = C + I + G \quad ... (1)$$

$$C = a + by^d \quad ... (2)$$

$$y^d = y - T \quad ... (3)$$

$$T = To + ty \quad ... (4)$$

$$I = Io \quad ... (5)$$

حيث تشير:

| | |
|---|---|
| (Y) | إلى الدخل القومي. وهو متغير داخلي تتحدد قيمته داخل النموذج. |
| (C) | إلى الاستهلاك القومي. وهو متغير تتحدد قيمته من داخل النموذج. |
| ($y^d$) | إلى إجمالي الضرائب. وهو متغير داخلي. |
| (I) | إلى الاستثمار القومي. وهو متغير خارجي يأخذ الرمز $I_o$. |
| (G) | إلى الانفاق العام. وهو متغير خارجي يأخذ الرمز $G_o$. |
| ($T_o$, $I_o$, b, a) | معاملات وثوابت |

ولحل هذا النموذج باستخدام المصفوفات نعيد كتابته بحيث يتلائم واستخدام صيغة كريمر السابقة الذكر وكما يلي:

$$\therefore\ C = a + by^d$$

$$\therefore\ C = a + by - bT$$

بالتعويض عن قيمة $Y^d$ في المعادلة (٣) أعلاه وعليه فإن النموذج سوف يأخذ الشكل الآتي:

النموذج (٢)

$$Y = C + I_o + G_o \quad \dots (1)$$

$$C = a + by - bT \quad \dots (2)$$

$$T = T_o + ty \quad \dots (3)$$

وباستخدام صيغة كريمر الممثلة في منظومة المعادلة التالية:

$$AX = b$$

نحتاج إلى تعديل معادلات النموذج (z) ليتلائم وقاعدة كريمر وذلك بعزل المتغيرات الداخلية في جانب والمتغيرات الخارجية والثوابت والمعلمات في الجانب الآخر وكما يلي:

$$Y - C + o \quad = I_o + G_o$$

$$-by + C + bT \ = a$$

$$-ty + o \ + T \quad = T_o$$

وبتطبيق قاعدة كريمر نحصل على المصفوفة والمتجهات التالية:

$$A \quad . \quad X \ = \quad b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_o + G_o \\ a \\ T_o \end{bmatrix}$$

حيث يمثل A مصفوفة معلمات المتغيرات الداخلية Endogenous.

X متغيرات النموذج الداخلية Exogenous.

b قيم المتغيرات الخارجية وقيمة الثوابت Constants.

ولحل هذه المنظومة نحتاج إلى اتباع الخطوات التالية:

١. حساب قيمة المحدد $|A|$ كما يلي:

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 - b + bt$$

٢- حساب القيم التوازنية لكل من المتغيرات الداخلية كما يلي:

$$\overline{Y} = \frac{A_1}{|A|}$$

حيث أن $A_1$ هي مصفوفة تتضمن قيم (Y) بما يساويها من قيم معلومة في المتجة [b] وعليه فإن:

$$A^1 = \begin{bmatrix} I_o + G_o & -1 & 0 \\ a & 1 & b \\ T & 0 & 1 \end{bmatrix} = a - bT_o + I_o + G_o$$

$$\therefore \overline{Y} = \frac{a - bT_o + I_o + G_o}{1 - b + bt}$$

٣- وباتباع نفس الأسلوب نستطيع الحصول على القيم التوازنية لكل من المتغيرات الداخلية الأخرى وهي $\overline{T}, \overline{C}$ وبتطبيق $\overline{C} = \frac{A_2}{|A|}$ , $\overline{T} = \frac{A_3}{|A|}$.

وكذلك يمكن أن نحصل على القيم التوازنية لكل من المتغيرات الداخلية $\overline{y}\ \overline{T}, \overline{C}$ وذلك باستخدام صيغة معكوس المصفوفة بالشكل الآتي:

$\therefore AX = b$

بالضرب المسبق لمنظومة كريمر بمعكوس مصفوفة A نحصل على:

$$A^{-1}A.X = A^{-1}b$$

$$\therefore A^{-1}A = I$$

$$\therefore X = A^{-1}b$$

ومن هذه المنظومة الأخيرة نحصل مباشرة عن القيم التوازنية للمتغيرات الداخلية للنموذج الاقتصادي الكلي. وباتباع نفس هذا الأسلوب يمكن أن نحصل على صيغة اليونيتيف في التحليل القطاعي والتي تأخذ الصيغة الآتية:

$$X = [\, I - A \,]^{-1} . b$$




المشتقات وقواعد التفاضل المستخدمة في الاقتصاد القياسي.

C.1 : مفهوم المشتقة.

C.2 : إيجاد المشتقة الأولى باستخدام التفاضل.

C.3 : القواعد الأساسية للتفاضل.

C .4: المشتقات العليا للدوال

# الملحق (C)

# المشتقات وقواعد التفاضل المستخدمة في القياسي

C.1: مفهوم التغير Concept of Change (المشتقة) :

يقصد به التغيرات التي تحدث في المتغير المستقل (×) وتسبب تغيرات في المتغير التابع (Y) والمشتقة (derivative) هي التي تقيس معدل التغير Rate of Change في الدالة وتعرف رياضيا بالتفاضل differentiation ويرمز لها بالرمز $\frac{dy}{dx}$ .

فإذا كانت لدينا الدالة $y= f(x)$ وبافتراض حدوث تغير طفيف في المتغير المستقل ($\Delta x$) فإن قيمته ستكون $x + \Delta x$ وهذا سيؤدي إلى تغير المتغير التابع إلى:

$y+ \Delta y$. أما متوسط التغير في الدالة فيوضحه المثال التالي:

إذا كانت $y =x^2$ وأن $x = 3$ فإن الدلة ستكون $y = (3)^2=9$ فإذا تغيرت (x) بمقدار قدرة (١) أي أن $\Delta x=1$ فإن القيمة الجديدة للمتغير (x) ستكون: $x +\Delta=1$ فإن القيمة الجديدة للمتغير (x) ستكون: $x + \Delta = + 1$ وعليه ستكون قيمة الدالة (y) كما يلي:

$\therefore \quad y = x^2$

$\therefore \quad x = 4$

$\therefore \quad y = (4)^2 = 16$

وعليه فالتغير في y هو $\Delta y = y_2-y_1 = 16-9 =$ ٧

وعلى هذا الأساس فإن متوسط التغير في الدالة (y) بالنسبة للتغير في المتغير المستقل (x) هو :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{16-9}{4-3}=\frac{7}{1}$$

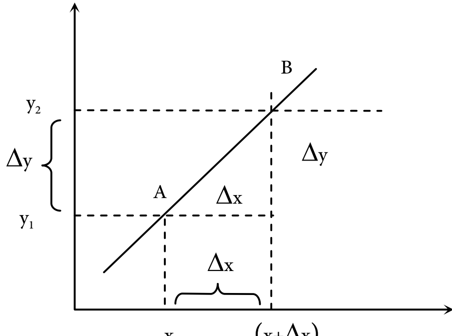
ومن هذا نستنتج أن متوسط التغير في الدالة هو :

عبارة عن النسبة بين مقدار التغير في الدالة (y) منسوبة إلى مقدار التغير في المتغير المستقل أي:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

ويطلـق عـلى $\frac{dy}{dx}$ بالمشـتقة الأولى First derivatives أو تفاضـل dy بالنسـبة لتفاضـل $\Delta x$ .

ويمكن توضيح ذلك بيانيا كما هو مذكور أدناه:




ومن الشكل البياني فإن معدل تغير الدالة هو $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{y + \Delta y}{x + \Delta x}$

وهذا يعني أن معدل التغير هو $\frac{BC}{AC}$ وهو يمثل ميل المنحنى slope ومن هذا نستنتج:

١- إذا كانت $\frac{dy}{dx}$ < ٠ فإن الميل سيكون موجب والمنحنى صاعد والدالة متزايدة.

٢- إذا كانت $\frac{dy}{dx}$ > ٠ فإن الميل سيكون سالب والمنحنى تنازلي والدالة متناقصة.

٣- إذا كانت $\frac{dy}{dx}$ = ٠ فإن الميـل سـيكون صـفر وهـو مـماس المنحنـى والمنحنـى يكـون موازيـا للمحور الأفقي.

C2 : إيجاد المشتقة الأولى باستخدام التفاضل:

لإيجاد المشتقة الأولى نتبع الخطوات التالية:

١- تحديد قيمة التغير في x أي dx .

٢- تحديد قيمة التغير في y أي dy .

٣- إيجاد متوسط التغير في الدالة أي $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

مثال (١):

أوجد قيمة المشتقة الأولى للدالة $y = x^2 - 3$ .

المشتقة الأولى هي : $\frac{dy}{dx} = 2x$

مثال (٢):

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = 2x^3 + ١$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^2$

مثال (٣):

إذا كانت $y = 3x^2 + 2x$ أوجد :

معادلة المماس لمنحنى الدالة عندما $x = 1$

الحل:

لإيجاد معادلة المماس لمنحنى الدالة يتطلب معرفة ميله (S) ونقطة واحدة إحداثياتها هي $y_1, x_1$ ويتم ذلك كالآتي:

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = 6\times + 2 = S$$

وأن المقدار (6x+2) يمثل الميل (s)، فعندما $x_1 = 1$ وهذا يعني أن $x_1$ هي النقطة الأولى على الإحداثي الأفقي (x). وعليه فإن قيمة الميل هي:

$$\therefore S = \frac{dy}{dx} = 6(1) + 2 = 8 \Rightarrow S$$

والآن نحتاج إلى نقطة واحد على الإحداثي (y). ومن استخدام نفس المعادلة الأصلية نعوض عن قيمة $x = 1$ في المعادلة لنحصل على:

$\therefore y = 3(1)^2 + 2(1) \Rightarrow \quad \therefore y = ٥$

وعليه فإن $y_1 = 5$ $\therefore$ النقطة هي (1,5). لتحديد معادلة المماس تستخدم صيغة المماس وهي $\frac{y - 5}{x - 1} = 8$ وبالضرب التبادلي نحصل على المعادلة $y = 8x - 3$ وهي معادلة المماس عندما تكون $x = 1$ .

C3 : القواعد الأساسية للتفاضل (الاشتقاق):

توجد عدة قواعد تلخص بعشرة قواعد سوف نأخذ ما يستخدم منها في الاقتصاد القيـاسي والتي تمثل فيما يلي:

القاعدة الأولى:

"قاعدة التعريف" $y = x^n$ فإن $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

مثال:حيث أن n عدد صحيح موجب.

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

$1-\ y = x^5 = \frac{dy}{dx} = 5x^4$

$2-\ y = x^9 = \frac{dy}{dx} = 9x^8$

* قاعدة رياضية $3-\ y = x = \frac{dy}{dx} = 1\ (x)^{1-1} \quad = x^{\circ} = 1$

$4-\ y = 1 = \frac{dy}{dx} = 0$

$5-\ y = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$

$6-\ y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

القاعدة الثاني: (الضرب في الثابت)

إذا كانت : $Y = c\ f\ (x)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = cf'(x)$

أي أن المشتقة الأولى لحاصل ضرب ثابت في الدالـة = حاصـل ضرب الثابتـة في مشـتقته الدالة:

مثال:

$$1.\ y = 3x^{4} \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(4)x^{4-1} = 12x^{3}$$

$$2.\ y = \frac{4}{3}x^{-3} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}(-3)\,x^{-3-1} = -4\,x^{-4} = \frac{-4}{x4}$$

$$3-\ y = 3\sqrt[3]{x^{2}} = 3\left(x^{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3x^{\frac{2}{3}}$$

الآن المقدار جاهز للتفاضل كما يلي: $\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{2}{3}\right)x^{2/3-1}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

القاعدة الثالثة : (قاعدة الجمع والطرح)

إذا كانت $y = e \pm g \pm h \pm \ldots$

وهذا يعني : $\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{de}{dx} \pm \frac{dg}{dx} \pm \frac{dh}{dx} + \ldots.$

المشتقة الأولى للمجموع الجبري لعدد محدود من الدوال القابلة للاشتقاق يساوي المجموع الجبري لمشتقات هذه الدوال.

مثال:

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$1-\ y = 5\,x^{3} + 3x^{2} + 2x + 6$$

الحل:

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 15x^{2} + 6x + 2$$

$$2-\ y = \frac{2}{x^{3}} - x^{2} + \sqrt{x}$$

الحل:

$$\therefore\ y = 2x^{-3} - x^{2} + x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{dy}{dx} = -6x^{-4} - 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-6}{x^4} - 2x + \frac{1}{\sqrt[2]{x}}$$

القاعدة الرابعة : (قاعدة ضرب الدالة)

إذا كانت $y = e.g$ وحيث إن $e$ و $g$ دالتين للمتغير $x$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = e\left[\frac{dg}{dx}\right] + g\left[\frac{de}{dx}\right]$$

أي:

المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين كل منهما قابلة للاشتقاق عند $x$ = حاصل ضرب الدالة الأولى * مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية * مشتقة الدالة الأولى وكنتيجة لهذه القاعدة هي:

إذا كانت $y = e,g ,h$ حيث أن $e ,g, h$ هي دوال للمتغير $x$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = e.g\left(\frac{dh}{dx}\right) + e.h\left(\frac{dg}{dx}\right) + g.h\left(\frac{de}{dx}\right)$$

وهذه تعني:

المشتقة الأولى لحاصل ضرب ثلاث دوال هي = مجموع حاصل ضرب كل دالتين معا في مشتقة الدالة الثالثة:

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

$1 - y = (2x + 1). (x^2-3)$

الحل:

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = e\left(\frac{dg}{dx}\right) + g\left(\frac{de}{dx}\right)$$

$= (2 x + 1) (2x) + (x^2-3) (2)$

$= 4x^2 + 2x + 2x^2 -6$

$= 6x^2+2x-6$

ويمكن أيضا اتباع حل آخر هو:

بفك الأقواس ينتج مجموع جبري لعدد محدود من الدوال ثم اشتقاقها وفق لقاعدة اشتقاق المجموع الجبري للدوال كالآتي:

$$y = (2x+1)(x^2-3)$$
$$= 2x^3 - 6x + x^3 - 3$$
$$= y = (2x+1)(x^2-3)$$
$$= 2x^3 - 6x + x2 - 3$$

بإعادة الترتيب نحصل $= 2x^3 + x^2 - 6x - 3$

وبإجراء التفاضل نحصل:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2x - 6$$

٢- أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = (x + 1)(3x+2)(x^2-3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = eg\left(\frac{dh}{dx}\right) + eh\left(\frac{dg}{dx}\right) + gh\left(\frac{de}{dx}\right)$$

$$= (x+1)(3x+2)+(2x) + (x+1)(x^2-3)(3)+(3x+2)+(3x+2)(x^2-3)\ (1)$$

$$= (3x^2+2x+3x+2)2x+(x^3-3x+x^2-3)(3)+(3x^3-9x+2x^2-6)\ (1)$$

$$= 6x^3+4x^2+6x^2+4x+3x^3-9x+3x^2-9$$

$$= 6x^3 +10x^2+4x+3x^3+3x^2-9x-9+3x^3+2x^2 -9x-6$$

$$=12x^3+15x^2-14x-15$$

القاعدة الخامسة : (قاعدة القسمة)

إذا كان $y = \frac{e}{g}$ حيث أن $g , e$ دالتين للمتغير ب($x$) وأن $g \neq ٠$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{g\left(\frac{de}{dx}\right) - e\left(\frac{dg}{dx}\right)}{g^2}$$

المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين تساوي:

$$\frac{\text{دالة المقام} \times \text{مشتقة دالة البسط} - \text{دالة البسط} \times \text{مشتقة دالة المقام}}{\text{مربع دالة المقام}}$$

وبشرط أن دالة المقام ≠ صفرا

مثال:

إذا كانت $y = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{g\left(\frac{de}{dx}\right) - e\left(\frac{dg}{dx}\right)}{g^2}$$

$$= \frac{(x-2)(2x+3) - (x2 + 3x - 10)(1)}{(x-2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4} = 1$$

القاعدة السادسة : (دالة الدالة)

إذا كانت: $y = f(g)$ وأن $g = f(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} * \frac{dg}{dx}$$

وهي تمثل المشتقة الأولى لدالة الدالـة (Function of the Function) وتكـون قابلـة للاشـتقاق بالنسبة للمتغير x .

مثال : إذا كانت $y = (x^3-2)^2$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل:

$$\therefore \; y = (x^3-2)2 \rightarrow \quad \therefore \; y = g^2 \rightarrow \therefore \; \frac{dy}{dx}$$

وبافتراض أن $\leftarrow g = x^3-2$

فإن $\frac{dy}{dx} \; \therefore$

وبالاستعاضة فإن :

$$\therefore\ \frac{dg}{dx}=3x^2$$

وبالتعويض عن قيمة g في الدلالة الأصلية نجد أن:

$$\therefore\ y=g^2 \qquad \therefore \frac{dy}{dg}=2g$$

$= 2g * 3x^2$

بالتعويض نحصل على:

$= 2 (x^3-2) * 3x^2$

$= 6\ x2\ (x^3-2)$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5-21x^2$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1- $y = (2x^3+1)^9$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dg}.\frac{dg}{dx}$$

$$\therefore\ y=(2x^3+1)9 \qquad \therefore y=g^9 \qquad \therefore \frac{dy}{dg}=ag^8$$

$$\therefore\ g=2\,x3+1 \qquad \rightarrow \qquad \text{and}\ \frac{dg}{dx}=6x^2$$

بالتعويض نحصل على:

$= 9\ (2x^3+1)^8.3x^2$

$= 56\ x^2\ (2x^3+1)^8$

2- $$y=\left[\frac{2'+x^2}{3-x}\right]^7 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dg}.\frac{dg}{dx}$$

$$\text{and} \therefore\ \ y=g^7 \quad , \quad g=\frac{2+x^2}{3-x} \qquad \therefore\ \frac{dg}{dx}=\frac{g\left(\frac{de}{dx}\right)-e\left(\frac{dg}{dx}\right)}{g^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=7g_6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7\left[\frac{2+x^2}{3-x}\right]^6 . \frac{(3-x)(2x)-(2+x^2)(-1)}{(3-x)^2}$$

$$= \frac{7(2+x^2)^6 .6x-2x^2+2+x^2}{(3-x)6.(3-x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7\frac{(2+x^2)6(2+6x-x^2)}{(3-x)8}$$

القاعدة السابعة: الدالة العكسية:

إذا كانت (y) دالة في (x) فإن الدالة تأخذ الصورة : $y = f(x)$

وإذا كانت (x) دالة في (y) فإن الدالة تصبح $x = f(y)$ وفي هذه الحالـة فـإن الدالـة $x = f(x)$ هي دالة عكسية. وبالتالي فإن المشتقة الأولى للدالة العكسية $\frac{dx}{dy}$ ويمكن استنتاج أن:

$$\frac{dx}{dy} = 1 \Big/ \frac{dy}{dx}$$

وهذا يعني أن مشتقة الدالة العكسية = مقلوب مشتقة الدالة الأصلية.

مثال:

a ) $y = 2x + 5$

وهو مقلوب $\frac{dy}{dx}$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 2$

b ) $6y = 5x^3 + 3x^2 + 4$

بقسمة ٦ على الطرفين $\quad 6.\ \frac{dy}{dx} = 15x^2 + 6x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15x^2+6x}{6}$$

مقلوب $\frac{dy}{dx}$ $\quad \therefore \frac{dx}{dx} = \frac{2}{5x+2x} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5x+2x}{2}$

القاعدة الثامنة : الدالة الأسية Exponential Function

١- إذا كانت الدالة على الصورة $y = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} \quad \text{فإن}$$

حيث إن e هي العدد الطبيعي وقيمته ٢,٧٢,

٢- أما إذا كانت الدالة على صورة:

$y = e^{mx}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = me^{mx}$$

أي أن مشتقة الدالة = مشتقة الأس مضروبة في الدالة نفسها .

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية: $2x^3+5x^2+3$

$a)\ y = 2e$

$$\frac{dy}{dx} = 2(6x^2+10x)\, e^{2x^3+5x^2+3}$$

$b)\ y = e^{3x4+5x^3}$

$$\therefore \ y = e^{\frac{1}{3}}\left(3x^4 + 5x^3\right)$$

$$y = e^{x^4+\frac{5}{3}x^3}$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = \left(4x^3 + 5x^2\right)e^{x^4+\frac{5}{3}x^3}$$

$c)\ y = (2x+1)+e^{2x3-3x}$

الدالة هنا عبارة عن حاصل ضرب دالتين هما:

$(2x+1)$ ، $e2x^3-3x$ وعليه تكون المشتقة الأولى للدالة (y) كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)(6x^2-3)e^{2x^3-3x} + 2e^{2x^3-3x}$$

$$= 12x^3 - 6x + 6x^2 - 3)\, e^{2x^3-3x} + 2e^{2x^3-3x}$$

وجود عامل مشترك هو $e^{2x^3-3x}$ وعليه:

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = e^{2x^3-3x}$$

باستخدام الأساس اللوغاريتمي الطبيعي يمكن إيجاد قيمةe .

C4 : المشتقات العليا للدوال:

Higher - Order Derivations of Functions:

إذا كانت $y = f(x)$ فإنه عند إيجاد المشتقة الأولى للدالة فإنه يـتم إجـراء عمليـة الاشـتقاق للدالة مرة واحدة، فإذا كانت الدالة الجديدة قابلة للاشتقاق وأيضا بالنسبة لـ($x$)، وإذا تم إجـراء الاشتقاق مرة ثانية فإن الناتج يسمى المشتقة الثانية للدالة ويرمز له بالرمز $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

فإذا أجريت عملية الاشتقاق مرة ثالثة يسمى الناتج بالمشتقة الثالثة للدالة وبأخذ الرمـز $\frac{d^3y}{dx^3}$ وبالتالي فإن $\frac{d^4y}{dx^4}$ يسمى بالمشتقة الرابعة للدال وهكذا.

مثال:

أوجد المشتقات العليا للدالة التالية:

$y = 5x^3 + 3x^2 + 10x+18$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = 15x^2 + 6x + 10$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 30x + 6$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 30 \qquad , \qquad \therefore \ \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

# الملحق (D)

التوزيع الطبيعي لكل من Z ، t ، $\chi^2$ ، F

D.1 : مفهوم التوزيع الطبيعي

D.2 : خواص التوزيع الطبيعي

D.3 : التوزيع الطبيعي المعياري (توزيع Z الطبيعي)

D .4: توزيع t الطبيعي

D.5 : خصائص توزيع t الطبيعي

D.6 : توزيع $\chi^2$ الطبيعي.

D.7 : توزيع F الطبيعي

# الملحق (D)

## التوزيع الطبيعي لكل من Z ، t ،$\chi^2$ ، F

### D.1 مفهوم التوزيع الطبيعي Normal Distribution

تعد التوزيعات المستمرة التي تستخدم في معظم المجالات الإحصائية كتوزيع ($\chi^2$, F, Z, t) أكثرها انتشارا. والتوزيع الطبيعي يتميز بأنه متماثل ويشبه الجرس (الناقوس) ويسمى أحيانا بتوزيع كاوس Gussian Distribution نسبة للعالم كاوس (1777-1855) وكانت دالته الاحتمالية هي:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-u}{\sigma}\right)^2}$$

حيث إن المتغير العشوائي (X) يقع بين $\alpha$<x<$\alpha$- .

وأن $\pi$ = ٣,١٤١٥٩ ثابت

e = 2.71828 ثابت

$\mu$ = معدل التوزيع (الوسط)

$\sigma^٢$ = التباين

وتعرف دالة التوزيع الاحتمالي للمنحنى الطبيعي بأنها "إذا كانت المتغير العشوائي (x) بتوزيع توزيعا طبيعيا وله وسط حسابي ($\mu$) وتباين ($\sigma^2$) فإنه يأخذ معادلة المنحنى الطبيعي المذكورة أعلاه". ويمكن بيانيا أن تمثل f(x) على المحور العمودي في حين تمثل قيم (x) على المحور الأفقي. وأن المساحة الكلية الواقعة تحت المنحنى تساوي واحدا. ومن هذا نجد أن دالة التوزيع الطبيعي تعتمد على عنصرين هما:

١- الوسط الحسابي ($\mu$).

٢- والتباين ($\sigma^2$) وهما اللذان يحددان شكل المنحنى الطبيعي.

وأهمية التوزيع الطبيعي تقود إلى أربعة اعتبارات مهمة هي:

أ - أن كثير من المتغيرات تتوزع طبيعيا، فنجد أن معظم الصفات البيولوجية والنفسية

والاجتماعية وغيرها يكون توزيعها مشابها للتوزيع الطبيعي أو مقاربة له.

ب- توزيعات المعاينة Sampling Distribution لمتوسطات العينات تكون مقاربة للتوزيع الطبيعي ويزداد هذا التقارب كلما زاد حجم العينة.

جـ- إمكانية تحويل الكثير من التوزيعات إلى التوزيع الطبيعي وهذا يجعله سهلا وواسع الاستعمال.

د - أن معظم الاختبارات ($\chi^2$, F, t, z) المستخدمة في الاستدلال الاحصائي قائمة ومبينة على كون أن المتغير يتوزع توزيعا طبيعيا.

D.2 : خواص التوزيع الطبيعي:

يمتاز هذا التوزيع بعدة خواص أهمها:

١- يكون المنحنى متماثل حول الوسط الحسابي وذلك لتركز المشاهدات حوله. وكنتيجة لهذا التماثل فإن الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لهم نفس القيمة، وشكل المنحنى ناقوسي.

٢- إجمالي المساحة المحصورة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح وهي تمثل القيمة الكلية للاحتمال.

٣- المتغير العشوائي (X) يتوزع طبيعيا ويرمز له عادة بالصيغة التالية :

$x \sim N(u, \sigma^2)$

٤- عندما يكون التوزيع طبيعيا فإن معامل الالتواء يساوي صفرا ومعامل التفرطح يساوي ثلاثة وجميع العزوم الفردية تساوي صفرا.

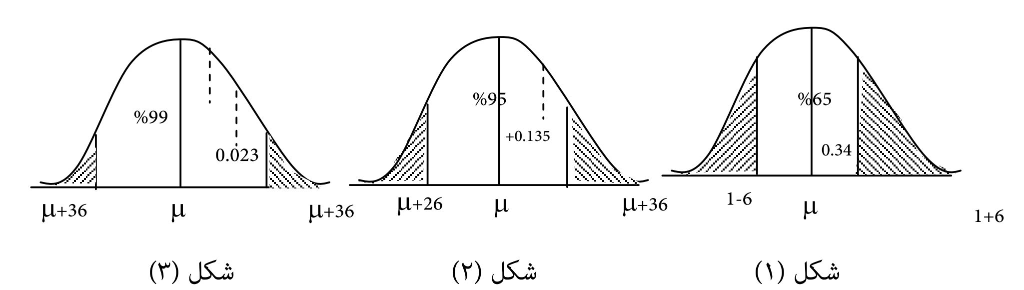
٥- توجد نسب معينة من المساحة الواقعة ضمن أي عدد من الانحرافات المعيارية ($\sigma$) عن الوسط الحسابي وهي موضحة في أشكال التوزيعات الطبيعية الآتية:

(i) فالمساحة التي تقع ضمن انحراف معياري يساوي واحدا عن الوسط الحسابي ($\mu$) تساوي المساحة الواقعة على الفترة ($\mu$+6 ، $\mu$-6) وقيمتها الاحتمالية هي ٦٨% تقريبا من المساحة الكلية (لاحظ الشكل).

(ii) والمساحة التي تقع ضمن (Z) انحراف معياري عن الوسط الحسابي ($\mu$) فإنها تساوي المساحة والواقعة على الفترة الواقعة ضمن ($u + 2\sigma$ ، $u - 2\sigma$) وقيمتها تساوي ٩٥% تقريبا من المساحة الكلية (لاحظ الشكل ٢).

(iii) أما المساحة التي تقع ضمن (٣) انحراف معياري عن الوسط الحسابي ($\mu$) فإنها

تساوي المساحة الواقعة على الفترة ضمن (μ-36, U+3σ) وتساوي ٩٩% من المساحة الكليـة (لاحظ الشكل ٣).




شكل (٣) شكل (٢) شكل (١)

من الشكل (١) فإن احتمال σ + u = ٠,٠٣٤ × ٢ = ٦٨%.

من الشكل (٢) فإن احتمال ٢σ + U = ٢×٠,١٣٥= ٠,٢٧ +٠,٦٨ = ٩٥%.

من الشكل (٣) فإن احتمال ٣σ + μ = ٢×٠,٠٢٣= ٠,٤٦+٠,٩٥ = ٩٩%.

وعليه ومما سـبق فإنـه يتضـح بـأن (μ) تحـدد مركـز التوزيـع، وأن (σ) تحـدد انحرافـه المعياري. فإذا تحركت (μ) إلى اليمين أو اليسار فإن مركز التوزيـع سـوف ينتقـل ولكـن لا يتغـير شكل المنحنى الطبيعي.

أما إذا تغيرت (μ) و (σ)فإن مركز التوزيع يتغير وتباعد منحناه حول المركـز يتغـير أيضـا ولهذا فمن الصعب وغير العملي وضع جداول للمنحنيات الطبيعية لكل مـن (μ) ، و (σ)، ولـكي تتحاشى استعمال مفهوم التكامل فقد تـم وضـع جـدول واحـد محسـوب للمسـاحات المختلفـة ولتوزيع ذات وسط حسابي يساوي صفرا (μ=0) وتباين يساوي واحد ($\sigma^2$=1) وهذا التوزيع يطلق عليه بالتوزيع الطبيعي المعياري وهو حالة خاصة من التوزيع الطبيعي.

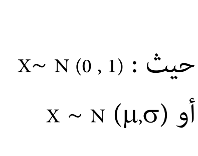
D.3 : التوزيع الطبيعي المعياري Standardized Normal Distribution :

أو توزيع (Z).

يمكن تعريفه بأنه توزيع طبيعي له وسط حسـابي (μ) يسـاوي صـفرا وانحـراف معيـاري يساوي واحدا ويرمز للمتغير العشوائي فيه بالرمز Z واختصارا فإن:

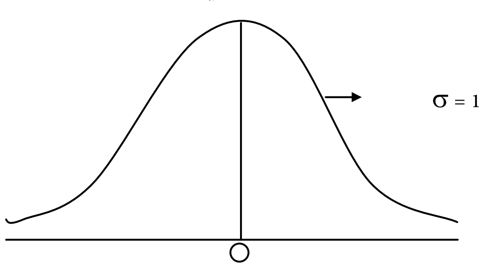
$Z \sim N(0, 1)$

وعليه أصبح من السهل تحويل المتغيرات العشوائية (X) التي تتوزع طبيعيا إلى متغـيرات عشوائية (Z) تتوزع توزيعا طبيعيا معياريا تأخذ الصيغة التالية:



$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \quad \text{..........} \quad (1)$$

وتأخذ الشكل المنحنى التالي:




حيث : X~ N (0 , 1)

أو X ~ N (μ,σ)

ولهذا التوزيع جداول خاصة تحتوي على احتمالات مناظرة لقيم (Z) وتستخدم لإيجاد قيم الاحتمالات وكما يلي:

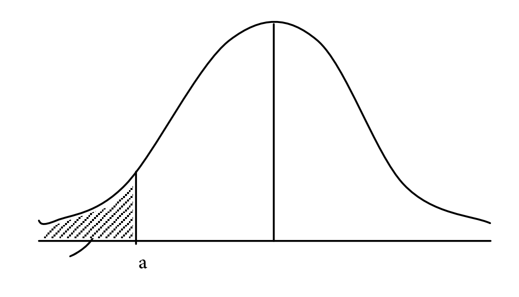
١- الاحتمال (Z≤a) P يتم إيجادها من الجدول مباشرة (أنظر الملحق E رجاء).

٢- الاحتمال (Z≥a) P يتم تحويلها إلى 1-P(Z≤p).

٣- الاحتمال (b≤≤a) P يتم تحويلها إلى P(Z≤a) - P(Z≤b).

والملاحظة المهمة هي أنه إذا كانت المعطيات في المشكلة المدروسة تمثل توزيعا طبيعيا فيتم تحويلها إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام الصيغة $Z=\frac{\overline{X}-U}{\sigma}$

والشكل البياني (٤) يوضح موقع (a) في المنحنى الطبيعي المعياري.




شكل (٤)

المنحنى المعياري الطبيعي

مثال (١) :

إذا كان (X) يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي (١٢) وتباين قدرة (٨) فما هو احتمال أن يكون (X) :

أ - أقل من ٤٠ ؟ ٢- (X) تقع ما بين ٤٨ ، ٦٠؟

الحل:

$\therefore\ \mu = 12$

$\sigma = 8$

١- فعندما : $X < 40$ فإن القيمة المعيارية المناظرة لها هي:

$$\therefore \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$$

$$\therefore \quad P(X<40) = P\left(Z < \frac{\overline{X - U}}{\sigma}\right) = \frac{40-12}{8} = 3-5$$

$$\therefore \quad P(Z < 3.5)$$

وفي جدول (Z) لمساحات التوزيع الطبيعي المذكور في الملحق (E) نحصل على:

$P\ (Z<3.5) = 0.998$

٢- أما في الحالة الثانية عندما ( X) تقع ما بين (٤٨) و (٦٠) فيتم تحويلها إلى القيم المعيارية الاحتمالية باستخدام الصيغة الثالثة المذكورة سابقا وكما يلي:

$$\therefore \quad P(\overline{Z} < a) - P(Z < b)$$

$$\therefore \quad P\left(Z < \frac{48-12}{8}\right) - P\left(Z < \frac{60-12}{8}\right)$$

$$\therefore \quad P\left(Z < \frac{36}{8}\right) - P\left(Z < \frac{48}{8}\right)$$

$$\therefore \quad P = 1.5$$

∴ احتمال أن تقع (X) ما بين (٤٨) و (٦٠) ومن استخدام جداول التوزيع الطبيعي لـ (Z) نحصل على ٠,٠٦٦٨ = $P\ (-1.5)$ .

D.4 : توزيع ستيودنت t (توزيع الطبيعي t) Student t Distribution

هو من التوزيعات المستمرة المشابه للتوزيع الطبيعي ففي كثير من الأحيان قد لا يكون تباين المجتمع $\sigma^2$ معلوما وعندما يكون حجم العينة كبيرا، أي $n \geq 30$ فإنه يمكن أن يستدل على تباين المجتمع $\sigma^2$ من خلال تباين العينات المسحوبة منه أي أن:

$$Z = \frac{\overline{X} - U}{S / \sqrt{n}}$$ تؤول إلى

التوزيع الطبيعي المعياري، وكلما قل حجم العينة ابتعدت (Z) عن التوزيع الطبيعي المعياري . وعليه فإنه عندما يكون تباين المجتمع $\sigma^2$ مجهولا وحجم العينة صفرا (n<30) فإنه يمكن أن يستدل على معالم المجتمع ($\mu$) باستخدام إحصائية أو توزيع آخر يسمى توزيع (t) ويعطى عادة بالعلاقة التالية:

$$t = \frac{\overline{X} - U}{s/n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ولدرجات حرية (n-1) ويرمز لها إعادة.بالرمز (V) ولمستوى معنوية معين وعادة تستخدم مستوى المعنوية مقداره ٠,٠٥ (فعندما لم يذكر مستوى المعنوية في السؤال فالمقصود بذلك مستوى المعنوية ٠,٠٥). ويوجد جدول خاص بقيم t الجدولية والذي يتكون من الصف الأول والذي خصص لمستوى المعنوية ($\alpha$) وهي الدرجة المطلوبة لمعرفة دقة الاختبار أما العمود الأول فخصص لقيم المتغير، وأن (V) ترمز لدرجة الحرية والتي تساوي (n -1) أي حجم العينة مطروحا منه واحدة.

إن العلاقة المذكورة أعلاه قد توصل إليها وليم كوسيت عام ١٩٠٨ عندما نشر بحثه الذي اشتق فيه معادلة التوزيع الاحتمالي لاحصاءة t والخاصة بالعينات الصغيرة وقد نشر بحثه تحت اسم مستعار هو student ولذلك سمي توزيع t بتوزيع ستيودنت الذي أدخلت عليه بعض التحويرات من قبل الإحصائي فيشر في القرن الماضي.

D.5 : خصائص توزيع t الطبيعي:

١- أن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (t) هي:

$$f(t) = \frac{K}{\left(1 + \frac{t^2}{V}\right)^{v+1/v}}$$

حيث تشير (V) إلى درجات الحرية.

(K) عدد ثابت يعتمد على درجات الحرية (V) ومتوسط t يساوي صفرا وتباينه يساوي $\frac{V}{V-2}$ .

٢- أن المعادلة أعلاه لا نحتاجها؛ لأن المساحة تحت المنحنى قد حسبت في جداول منفصلة

تسد متطلبات معظم المسائل والمشاكل المطروحة وعليه فإن الجداول في الملحق تعوض عن المعادلة أعلاه.

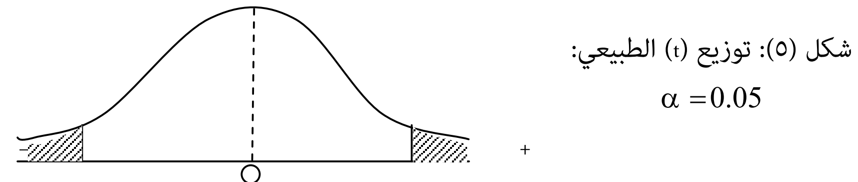
٣- توزيع t هو توزيع محدد أو مضبوط (Exact Distribution) .

٤- يكون نطاق t هو $\alpha < t < \infty$ - (مشابه التوزيع Z).

٥- التوزيع ذو قيمة واحدة على شكل ناقوسي متماثل حول الصفر ويأخذ الشكل التالي:

شكل (٥): توزيع (t) الطبيعي:

$\alpha = 0.05$



٦- توزيع t أكثر تفلطحا من التوزيع الطبيعي أي أن المساحة في طرفيه أطول في توزيع t منه في التوزيع الطبيعي (Z). لا شكل الشكل السابق.

٧- إذا زاد حجم العينة (n) أن يصل ∞ فإنه يتشابه مع التوزيع الطبيعي.

٨- نحتاج إلى درجات الحرية ومستوى العشوائية لاستخراج احتمالات (t) من جدول توزيع t المذكورة في الملحق (E).

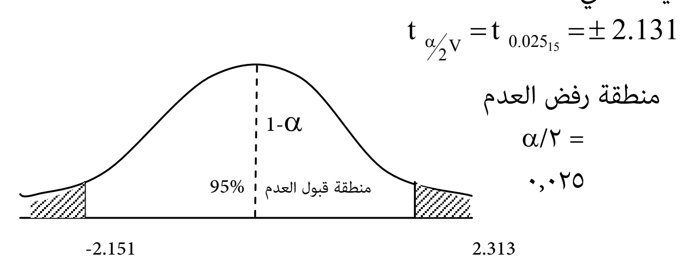
فمثلا إذا كانت درجات الحرية = ١٥ أي ١٥ = (١٦-١) ومستوى المعنوية ($\alpha$=0.05) فإن قيمة t هي:

$$t_{\alpha/2\,V} = t_{0.025_{15}} = \pm 2.131$$

منطقة رفض العدم

$\alpha$/٢ =

٠,٠٢٥




وهذا يعني أن ٩٥% من قيم t تقع بين t + 0.025 /و 0.025- (t) إذا كانت قيمة μ صحيحة.

ومن جدول t يتضح بأن:

كلما زادت عدد درجات الحرية قلت قيمة t . وعند درجة ما لا نهاية(∞) فإن قيمة t تساوي قيمة Z .

مثال :

مصنع لانتاج النضائد الجافة وضع مقترحا على أساس أن متوسط عمل نضيدة دون إعطال هو (٢٠٠) ساعة. ولاختبار هذا المقترح تم اختيار (٢٥) نضيدة شهريا. فحصل على وسط حسابي قدره (٢١٨) ساعة وبانحراف معياري (٤٠) ساعة وإذا كان العمر الزمني لعمل النضائد موزع توزيعا طبيعيا. فهل تؤيد اقتراح المصنع؟

الحل:

$$\therefore \quad \mu = 200 \quad , \quad S = 40 \quad , \quad \overline{X} = 218$$

$$n = 25 \Rightarrow \quad \therefore \ n < 30$$

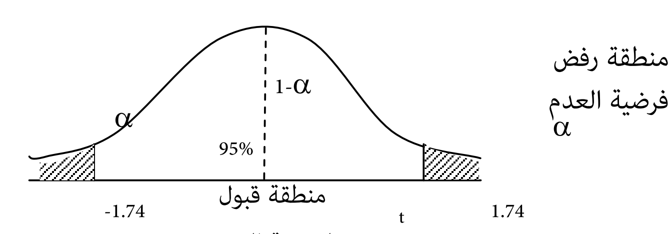
إذن الاختبار المقترح للاستخدام هو اختبار t لأن حجم العينة أقل من ٣٠مشاهدة.

$$\therefore \quad t = \frac{\overline{n} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{218 - 200}{40/\sqrt{25}} = \frac{18}{\frac{40}{2}} = \frac{18}{8} - 2 - 250$$

وهي قيمة t المحسوبة.

وباستخدام $\alpha = 0.05$ ودرجات حرية قدرها $n-1=25 \ -1=24$ : فإن t الجدولية تساوي (١,٧١١) و (-1.74) لاحظ الشكل أدناه:

وعليه طالما أن (t) المحسوبة أكبر من (t) الجدولية، أي أنها تقع في منطقة الرفض وعليه لا نؤيد اقتراح المصنع القائل بأن العمر الزمني للنضيدة سيكون ٢٠٠ ساعة؛ لأن عمر النضيدة سيكون أكثر من ٢٠٠ ساعة.




D6 : توزيع مربع كاي ($\chi^2$) الطبيعي: Chi - Square Distribution

هو من التوزيعات الاحتمالية المستمرة المهمة في الإحصاء. وكان أول من وصف مربع كاي هو العالم كارل بيرسون عام ١٩٠٠.

أن $X^2$ هو متغير عشوائي ويستخدم في اختبار الفرضيات وله تطبيقات واسعة.

ويمكن تعريف $X^2$ بأنه:

"إذا كان ($S^2$) وهو تباين عينة عشوائية ذات حجم n مسحوبة من مجتمع طبيعي له تباين $\sigma^2$ فإن صيغة مربع اختيار $X^2$ هي:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} =$$

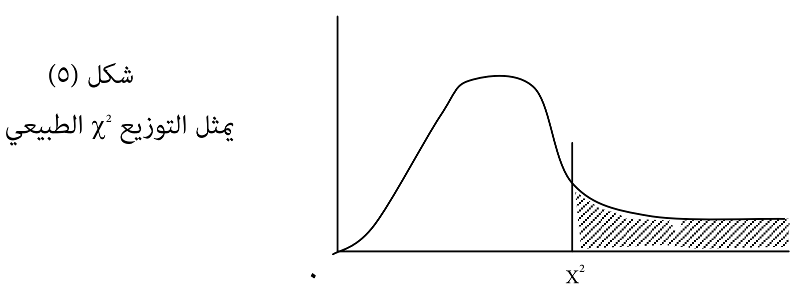
وعليه فإن اختبار $X^2$ هو عبارة عن نسبة $\frac{\text{تباين العينة}}{\text{تباين المجتمع}}$

فإذا تم سحب عينة حجمها (n) عدة مرات من مجتمع له توزيع طبيعي بوسط حسابي μ وتباين $\sigma^2$ وتم حساب تباين العينة $S^2$ في كل حالة فإن المتغير العشوائي سيأخذ صيغ $X^2$ المذكورة أعلاه والتي لها توزيع يسمى بتوزيع مربع كاي وهو متغير موجب دائما نطاقه α , 0 أي أنه غير معروف، من الجانب السالب، وله جدول مشابه لجدول توزيع (t) وهو توزيع متصل غير متماثل يأخذ الشكل أدناه:

فهو توزيع متصل غير متماثل.

شكل (٥)

يمثل التوزيع $\chi^2$ الطبيعي




مثال : مصنع لإنتاج آلات كهربائية وضع ضمانا للمتوسط الزمني لعمر الآلة مقداره (٣) سنوات بانحراف معياري لمدة سنة واحدة ($\sigma^2$). تم اختبار (٥) آلات فكان متوسط العمر الزمني لهذه الصيغة كالآتي:

4.2, 3.5, 3.0, 2.4, 1.9 سنوات

هل ترى أن هذا المصنع يحقق في وضع الانحراف المعياري للعمر الزمني لهذه الآلات سنة واحدة؟ إذا كان العمر الزمني لهذه الآلات موزع توزيعا طبيعيا ؟

الحل:

١- إيجاد المتوسط الحسابي والتباين للعينة كالآتي:

$$\overline{X} = \frac{1-9+2.4+3.0+3.5+4.2}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

إيجاد تباين العينة

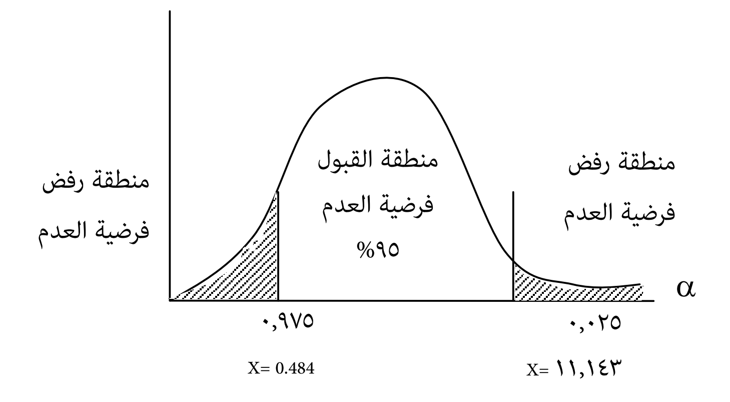
$$S^2 = \frac{(1.9-3)^2 + (2.4-3)^2 + (3-3)^2 + (3.5-3)^2 + (4.2-3)^2}{n-1=4} = 0.815$$

٢- إيجاد قيمة $X^2$ بتطبيق الصيغة الخاصة به وكالآتي:

$$X^2 = \frac{(n-1)-S^2}{\sigma^2} = \frac{(5-1)(0.812)}{1} = 3.26$$

وحيث أن قيمتي $X^2_{0.025}$ ، $X^2_{.,٩٧٥}$ وبدرجة حرية ٤ .

ومن جدول توزيع $X^2$ فإن قيمة $X^2$ الجدولية هي: (١١,١٤٣) و (٠,٤٨٥). وعليه فإن قيمة $X^2$ المحسوبة وقعت ضمن نطاق القبول، لذلك فإننـا نقـول إن المصـنع حقـق فعـلا مـن افـتراض الانحراف المعياري للعمر الزمني لهذه الآلات سنة واحدة ($\sigma$=1).




و $X^2$ لمستوى معنوية (٠,٠٥) فإنه قيمته هي ٣,٣٦.

ولتوزيع مربع كاي ($\chi^2$) عدة استخدامات من أهمها ما يلي:

١- تقدير فترة الثقة واختبار الفرضيات المتعلقة بتباين المجتمع $\sigma^٢$ .

٢- اختبار الاستقلالية في مسائل جداول الاقتران.

٣- اختبار جودة التوفيق.

D7 : التوزيع F الطبيعي :

يعتبر توزيع F من أهم التوزيعات المستخدمة في الدراسات التطبيقية ، وكان الاحصائي فيشر أول من استخدمه عام ١٩٢٠ وسماه توزيع Z ولكن لا يقصد بها التوزيع الطبيعي المعياري، ولكن العالم الاحصائي سنديكور Sendecor هو الذي سماه توزيع (F) تكريما لفيشر وقد عرفه نظريا بأنه:

"نسبة متغيرين لهما توزيع مربع كاي $X^2$ ، وكل منهما مقسوم على درجة الحرية الخاصة به. أي أن صيغة F تأخذ الشكل التالي:

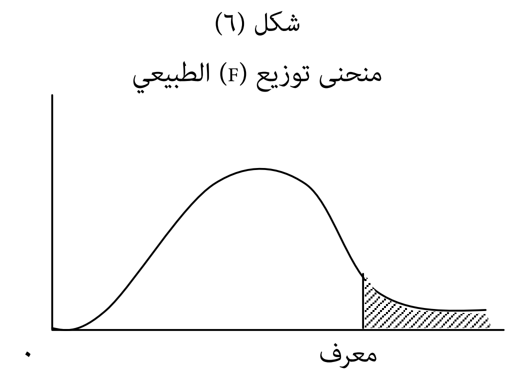
$$F=\frac{\frac{X_1^2}{V_1}}{\frac{X_2^2}{V_2}}=\frac{\frac{X_1^2}{n_1-1}}{\frac{X_2^2}{(n_2-1)}}=\frac{(n-1)S_1^2 / \sigma_1{}^2 / (n_1-1)}{(n2-1)S_2^2 / \sigma_2^2 / (n_2-1)}=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} / (n_1-1)\bullet\frac{(n_2-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}}=\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} / \frac{S_2^2}{\sigma_2^2}$$

$$\therefore \quad F=\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}=\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}\bullet\frac{\sigma_2^2}{S_2^2}=\frac{S_1^2.\sigma_2^2}{S_2^2.\,\sigma_1^2} \quad .......... \quad (4)$$

ولتوزيع f درجتي حرية هما : $V = (n - 1)$ ، و $V_2 = (n - 1)$ وأن شكل منحنى توزيع F يكون كالآتي:

شكل (٦)

منحنى توزيع (F) الطبيعي




فهو أذن توزيع متصل غير متماثل معرف من الجزء الموجب $(0 , \alpha)$ ويتميز جدول توزيع F عن كل جدولي t ، $X^2$ بأن له درجتي حرية $(V_1=n_1-1)$ ، و $(V_2= n_2-1)$، حيث

قد خصص العمود الأول لدرجة الحرية الأولى ($V_1$) والعمود الأفقي لدرجة الحرية الثانية ($V_2$). أما مستوى المعنوية للاختبار فهناك جدول لكل مستوى معنوية والمتعارف عليه عـادة هـو مستوى معنوية ٥ % أو ١%.

ومن استخدامات توزيع F ما يلي:

١- تقدير فترة الثقة واختبار الفرضيات المتعلقة بتباين / مجتمعين $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$

٢- اختبار مدى الاختلاف بـين عـدة متوسـطات لمجتمعـات مسـتقلة وكـذلك في مسـائل تحليـل جـداول التبـاين ANOVA (لاحـظ الفصـل السـادس والسـابع).وأن منحنـى توزيـع F منحنـى موجب، أي لا يمكن أن تكون قيمة التوزيع سالبة، وأيضا فإنه لتوزيـع (f) معلمتـين هـما $V_1$ و $V_2$.

# الملحق (E)

اختبار الفرضيات

E1 : مفهوم اختبار الفرضيات.

E2 : اختبار الطرف الواحد والطرفين.

E3 : خطوات اختبار الفرضيات.

E4 : تحديد نوع الاختبار.

E5 : حالة تطبيقية على اختبار كل من توزيع (Z) و (t) .

# الملحق (E)

## اختبار الفرضيات Test of Hypothesis

E1 : مفهوم اختبار الفرضيات:

نبدأ الآن بالجزء الثاني من نظرية الاستدلال وهو نظرية اختبار الفرضيات بعد أن تطرقنا إلى نظرية التقدير في فصول هذا الكتاب. ولمعرفة اختبار الفرضيات سنبدأ بإعطاء بعض التعاريفات الخاصة مع ملاحظة الشكل البياني (١) أدناه.

١- الفرضية الإحصائية Statistical Statement :

تشير إلى أية معلومة تخص المجتمع وتوضع للاختبار وتسمى الفرضية (hypothesis) وقد تكون خاطئة، ولمعرفة ذلك يتم استخدام طرق اختبار الفرضيات التي سيتم ذكرها لاحقا.

٢- أنواع الفرضيات: هناك فرضيتين هما:

(i) فرضية العدم: (HO) Null hypothesis أو (الفرضية الصفرية) وهو الغرض الذي نأمل أن يهمل أو يرفض ويشار له بالرمز HO. فعندما نضع فرضية معينة والتي نأمل أن نرفض هذه الفرضية فإن هذا النوع من الفرضيات يسمى بفرضية العدم، ولا يعني هذا أننا سنرفض دائما هذه الفرضية. فهناك حالات كثيرة نضع فيها فرضية معينة: HO ، هدفنا رفضها ويتبين لنا من خلال الاختبار أن هذه الفرضية يجب أن تقبل.

(ii) الفرضية البديلة : (HI): Alternative hypothesis(فرضية القبول وهي الفرضية التي تقبل بعد رفض فرضية العدم ويطلق عليها بالفرضية البديلة ويرمز لها (Hi) فإذا رفضنا فرضية العدم (HO : U=20) معناها قبول الفرضية البديلة وهي ($H1:\mu\neq20$).

٣- المنطقة الحرجة: Critical Region أو Rejection Region :

وهي المنطقة التي عندها نرفض فرضية العدم (HO:) التي تقع فيها قيمة المختبر الإحصائي (القيمة المحسوبة). وتحدد منطقة الرفض بعد تعين مستوى المعنوية ومقداره دائما .($\alpha$)

أما المنطقة الأخرى فهي منطقة القبول Acceptant Region وهـي التـي تتضـمن عـلى ($1-\alpha$) مستوى معنوية.

٤- المختبر الإحصائي: Test - Statistic

هو عبارة عن متغير عشوائي له توزيع احتمالي معلوم ويصـف المختـبر الإحصـائي العلاقـة بين القيم النظرية للمجتمع والقيم المحسوبة من العينة. وتقارن قيمة المختبر الإحصائي ( $X^2$, F , t, z) المحسوبة من العينة مع قيمته المستخرجة من توزيعه الاحتمالي

(جداول خاصة لاحظ الملحق (F)) ومنها يتخذ القرار برفض أو بقبول فرضية العدم.

٥- أنواع الأخطاء: Type of Error :

في اختبار الفرضيات نواجه نوعين من الأخطاء:

(أ) خطأ النوع الأول Type of Error :

وهو رفض الفرضية الصفرية (HO) عندما تكون صحيحة.

(ب) خطأ النوع الثاني: Type Tow Error:

وهو قبول الفرضية الصفرية (HO) عندما تكون خطأ فبينما نجـد أن خطـأ النـوع يحـدد مستوى المعنوية، ونجد أن خطأ النوع الثاني يحدد قوة الاختبار.

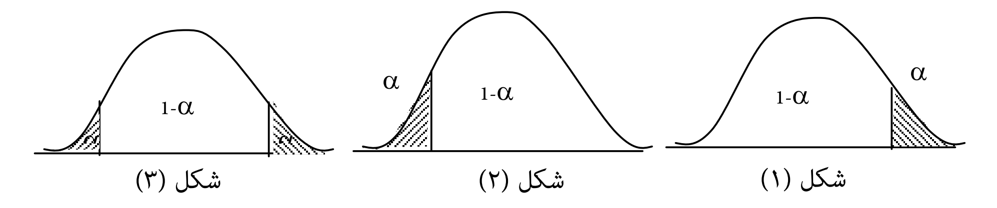
٦- مستوى المعنوية Level of Significant أو مسـتوى الاحـتمال أو حجـم الاختبـار Size of Test / Probability : Level

تعرف مستوى المعنوية بأنها درجة الاحتمال الذي ترفض بـه فرضـية العـدم (Ho) عنـدما تكون هي صحيحة. أو بعبارة أخرى هو احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول ويرمـز لهـا بـــ ($\alpha$) ودرجة الاحتمال يحددها الباحث. ومعظم الدراسات نختـار $\alpha$ مسـاوية ١% أو ٥% وكلمـة معنوي Significance أو مؤكد تعني بأن الفروق بين معلمـة المجتمـع والقـيم المقـدرة مـن العينـة مؤكدة وحقيقة ولا تعود إلى عنصر الصدفه وعن مستوى معنوية قدرة ١% أو ٥%.

E2 : اختبار الطرف الواحد والطرفين One Tailed and Two Tailed Test :

فإذا كانت المنطقة الحرجة تقع فقط عـلى جانـب واحـد فإنهـا تسـمى باختبـار الطـرف الواحد وفي هذه الحالة تقع ($\alpha$) في الجانب الأيمن أو الأيسر وكما هو موضـح أدنـاه في الشـكلين (١) و (٢).فإذا أخذنا الفرضية التالية:

Ho : U ≤ ٢٠ أو الفرضية الأخرى : ٢٠ ≥ Ho=U فهذا يعني وجود فرصة واحدة أو حالة واحدة يرفض فيها هذه الفرضية وهي عندما ٢٠ ≥ U في الحالة الأولى و ٢٠>μ في الحالة الثانية. ولهذا فإن هذا النوع من الاختبار يطلق عليه اختبار من الطرف الواحد كما هو موضح أدناه:

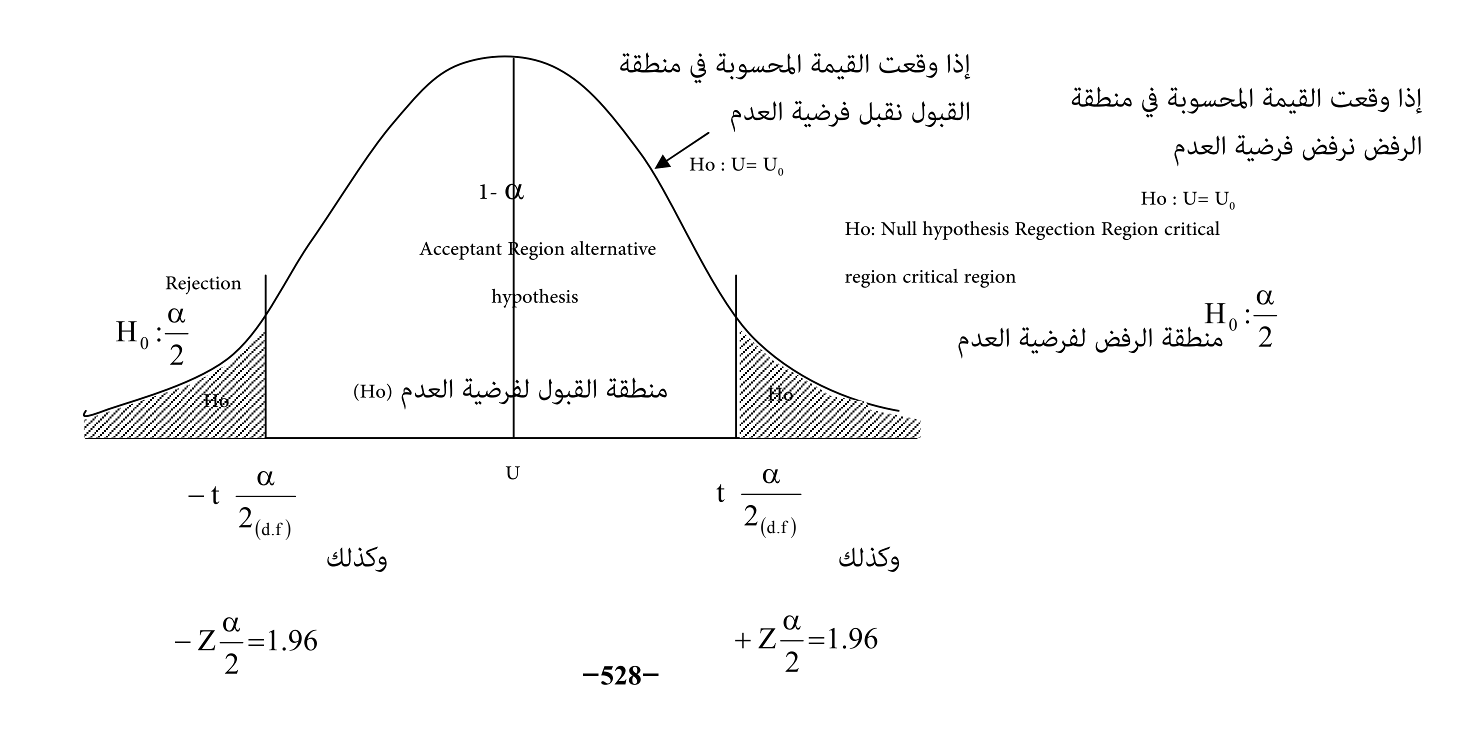


شكل (٣) شكل (٢) شكل (١)

أما إذا أخذنا الفرضية Ho :Y=20 فهذا يعني وجود فرضيتين أو حالتين نرفض عندها هذه الفرضية وهما عندما تكون ٢٠> U أو ٢٠<U ولهذا فإن هذا الاختبار يسمى اختبارا ذا الطرفين كما في شكل (٣).

شكل (١)

يوضح اختبار فرضيات العدم والقبول في اختبارات التوزيعات الطبيعية (z , t)



E3 : خطوات اختبار الفرضيات:

فيما يلي الخطوات الستة المهمة في اختبار الفرضيات وهي:

١- تحديد فرضية العـدم الصـفرية أي (Ho : U = a) أو (Ho : U = U) أو (Ho : P = a) أو ($Ho : \sigma^2=a$)

حيث أن $U$ ، $U_1$ $\sigma^2$ هي معلمات المجتمع المجهولة وأن (a) هي قيمة المعلمة تحت الاختبار.

٢- تحديد الفرضية البديلة ($H_1 : U \neq a$) أو ($H_1 : U < \alpha$) أو ($H_1 : U > \alpha$) .

٣- تحديد مستوى المعنوية ($\alpha$) ومنها يتم تحديـد المنطقـة الحرجـة (منطقـة الـرفض) ويلاحـظ بصورة عامة بأن الخطوات (١) ، (٢) ، (٣) هي مـن معطيـات المسـألة وإذا لم تعـط قيمـة $\alpha$ فنفترضها أنها تساوي ٥%.

٤- تحديـد الاختبـار المناسـب ($F, X^2, z, t$) والـذي تقـارن قيمتـه (مـثلا t المسـحوبة) مـع القيمـة الجدولية المناظرة له.

٥- إيجاد القيمة المحسوبة calculated value من خلال سحب عينة عشوائية وحساب إحصائياتها.

٦- الاستنتاج، ويكون بالشكل الآتي:

a ) نرفض الفرضية الصفرية إذا وضعت وقعت قيمـة الاختبـار المحسـوبة (مـثلا t المحسـوبة) داخل منطقة الرفض (المنطقة الحرجة) لاحظ الشكل البياني.

b ) قبول الفرضية الصفرية إذا وقعت قيمة الاختبار المحسوبة خارج المنطقة الحرجة (لاحـظ الشكل البياني (١)).

وبكلام مختصر : "إذا وقعت قيمـة المختـبر الإحصـائي في منطقـة الـرفض فـترفض عندئـذ فرضية العدم وتقبل بالفرضية البديلة. أما إذا وقعت قيمة المختبر الإحصـائي في منطقـة القبـول فنقبل فرضية العدم. وبذلك تكون الفروق بين القيم النظريـة للمجتمـع والقـيم المحسـوبة مـن العينة غير معنوية أو غير مؤكدة وربما الفرق هذا ناتج عن طريق الصدفة.

وهذه الخطوات مهمة وأساسية ويمكن تطبيقها عـلى تطبيقـات الأصـول الأولى مـن هـذا الكتاب.

E4 : تحديد نوع الاختبار:

هناك عدة أنواع من الاختبارات والتي يهمنا فيها هو :

اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي($\mu$) حيث إن هذا الاختبـار يـرتبط بالفرضـية: ($Ho : U=U_0$) حيث أن (U) هو الوسط الحسابي للمجتمع و ($U_0$) هو الوسط

الحسابي للعينة علما بأن تبـاين المجتمـع ($\sigma^2$) معلـوم، ففـي هـذه الحالـة فـإن الاختبـار المستخدمة هو اختبار Z وذلك عنـدما تكـون ($\sigma^2$) معلومـة و ($n \geq$ ٣٠) فيـتم اسـتخدام اختبـار Z وكالآتي:

$$Z = \frac{\overline{X} - U}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

حيث تمثل $S = \sigma^2$ لأن حجم العينة كبير.

E4 : حالة تطبيقية على عينة كبيرة :

"مصنع لإنتاج الأكواب ينتج نوعا معينا على أساس أن متوسط العمر الاستعمالي للأكـواب (٥٠٠) ساعة. سحبت عينة عشوائية من إنتاج هذا المصنع قـدرها (١٠٠) كـوب أظهـرا متوسـط عمر استعمالي قدرة (١٤٨٠) ساعة بانحراف معيـاري قـدره (٨٠) سـاعة مـن خـلال نتـائج هـذه العينة هل ترى أن متوسط العمر الاستعمالي للأكواب التـي ينتجهـا المصـنع هـو (١٥٠٠) سـاعة. اختبر ذلك بمستوى معنوية (٥%) و (١%). ماذا نستنتج؟

الحل:

إجراء الاختبار نتبع الخطوات التالية:

١- تحديد فرضية العدم : $Ho : \mu = 1500$

٢- تحديد الفرضية البديلة : $H1 : U \neq 1500$

٣- تحديد مستوى المعنوية : ($\alpha$) وهذا يكون أما :

i ) $\alpha$ = ٠,٠٥ ← حدود المنطقة الحرجة (١,٩٦، -١,٩٦) .

أو ii) $\alpha$ = ٠,٠١ ← حدود المنطقة الحرجة (٢,٥٧٥ ، -٢,٥٧٥).

٤- الاختبار المناسب هو (Z) وذلك لأن حجم العينة كبير ($n>30$) و ($\sigma^2$) للقيم مجهول .

٥- $n = 100$ ، $\overline{X} = 1480$ ، $S = 80$ ( الانحراف المعياري للعينة).

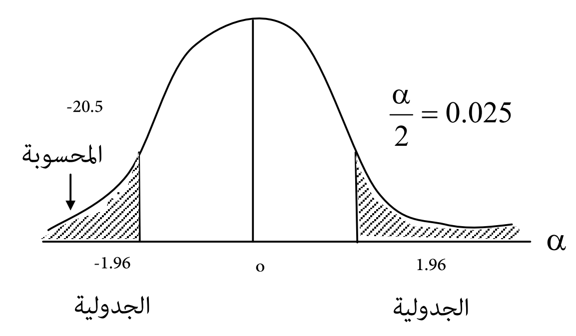
$$Z = \frac{\overline{X} - U}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{1480 - 1500}{\frac{80}{\sqrt{100}}} = \frac{-20}{\frac{80}{10}} = \frac{-20}{8} = -2.5$$

وتمثل (-2-5) قيمة Z المحسوبة.

٦- الاستنتاج .

١- لفرض الرفض أو القبول لفرضية العدم نحدد قيمة Z الجدولية والتي هـي ١,٩٦ بمسـتوى معنوية مقداره ٥% ويتم تحدد ذلك على شكل المنحنى أدناه:

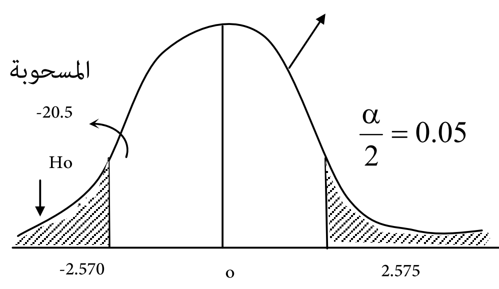
نلاحظ أن القيمة المحسوبة لتوزيع z (-٢,٥٠) وقعت ضمن نطاق المنطقة الحرجة فرض Ho ونستنتج من ذلك بأن متوسط العمر الاستعمالي للأكواب التي ينتجها هذا المصنع لا تساوي ١٥٠٠٠/ ساعة بمستوى قدره -٥%




٢- أما بالنسبة لمستوى معنوية مقداره ١% فمن الشكل البياني (٢) :

نلاحظ أن القيمة المحسوبة لتوزيع (z) الجدولية لمستوى معنوية مقداره (١%) يساوي (2.575) قد وقعت خارج نطاق منطقة الرفض وعليه نستنتج بأن نتائج العينة قد أثبتت بأن متوسط العمر الاستعمالي للأكواب التي ينتجها المصنع هي (١٥٠٠) ساعة. أي تقبل برفض العدم بأنه (Ho : U = 1500).

شكل (٢)يوضع اختبار الفرضيات حسب صيغة z لمستوى معنوي ١%.




ملاحظة:

١- عندما تكون ($\sigma^2$) مجهولة وأن ($30 \leq n$) أيضا نستخدم اختيار توزيع (z) ونتبع نفس الخطوات السابقة المتبعة في الحالة الأولى.

٢- وفي حالة كون ($n < 30$) فإنه يتم استخدام اختبار توزيع (t) والذي تحسب قيمته المحسوبة بموجب الصيغة التالية:

$$t = \frac{\overline{X} - U}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

ونطبق نفس الخطوات السابقة المذكورة في اختيار (z)

مثال: تقول إحدى دور العرض أن متوسط عدد المترددين عليها يوميا (٥٠٠) شخص والاختبار سجل عدد المترددين على دار العرض تلك لمدة عشر أيام وبصورة عشوائية الأعداد التالية:

١٢٠ ن ٤٨٠ ، ٥٠٠ ، ٤٥٠ ، ٧٠٠ ، ٦٠٠ ، ٤٥٠ ، ٥٠٠ ، ٤٠٠ ، ٦٠٠ اختبر الفرضية السابقة بمستوى معنوية ٥% بفرض أن عدد المترددين يتوزع توزيعا طبيعيا.

الحل:

١- تحديد فرضية العدم $Ho: \mu = 500$

٢- تحديد الفرضية البديلة $H1: \mu \neq 500$

٣- تحديد مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

٤- تحديد الاختبار المناسب. ولكون ($\sigma^2$) مجهولة ولأن ($n<30$) فإن الاختبار المناسب هو:

$$t = \frac{\overline{X} - U}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

٥- لتطبيق الصيغة واستخراج قيمة t المحسوبة نحسب قيمة الوسط الحسابي $\left(\overline{X}\right)$ والانحراف المعياري (S) وكما يلي:

$$\overline{X} = \frac{600+400+...+120}{10} = \frac{4800}{10} = 480$$

$$\therefore \quad n = 10$$

$$\therefore \quad S = \sqrt{\frac{\sum\left(Xi - \overline{X}\right)^2}{n-1}} = 151.3$$

$$\therefore \quad t^* = \frac{480-500}{151.3 / \sqrt{10}} = -0.42$$ تمثل قيمة $t^*$ المحسوبة

٦- الاستنتاج: حيث إن قيمة ($t^*$) المحسوبة وقعت خارج المنطقة الحرجة (خارج منطقة الرفض). وعليه فإننا نقبل Ho أي أننا نقبل الفرضية القائلة أن متوسط عدد الفرضية القائلة إن متوسط عدد المترددين على دار العرض المذكور هو ٥٠٠ شخص يوميا.

# الملحق (F)

الجداول الإحصائي والقياسية المستخدمة في الاختبارات

يتضمن هذا الملحق الجداول الخاصة بعملية اختبار دقة المعلمات التقديرية وضمن درجات حرية معينة ولمستويات معينة من المعنوية وتشمل هذه الجداول ما يلي:

١- جدول مربع كاي $\chi^2$.

٢- جدول توزيع t .

٣- جدول توزيع z .

٤- جدول توزيع F .

٥- جدول دربن - واطسون D-w لاختبار الارتباط الذاتي.

# جدول (١)

# التوزيع الطبيعي لمربع كاي $\chi^2$

The CHI - square and the normal Distribution

| Degrees of Freedom \ Pb | .995 | .990 | .975 | .950 | .900 | .750 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $392704 \cdot 10^{-10}$ | $157088 \cdot 10^{-9}$ | $982069 \cdot 10^{-9}$ | $393214 \cdot 10^{-8}$ | .0157908 | .1015308 |
| 2 | .0100251 | .0201007 | .0506356 | .102587 | .210720 | .575364 |
| 3 | .0717212 | .114832 | .215795 | .351846 | .584375 | 1.212534 |
| 4 | .206990 | .297110 | .484419 | .710721 | 1.063623 | 1.92255 |
| 5 | .411740 | .554300 | .831211 | 1.145476 | 1.61031 | 2.67460 |
| 6 | .675727 | .872085 | 1.237347 | 1.63539 | 2.20413 | 3.45460 |
| 7 | .989265 | 1.239043 | 1.68987 | 2.16735 | 2.83311 | 4.25485 |
| 8 | 1.344419 | 1.646482 | 2.17973 | 2.73264 | 3.48954 | 5.07064 |
| 9 | 1.734926 | 2.087912 | 2.70039 | 3.32511 | 4.16816 | 5.89883 |
| 10 | 2.15585 | 2.55821 | 3.24697 | 3.94030 | 4.86518 | 6.73720 |
| 11 | 2.60321 | 3.05347 | 3.81575 | 4.57481 | 5.57779 | 7.58412 |
| 12 | 3.07382 | 3.57056 | 4.40379 | 5.22603 | 6.30380 | 8.43842 |
| 13 | 3.56503 | 4.10691 | 5.00874 | 5.89186 | 7.04150 | 9.29906 |
| 14 | 4.07468 | 4.66043 | 5.62872 | 6.57063 | 7.78953 | 10.1653 |
| 15 | 4.60094 | 5.22935 | 6.26214 | 7.26094 | 8.54675 | 11.0365 |
| 16 | 5.14224 | 5.81221 | 6.90766 | 7.96164 | 9.31223 | 11.9122 |
| 17 | 5.69724 | 6.40776 | 7.56418 | 8.67176 | 10.0852 | 12.7919 |
| 18 | 6.26481 | 7.01491 | 8.23075 | 9.39046 | 10.8649 | 13.6753 |
| 19 | 6.84398 | 7.63273 | 8.90655 | 10.1170 | 11.6509 | 14.5620 |
| 20 | 7.43386 | 8.26040 | 9.59083 | 10.8508 | 12.4426 | 15.4518 |
| 21 | 8.03366 | 8.89720 | 10.28293 | 11.5913 | 13.2396 | 16.3444 |
| 22 | 8.64272 | 9.54249 | 10.9823 | 12.3380 | 14.0415 | 17.2396 |
| 23 | 9.26042 | 10.19567 | 11.6885 | 13.0905 | 14.8479 | 18.1373 |
| 24 | 9.88623 | 10.8564 | 12.4011 | 13.8484 | 15.6587 | 19.0372 |
| 25 | 10.5197 | 11.5240 | 13.1197 | 14.6114 | 16.4734 | 19.9393 |
| 26 | 11.1603 | 12.1981 | 13.8439 | 15.3791 | 17.2919 | 20.8434 |
| 27 | 11.8076 | 12.8786 | 14.5733 | 16.1513 | 18.1138 | 21.7494 |
| 28 | 12.4613 | 13.5648 | 15.3079 | 16.9279 | 18.9392 | 22.6572 |
| 29 | 13.1211 | 14.2565 | 16.0471 | 17.7083 | 19.7677 | 23.5666 |
| 30 | 13.7867 | 14.9535 | 16.7908 | 18.4926 | 20.5992 | 24.4776 |
| 40 | 20.7065 | 22.1643 | 24.4331 | 26.5093 | 29.0505 | 33.6603 |
| 50 | 27.9907 | 29.7067 | 32.3574 | 34.7642 | 37.6886 | 42.9421 |
| 60 | 35.5346 | 37.4848 | 40.4817 | 43.1879 | 46.4589 | 52.2938 |
| 70 | 43.2752 | 45.4418 | 48.7576 | 51.7393 | 55.3290 | 61.6983 |
| 80 | 51.1720 | 53.5400 | 57.1532 | 60.3915 | 64.2778 | 71.1445 |
| 90 | 59.1963 | 61.7541 | 65.6466 | 69.1260 | 73.2912 | 80.6247 |
| 100 | 67.3276 | 70.0648 | 74.2219 | 77.9295 | 82.3581 | 90.1332 |
| * (Normal) | −2.5758 | −2.3263 | −1.9600 | −1.6449 | −1.2816 | −.6745 |

Note: The probability shown at the head of a column is the area in the right-hand tail. The last line of the table shows the value of the standard normal variable that is exceeded with the probability given at the head of the column.

# تابع لجدول (١) (توزيع مربع كاي)

## The CHI - square and the normal Distribution

(continued)

| Degrees of Freedom \ Pb | .500 | .250 | .100 | .050 | .025 | .010 | .005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .454937 | 1.32330 | 2.70554 | 3.84146 | 5.02389 | 6.63490 | 7.87944 |
| 2 | 1.38629 | 2.77259 | 4.60517 | 5.99147 | 7.37776 | 9.21034 | 10.5966 |
| 3 | 2.36597 | 4.10835 | 6.25139 | 7.81473 | 9.34840 | 11.3449 | 12.8381 |
| 4 | 3.35670 | 5.38527 | 7.77944 | 9.48773 | 11.1433 | 13.2767 | 14.8602 |
| 5 | 4.35146 | 6.62568 | 9.23635 | 11.0705 | 12.8325 | 15.0863 | 16.7496 |
| 6 | 5.34812 | 7.84080 | 10.6446 | 12.5916 | 14.4494 | 16.8119 | 18.5476 |
| 7 | 6.34581 | 9.03715 | 12.0170 | 14.0671 | 16.0128 | 18.4753 | 20.2777 |
| 8 | 7.34412 | 10.2188 | 13.3616 | 15.5073 | 17.5346 | 20.0902 | 21.9550 |
| 9 | 8.34283 | 11.3887 | 14.6837 | 16.9190 | 19.0228 | 21.6660 | 23.5893 |
| 10 | 9.34182 | 12.5489 | 15.9871 | 18.3070 | 20.4831 | 23.2093 | 25.1882 |
| 11 | 10.3410 | 13.7007 | 17.2750 | 19.6751 | 21.9200 | 24.7250 | 26.7569 |
| 12 | 11.3403 | 14.8454 | 18.5494 | 21.0261 | 23.3367 | 26.2170 | 28.2995 |
| 13 | 12.3398 | 15.9839 | 19.8119 | 22.3621 | 24.7356 | 27.6883 | 29.8194 |
| 14 | 13.3393 | 17.1170 | 21.0642 | 23.6848 | 26.1190 | 29.1413 | 31.3193 |
| 15 | 14.3389 | 18.2451 | 22.3072 | 24.9958 | 27.4884 | 30.5779 | 32.8013 |
| 16 | 15.3385 | 19.3688 | 23.5418 | 26.2962 | 28.8454 | 31.9999 | 34.2672 |
| 17 | 16.3381 | 20.4887 | 24.7690 | 27.5871 | 30.1910 | 33.4087 | 35.7185 |
| 18 | 17.3379 | 21.6049 | 25.9894 | 28.8693 | 31.5264 | 34.8053 | 37.1564 |
| 19 | 18.3376 | 22.7178 | 27.2036 | 30.1435 | 32.8523 | 36.1908 | 38.5822 |
| 20 | 19.3374 | 23.8277 | 28.4120 | 31.4104 | 34.1696 | 37.5662 | 39.9968 |
| 21 | 20.3372 | 24.9348 | 29.6151 | 32.6705 | 35.4789 | 38.9321 | 41.4010 |
| 22 | 21.3370 | 26.0393 | 30.8133 | 33.9244 | 36.7807 | 40.2894 | 42.7956 |
| 23 | 22.3369 | 27.1413 | 32.0069 | 35.1725 | 38.0757 | 41.6384 | 44.1813 |
| 24 | 23.3367 | 28.2412 | 33.1963 | 36.4151 | 39.3641 | 42.9798 | 45.5585 |
| 25 | 24.3366 | 29.3389 | 34.3816 | 37.6525 | 40.6465 | 44.3141 | 46.9278 |
| 26 | 25.3364 | 30.4345 | 35.5631 | 38.8852 | 41.9232 | 45.6417 | 48.2899 |
| 27 | 26.3363 | 31.5284 | 36.7412 | 40.1133 | 43.1944 | 46.9630 | 49.6449 |
| 28 | 27.3363 | 32.6205 | 37.9159 | 41.3372 | 44.4607 | 48.2782 | 50.9933 |
| 29 | 28.3362 | 33.7109 | 39.0875 | 42.5569 | 45.7222 | 49.5879 | 52.3356 |
| 30 | 29.3360 | 34.7998 | 40.2560 | 43.7729 | 46.9792 | 50.8922 | 53.6720 |
| 40 | 39.3354 | 45.6160 | 51.8050 | 55.7585 | 59.3417 | 63.6907 | 66.7659 |
| 50 | 49.3349 | 56.3336 | 63.1671 | 67.5048 | 71.4202 | 76.1539 | 79.4900 |
| 60 | 59.3347 | 66.9814 | 74.3970 | 79.0819 | 83.2976 | 88.3794 | 91.9517 |
| 70 | 69.3344 | 77.5766 | 85.5271 | 90.5312 | 95.0231 | 100.425 | 104.215 |
| 80 | 79.3343 | 88.1303 | 96.5782 | 101.879 | 106.629 | 112.329 | 116.321 |
| 90 | 89.3342 | 98.6499 | 107.565 | 113.145 | 118.136 | 124.116 | 128.299 |
| 100 | 99.3341 | 109.141 | 118.498 | 124.342 | 129.561 | 135.807 | 140.169 |
| (Normal) | .0000 | +.6745 | +1.2816 | +1.6449 | +1.9600 | +2.3263 | +2.5758 |

Source: E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians* (New York: Cambridge University Press, 1972).

# جدول (٢)

# توزيع (t) الطبيعي

The t Distribution and the Normal Distribution

| Degrees of Freedom \ Pb | .25<br>.5 | .1<br>.2 | .05<br>.1 | .025<br>.05 | .01<br>.02 | .005<br>.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | .816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | .765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | .741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | .727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | .718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | .711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | .706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | .703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | .700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | .697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | .695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | .694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | .692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | .691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | .690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | .689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | .688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | .688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | .687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | .686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | .686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | .685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | .685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | .684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | .684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | .684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | .683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | .683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | .683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 40 | .681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 60 | .679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| 120 | .677 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 |
| (Normal) ∞ | .674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

Note: The smaller probability shown at the head of a column is the area in *one* tail, and the larger probability is the area in both tails. *Example:* With 5 degrees of freedom, a positive value of $t$ larger than 2.015 has a probability of 5 percent and a value of $t$ greater in absolute value than 2.015 has a probability of 10 percent. The distribution is symmetrical.

Source: E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians* (New York: Cambridge University Press, 1972).

# جدول (٣)

## التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

| | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .00 | 500 | 496 | 492 | 488 | .484 | 480 | 476 | .472 | 468 | 464 |
| .10 | 460 | .456 | 452 | 448 | .444 | 440 | 436 | .433 | 429 | 425 |
| .20 | 421 | .417 | 413 | 409 | .405 | 401 | 397 | .394 | 390 | 386 |
| .30 | 382 | 378 | 374 | 371 | .367 | 363 | 359 | .356 | 352 | 348 |
| .40 | 345 | 341 | 337 | 334 | .330 | 326 | 323 | .319 | 316 | .312 |
| .50 | 309 | 305 | 302 | 298 | .295 | 291 | 288 | .284 | 281 | 278 |
| .60 | 274 | 271 | 268 | 264 | 261 | 258 | 255 | .251 | 248 | 245 |
| .70 | 242 | 239 | 236 | 233 | .230 | 227 | 224 | .221 | 218 | 215 |
| .80 | 212 | 209 | 206 | 203 | .200 | 198 | 195 | 192 | 189 | .187 |
| .90 | 184 | .181 | 179 | 176 | .174 | 171 | 169 | 166 | 164 | .161 |
| 1.00 | 159 | .156 | 154 | 152 | .149 | .147 | 145 | 142 | .140 | 138 |
| 1.10 | 136 | 133 | 131 | 129 | .127 | .125 | 123 | 121 | .119 | .117 |
| 1.20 | 115 | 113 | 111 | 109 | .107 | .106 | 104 | 102 | .100 | 099 |
| 1.30 | 097 | 095 | 093 | 092 | 090 | .089 | 087 | 085 | .084 | 082 |
| 1.40 | .081 | .079 | .078 | 076 | 075 | .074 | 072 | 071 | 069 | 068 |
| 1.50 | 067 | 066 | .064 | 063 | 062 | 061 | 059 | 058 | 057 | 056 |
| 1.60 | 055 | 054 | .053 | 052 | 051 | 049 | 048 | 047 | 046 | 046 |
| 1.70 | 045 | 044 | .043 | 042 | 041 | 040 | 039 | 038 | 038 | 037 |
| 1.80 | 036 | 035 | .034 | 034 | 033 | 032 | 031 | 031 | 030 | 029 |
| 1.90 | 029 | 028 | .027 | 027 | 026 | 026 | 025 | 024 | 024 | 023 |
| 2.00 | 023 | 022 | .022 | 021 | 021 | 020 | 020 | 019 | 019 | 018 |
| 2.10 | .018 | 017 | .017 | .017 | 016 | 016 | 015 | 015 | 015 | 014 |
| 2.20 | .014 | .014 | .013 | .013 | .013 | 012 | 012 | 012 | 011 | 011 |
| 2.30 | .011 | .010 | .010 | .010 | .010 | 009 | 009 | 009 | 009 | 008 |
| 2.40 | .008 | .008 | .008 | 008 | .007 | 007 | .007 | 007 | 007 | 006 |
| 2.50 | .006 | .006 | .006 | 006 | .006 | 005 | .005 | 005 | 005 | 005 |
| 2.60 | .005 | .005 | .004 | 004 | .004 | 004 | .004 | 004 | 004 | 004 |
| 2.70 | .003 | .003 | .003 | 003 | .003 | 003 | .003 | 003 | 003 | 003 |
| 2.80 | .003 | .002 | .002 | 002 | .002 | .002 | .002 | 002 | 002 | .002 |
| 2.90 | .002 | .002 | .002 | 002 | .002 | .002 | .002 | .001 | 001 | 001 |
| 3.00 | .001 | .001 | .001 | 001 | .001 | .001 | .001 | .001 | .001 | .001 |

$Pr(Z \geq 1.282) = .10$
$Pr(Z \geq 1.645) = .05$
$Pr(Z \geq 1.960) = .025$
$Pr(Z \geq 2.326) = .01$
$Pr(Z \geq 2.576) = .005$

*Note:* Table entry gives $Pr(Z \geq Z^*)$, where $Z^*$ is the sum of the values of the row and column labels.
*Source:* Computed using Fortran subroutines from the IMSL Library.

## جدول (٤)

## توزيع (F) الطبيعي

# THE *F* DISTRIBUTION

upper 5% points

| $n_2$ \ $n_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161.4 | 199.5 | 215.7 | 224.6 | 230.2 | 234.0 | 236.8 | 238.9 | 240.5 | 241.9 | 243.9 | 245.9 | 248.0 | 249.1 | 250.1 | 251.1 | 252.2 | 253.3 | 254.3 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.50 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.55 | 8.53 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.77 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.63 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.40 | 4.36 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.74 | 3.70 | 3.67 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.27 | 3.23 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | [illegible] | 2.93 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.71 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.74 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.58 | 2.54 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.49 | 2.45 | 2.40 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.30 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.25 | 2.21 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.13 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.11 | 2.07 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.01 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.01 | 1.96 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.84 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.25 | 2.18 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.81 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.78 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 | 2.20 | 2.13 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.76 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.46 | 2.30 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.73 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.69 |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.95 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 | 2.13 | 2.06 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.79 | 1.73 | 1.67 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.65 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 | 2.10 | 2.03 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.75 | 1.70 | 1.64 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.62 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.64 | 1.58 | 1.51 |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.70 | 1.65 | 1.59 | 1.53 | 1.47 | 1.39 |
| 120 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.17 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.83 | 1.75 | 1.66 | 1.61 | 1.55 | 1.50 | 1.43 | 1.35 | 1.25 |
| ∞ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.39 | 1.32 | 1.22 | 1.00 |

## تابع لجدول (٤)

## توزيع "F" الطبيعي

**upper 1% points**

| $n_2$ \ $n_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052 | 4999.5 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5982 | 6022 | 6056 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| 2 | 98.50 | 99.00 | 99.17 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.37 | 99.39 | 99.40 | 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.47 | 99.48 | 99.49 | 99.50 |
| 3 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.35 | 27.23 | 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.60 | 26.50 | 26.41 | 26.32 | 26.22 | 26.13 |
| 4 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.55 | 14.37 | 14.20 | 14.02 | 13.93 | 13.84 | 13.75 | 13.65 | 13.56 | 13.46 |
| 5 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 | 10.05 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.47 | 9.38 | 9.29 | 9.20 | 9.11 | 9.02 |
| 6 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.31 | 7.23 | 7.14 | 7.06 | 6.97 | 6.88 |
| 7 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.07 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.65 |
| 8 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.12 | 5.03 | 4.95 | 4.86 |
| 9 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.73 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |
| 10 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.33 | 4.25 | 4.17 | 4.08 | 4.00 | 3.91 |
| 11 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 | 4.40 | 4.25 | 4.10 | 4.02 | 3.94 | 3.86 | 3.78 | 3.69 | 3.60 |
| 12 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.78 | 3.70 | 3.62 | 3.54 | 3.45 | 3.36 |
| 13 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 | 3.96 | 3.82 | 3.66 | 3.59 | 3.51 | 3.43 | 3.34 | 3.25 | 3.17 |
| 14 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 | 3.80 | 3.66 | 3.51 | 3.43 | 3.35 | 3.27 | 3.18 | 3.09 | 3.00 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.29 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 2.96 | 2.87 |
| 16 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 | 3.55 | 3.41 | 3.26 | 3.18 | 3.10 | 3.02 | 2.93 | 2.84 | 2.75 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.18 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.83 | 2.75 | 2.65 |
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 | 3.37 | 3.23 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.75 | 2.66 | 2.57 |
| 19 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.30 | 3.15 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.67 | 2.58 | 2.49 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.52 | 2.42 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 | 3.31 | 3.17 | 3.03 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.64 | 2.55 | 2.46 | 2.36 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 | 3.07 | 2.93 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.35 | 2.26 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.36 | 2.27 | 2.17 |
| 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.09 | 2.96 | 2.81 | 2.66 | 2.58 | 2.50 | 2.42 | 2.33 | 2.23 | 2.13 |
| 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.06 | 2.93 | 2.78 | 2.63 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.29 | 2.20 | 2.10 |
| 28 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.52 | 2.44 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.06 |
| 29 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 3.00 | 2.87 | 2.73 | 2.57 | 2.49 | 2.41 | 2.33 | 2.23 | 2.14 | 2.03 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.47 | 2.39 | 2.30 | 2.21 | 2.11 | 2.01 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| 120 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 | 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.76 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| ∞ | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 | 2.18 | 2.64 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.59 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |

te: The upper 5 percent and upper 1 percent are values of $F$ that will be exceeded with probability 5 and 1 percent, respectively. $n_1$ and $n_2$ are the numbers of degrees of freedom in the numerator and denominator, respectively. *Example:* For 5 degrees of freedom in the numerator and 10 in the denominator, a value of $F$ greater than 3.33 has a probability of 5 percent; and a value of $F$ greater than 5.64 has a probability of 1 percent.

urce: E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians* (New York: Cambridge University Press, 1972).

# جدول (٥)

# داربن - واطسون لاختبار الارتباط الذاتي

**The Durbin -Watson Table**

**Significance points of dL, and du : 5%**

| *n* | *k′* = 1 | | *k′* = 2 | | *k′* = 3 | | *k′* = 4 | | *k′* = 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $d_L$ | $d_U$ | $d_L$ | $d_U$ | $d_L$ | $d_U$ | $d_L$ | $d_U$ | $d_L$ | $d_U$ |
| 15 | 1.08 | 1.36 | 0.95 | 1.54 | 0.82 | 1.75 | 0.69 | 1.97 | 0.56 | 2.21 |
| 16 | 1.10 | 1.37 | 0.98 | 1.54 | 0.86 | 1.73 | 0.74 | 1.93 | 0.62 | 2.15 |
| 17 | 1.13 | 1.38 | 1.02 | 1.54 | 0.90 | 1.71 | 0.78 | 1.90 | 0.67 | 2.10 |
| 18 | 1.16 | 1.39 | 1.05 | 1.53 | 0.93 | 1.69 | 0.82 | 1.87 | 0.71 | 2.06 |
| 19 | 1.18 | 1.40 | 1.08 | 1.53 | 0.97 | 1.68 | 0.86 | 1.85 | 0.75 | 2.02 |
| 20 | 1.20 | 1.41 | 1.10 | 1.54 | 1.00 | 1.68 | 0.90 | 1.83 | 0.79 | 1.99 |
| 21 | 1.22 | 1.42 | 1.13 | 1.54 | 1.03 | 1.67 | 0.93 | 1.81 | 0.83 | 1.96 |
| 22 | 1.24 | 1.43 | 1.15 | 1.54 | 1.05 | 1.66 | 0.96 | 1.80 | 0.86 | 1.94 |
| 23 | 1.26 | 1.44 | 1.17 | 1.54 | 1.08 | 1.66 | 0.99 | 1.79 | 0.90 | 1.92 |
| 24 | 1.27 | 1.45 | 1.19 | 1.55 | 1.10 | 1.66 | 1.01 | 1.78 | 0.93 | 1.90 |
| 25 | 1.29 | 1.45 | 1.21 | 1.55 | 1.12 | 1.66 | 1.04 | 1.77 | 0.95 | 1.89 |
| 26 | 1.30 | 1.46 | 1.23 | 1.55 | 1.14 | 1.65 | 1.06 | 1.76 | 0.98 | 1.88 |
| 27 | 1.32 | 1.47 | 1.24 | 1.56 | 1.16 | 1.65 | 1.08 | 1.76 | 1.01 | 1.86 |
| 28 | 1.33 | 1.48 | 1.26 | 1.56 | 1.18 | 1.65 | 1.10 | 1.75 | 1.03 | 1.85 |
| 29 | 1.34 | 1.48 | 1.27 | 1.56 | 1.20 | 1.65 | 1.12 | 1.74 | 1.05 | 1.84 |
| 30 | 1.35 | 1.49 | 1.28 | 1.57 | 1.21 | 1.65 | 1.14 | 1.74 | 1.07 | 1.83 |
| 31 | 1.36 | 1.50 | 1.30 | 1.57 | 1.23 | 1.65 | 1.16 | 1.74 | 1.09 | 1.83 |
| 32 | 1.37 | 1.50 | 1.31 | 1.57 | 1.24 | 1.65 | 1.18 | 1.73 | 1.11 | 1.82 |
| 33 | 1.38 | 1.51 | 1.32 | 1.58 | 1.26 | 1.65 | 1.19 | 1.73 | 1.13 | 1.81 |
| 34 | 1.39 | 1.51 | 1.33 | 1.58 | 1.27 | 1.65 | 1.21 | 1.73 | 1.15 | 1.81 |
| 35 | 1.40 | 1.52 | 1.34 | 1.58 | 1.28 | 1.65 | 1.22 | 1.73 | 1.16 | 1.80 |
| 36 | 1.41 | 1.52 | 1.35 | 1.59 | 1.29 | 1.65 | 1.24 | 1.73 | 1.18 | 1.80 |
| 37 | 1.42 | 1.53 | 1.36 | 1.59 | 1.31 | 1.66 | 1.25 | 1.72 | 1.19 | 1.80 |
| 38 | 1.43 | 1.54 | 1.37 | 1.59 | 1.32 | 1.66 | 1.26 | 1.72 | 1.21 | 1.79 |
| 39 | 1.43 | 1.54 | 1.38 | 1.60 | 1.33 | 1.66 | 1.27 | 1.72 | 1.22 | 1.79 |
| 40 | 1.44 | 1.54 | 1.39 | 1.60 | 1.34 | 1.66 | 1.29 | 1.72 | 1.23 | 1.79 |
| 45 | 1.48 | 1.57 | 1.43 | 1.62 | 1.38 | 1.67 | 1.34 | 1.72 | 1.29 | 1.78 |
| 50 | 1.50 | 1.59 | 1.46 | 1.63 | 1.42 | 1.67 | 1.38 | 1.72 | 1.34 | 1.77 |
| 55 | 1.53 | 1.60 | 1.49 | 1.64 | 1.45 | 1.68 | 1.41 | 1.72 | 1.38 | 1.77 |
| 60 | 1.55 | 1.62 | 1.51 | 1.65 | 1.48 | 1.69 | 1.44 | 1.73 | 1.41 | 1.77 |
| 65 | 1.57 | 1.63 | 1.54 | 1.66 | 1.50 | 1.70 | 1.47 | 1.73 | 1.44 | 1.77 |
| 70 | 1.58 | 1.64 | 1.55 | 1.67 | 1.52 | 1.70 | 1.49 | 1.74 | 1.46 | 1.77 |
| 75 | 1.60 | 1.65 | 1.57 | 1.68 | 1.54 | 1.71 | 1.51 | 1.74 | 1.49 | 1.77 |
| 80 | 1.61 | 1.66 | 1.59 | 1.69 | 1.56 | 1.72 | 1.53 | 1.74 | 1.51 | 1.77 |
| 85 | 1.62 | 1.67 | 1.60 | 1.70 | 1.57 | 1.72 | 1.55 | 1.75 | 1.52 | 1.77 |
| 90 | 1.63 | 1.68 | 1.61 | 1.70 | 1.59 | 1.73 | 1.57 | 1.75 | 1.54 | 1.78 |
| 95 | 1.64 | 1.69 | 1.62 | 1.71 | 1.60 | 1.73 | 1.58 | 1.75 | 1.56 | 1.78 |
| 100 | 1.65 | 1.69 | 1.63 | 1.72 | 1.61 | 1.74 | 1.59 | 1.76 | 1.57 | 1.78 |

Note: *k′* = number of explanatory variables excluding the constant term.



# أهم المصطلحات المستخدمة في الاقتصاد القياسي

# المصطلحات العلمية والمصطلحات القياسية

## A

| | |
|---|---|
| القيمة المطلقة | Absolute Value |
| تحليل | Analysis |
| تطبيق | Application |
| محاولة | Attempt |
| تكييف | Adapting |
| قبول | Accept |
| الوسط الحسابي | Average mean |
| علاقة | Association |
| الارتباط الذاتي | Auto correlation |
| فروض | Assumptions |
| الطريقة البديلة | Alternative method |
| الفرضية البديلة | Alternative hypothesis |
| المعدل | Adjusted |
| طريقة أتكن للمربعات | Aitken Generalized Least |
| الصغرى العمومية | Squares method |
| نموذج التعديل | Adjustment model |
| نموذج التوقعات المكيفة | Adaptive expectation model |
| المتغير المصطنع | Artificial variable |
| التشتت المطلق | Absolute dispersion |
| المنحنى التقريبي | Approximating curve |
| خاصية الجمع | Additive property |
| متوسط التخلف | Average Lag |
| الوسط الحسابي | Arithmetic mean |
| ثابت اختياري | Arbitrary constant |
| التعديلات | Arrangement |

| | |
|---|---|
| الصفات | Attributes |
| المصفوفة المرافقة | Adjoint matrix |
| تحليل التباين | Analysis of variance |
| نماذج تحليل التباين | Analysis of variance Models |
| قياسي - تطبيقي | Applied Econometrics |
| غياب التداخل الخطي المتعددد | Absence of multicollinearity |
| التغير الفعلي | Actual change |

B

| | |
|---|---|
| أساس | Base |
| فترة الأساس | Base Period |
| اسم مجلة أمريكية | Biometrics |
| أفضل | Best |
| قيود الميزانية | Budget constraint |
| تقدير متغير | Baised estimator |
| جدول مزدوج ذي متغيرين | Bi- aviate table |
| فروض أساسية | Basic assumptions |
| سلوكي | Behavioral |
| توزيع ذو حدين | Binomial distribution |
| مفكوك ذو الحدين | Binomial expansion |
| معلمات ذو الحدين | Binorial coefficients |
| أفضل مقدرات خطية غير متحيزة | BLUE: Best Linear unbiased Estimator |
| متحيز | Biased |

C

| | |
|---|---|
| مفهوم | Concept |
| ثابت | Constant |
| معامل | Coefficient |
| استهلاك | Consumption |
| مركب | Complex |
| منحنى | Curve |

| | |
|---|---|
| نموذج مغلق | Closed model |
| الارتباط | Correlation |
| معامل الارتباط | Correlation Coefficient |
| جدول الارتباط | Correlation table |
| معامل الارتباط المتعدد | Coefficient of Multiple Correlation |
| معامل الارتباط الخطي المتعدد | Coefficient of Linear Multiple Correlation |
| معامل التحديد المتعدد | Coefficient of Multiple determination |
| معامل التحديد الخطي المتعدد | Coefficient of Multiple Linear determination |
| معامل الارتباط الجزئي | Coefficient of partial correlation |
| الارتباط التام | perfect correlation |
| فترات الثقة | Confidence intervals |
| معلمات الثقة | Confidence coefficients |
| معامل ارتباط الرتب | Coefficion of Rank |
| حدود الثقة | Confidence Limits |
| القيم الحرجة | Critical value |
| المنطقة الحرجة | Celtical region |
| عمود | Column |
| شرط | Condition |
| (t) المحسوبة | Calculated (t) |
| فئات | Classes |
| حدود الثقة | Class Limit |
| فترة الثقة | Class interval |
| معامل الاختلاف | Coefficient of Variation |
| الجذور المميزة | Characteristic roots |
| متغيرات متصلة | Continuous variables |
| أقسام | Categories |
| تغاير | Covariance |
| مقارنة | Comparative |
| قيد (شرط) | Constraint |
| الاتساق | Consistency |

| | |
|---|---|
| حساب | Calculated |
| المصفوفة المرافقة | Cofactor matrix |
| المقطع العرضي | Cross - Section |
| دالة الاستهلاك | Consumption function |
| معلمة التوقع | Coefficient of expectation |
| الدخل الثابت الجاري | Current permanent income |
| المتغيرات التصنيفية | Categorical variables |
| قانون كرايمر | Cramer's rule |
| دالة الإنتاج لكوب - دوكلاس | Cobb - Douglas production function |
| المرونة الثابتة للإحلال | Constant elasticity of substitution |
| نطاق الثقة | Confidence belt |
| سبب | Cause |

## D

| | |
|---|---|
| رمز يشير إلى اختيار دارين واطسون | D-W |
| درجات الحرية | Degress of Freedom |
| متغيرات وهمية | Dummy variables |
| متغير تابع | Dependent variable |
| توزيع | Distribution |
| الطلب على العمل | Demand for labaur |
| مباشر | Direct |
| يختفي | Disappear |
| الكثافة الاحتمالية | Density function |
| التفاضل | Differentiation |
| طريقة الامحرافات | Deviations method |
| علاقة محددة | Deterministic relation |
| إحصاء وصفي | Descriptive statistics |
| بيانات | Data |
| حدود الاضطراب | Disturbance Terms |

| | |
|---|---|
| نموذج حركي | Dynamic model |
| المحدد | Determinant |
| معادلة تعريفية | Definitional Equation |
| نماذج توزيع التخلف | Distributed lag models |
| محرك التخلف | Delay operator |
| إحصاء تجريبي | Deductive statistics |
| اشتقاق | Derivation |
| مشتقة | Derivative |
| العناصر القطرية | Diagonal element |
| تشتت | Dispersion |
| اختبار دربن واطسون | Durbin - Watson tes |
| التغير المرغوب | Desired change |
| طريقة حذف الارتباط الذاتي | Detecting auto correlation method |

E

| | |
|---|---|
| النموذج الاقتصادي | Economic model |
| اقتصاد قياسي | Econometrics |
| معادلة | Equation |
| متغير تفسيري | Explanatory variable |
| حدود الخطأ | Error terms |
| حذف | Elimination |
| متغير خارجي | Exogenous variable |
| تقدير | Estimation |
| عناصر | Elements |
| قيمة محدودة | Exact value |
| القيمة المتوقعة | Equality |
| مساواة | Equilibrlume |
| توازن | Effective |
| فعال | Employment |
| استخدام | |
| مرونة | Elasticity |

| | |
|---|---|
| مصروفات | Expenditures |
| المعادلات الآسية | Exponential equations |
| عامل خارجي | External Factor |
| مصفوفة أولية | Elementary matrix |
| تحويلات أولية | Elementary transformations |
| مفكوك | Expansion |
| متغير داخلي | Endogenous variable |
| مقدر | Estimator |
| دالة آسية | Exponential function |
| متماسك | Insistent |
| المرونة الانفاقية | Elasticity of food expenditures |
| الكفاءة | Efficiency |
| مجموع مربع الأخطاء | Errors sum of Squares |
| دالة الصادرات | Export function |

## F

| | |
|---|---|
| رمز يشير إلى اختبار (F) | F |
| دالة | Function |
| صيغة | form, Formula |
| تنبؤ | Forcaste |
| عنصر | Factor |
| تكوين الشكل | Formulation Feature |
| نهائي | Finite, |
| غير نهائي | infinite |
| القيم الدالية | Functional Values |
| القيم المستقبلية | Future values |
| التحليل إلى العوامل | Factorization |
| العلاقة الدالية | Functional relationship |
| الإمكان الأعظم بالمعلومات الكاملة | Full information maximum Likelihood method |
| نسبة ثابتة | Fixed proportion |

G

| | |
|---|---|
| التخلف الهندسي | Geometric Lag |
| مجموعات | Groups |
| المربعات الصغرى العمومية | Generalized least squares |
| النموذج الخطي العام | General Linear Model |
| معطاة | Given |
| حسن المطابقة | Goodness of fit |

H

| | |
|---|---|
| اختبار الفرضيات | Hypothesis testing |
| تجانس التباين | Homoscedasticity |
| عدم تجانس التباين | Hetroscedasticity |
| دالة متجانسة | Homogeneous |
| الدرجة العالية من التداخل الخطي المتعدد | High degree of Multicollinearity |

I

| | |
|---|---|
| حد التقاطع | Intercept term |
| متغير مستقل | independent variable |
| الأسباب المؤسسية | Institutional reasons |
| تطابقي | Identical |
| متطابقة الدخل | Income identity |
| منحنيات الإنتاج | Isoquants |
| الحالة الحرجة | Inconclusive |
| طريقة التكرار | Iterative method |
| مشكلة التشخيص | Identification problem |
| تأثير المضاعف | Impact multiplier |
| الأثر غير المباشر للمضاعف | Indirect multiplier |
| مصفوفة الوحدة | Identity matrix |
| معكوس المصفوفة | Inverse matrix |
| متساوي القوى | Idempotent |
| المرونة الدخلية | Income elasticity |

| | |
|---|---|
| تحليل المستخدم / المنتج | Input / output analysis |
| دالة ضمنية | Implicit function |
| دالة متزايدة | |
| معادلة غير محددة | Indeterminate Equation |
| عدم الكفاءة | Inefficiency |
| غير مرن | Inelastic |
| غير متساوية | Inequality |
| علاقة معكوسة | Inversely related |
| تقاطع | Intersection |
| غير متناسق | Inconsistent |
| منحنيات الناتج المتساوية | Isoquants |
| دالة الاستيرادات | Imports function |
| تضخم | Inflation |
| طريقة المتغير الأدائي | Instrumental variable method |

J

| | |
|---|---|
| مشخصة | Just identify |

K

| | |
|---|---|
| رمز يشير إلى عدد المتغيرات | K |
| النموذج الكنيزي | Keynesian model |
| نموذج كويك في التخلف الزمني | Koyck lag distribution model |

L

| | |
|---|---|
| التخلف الزمني | Lag variable |
| خطي | Linear |
| معادلة لوغارتمية | Log equation |
| خط | Line |
| تقدير الإمكان | Likelihood estimator |
| المتجهات المميزة | Latent vectors |
| تشكيلة خطية | Linear combinations |
| التجانس الخطي | Linear homogenous |

| | |
|---|---|
| مضاعف لاكرانج | Lagrangian multiplier |
| مستوى المعنوية | Level of significance |
| فرضية تعلم الخطأ | Learning hypothesis error |

## M

| | |
|---|---|
| نموذج | Model |
| مصفوفات | matrices |
| طريقة | Method |
| قياس | Measurement |
| اقتصاد رياضي | Mathematical Economics |
| نموذج كلي | Macro model |
| نموذج جزئي | Micro model |
| التداخل الخطي المتعدد | multico Linearity |
| مشكلة التعظيم | Maximization problem |
| مشكلة التصغير | Minimization problem |
| دالة طلب السوق | Market demand Function |
| دالة عرض السوق | Market Supply fuction |
| المضاعف | Multiplier |
| وسط | Mean |
| تحليل الارتباط المتعدد | Multiple correction analysis |
| دالة متعدد القيم | Multiple valued function |
| أقل تباين | Minimum variance |
| محيدد | Minor |
| طرق متعدد المتغيرات | Multivariate methods |
| الميل الحدي للاستهلاك | Marginal propensity of consumption |
| النموذج الرياضي | Mathematical Model |
| تقليل البواقي | Minimizes residuale |
| تعظيم البواقي | Maximizes residual |
| الميل الحدي للاستهلاك | Marginal propensity of consumption |
| نظرية كاوس ماركوف | Markov theorem |

| | |
|---|---|
| متوسط مربط الخطأ | Mean square error |

## N

| | |
|---|---|
| رمز يشير إلى حجم المجتمع | N |
| نماذج غير خطية | Nonlinear Models |
| مصفوفة غير مفردة | Non singular matrix |
| توزيع طبيعي | Normal distribution |
| التحويل إلى صيغة معيارية | Normalization |
| فرضية العدم | Null hypothesis |
| الشرط الضروري | necessary condition |
| سالب وموجب | Null matrix |
| ضئيل | Negligible |
| المتغيرات المزعجة | Nuisance variables |
| غير تجريبية (غير مختبرية) | Nonexperimental |

## O

| | |
|---|---|
| حذف | Omission |
| الدالة الهدفية | Objective function |
| الطريقة الأساسية | Original formulation |
| تشخيص علوي | Over identification |
| شرط الدرجة | Order condition |
| الحل الأمثل | Optimal Solution |
| معوقات | Obstacles |
| اختبار من طرف واحد | One - tailed test |
| اختبار من جانب واحد | One - sided test |
| رتبة المصفوفة | Order of a matrix |
| المربعات الصغرى الاعتيادية | Ordinary least squares (OLS) |
| متعامد | Orthogonal |
| مشاهدات | Observations |

P

| | |
|---|---|
| مؤشرات | Parameters |
| تفاضل جزئي | Partial differential |
| دالة احتمالية | Probability function |
| معلومات أولية | Priorl information |
| تباين المجتمع | Population variance |
| ارتباط تام | perfect correlation |
| قوة الاختبار | Power of test |
| الدخل الدائم | Permanent income |
| التوقع المتطور | Progressive exception |
| أسباب نفسية | Psychological reasons |
| مبادئ | Principles |
| الميل | Propensity |
| الإنتاج | Producstion |
| الأرباح | Profits |
| سعر السلع | Price of goods |
| معامل الانحدار الجزئي | Partial regression coefficient |
| التنبؤ | Prediction |
| قطر رئيسي | Principle diagonal |
| ظهور التداخل الخطي المتعدد | Presence of multicollinearity |
| نموذج التعديل الجزئي | Partial adjustment model |

Q

| | |
|---|---|
| الطرق الكمية | Quantitative methods |
| عوامل كمية | Quantifiable factors |
| مكمم | Quantified |
| كمية | Quantity |
| متغير نوعي | Qualitative Variable |
| متغير كمي | Quantitative |
| معادلة تربيعية | Quadratic equation |

## R

| | |
|---|---|
| معادلة الصيغة المختزلة | Reduce form equation |
| تحليل الانحدار | Regression analysis |
| متغير عشوائي | Random varable |
| البواقي | Residuals |
| علاقة | Relationship |
| رفض | Reject |
| تنقيح | Revise |
| صف | Row |
| شرط الرتبة | Rank condition |
| قانون، قاعدة | Rule |
| حذر | Root |
| معلمات الانحدار | Regression coefficients |
| رتبة المصفوفة | Rank of matrix |
| انحدار مجموع المربعات | Regression sum of squares |

## S

| | |
|---|---|
| ميل | Slope |
| صيغة التعويض | Substitution formula |
| النموذج الساكن | Static model |
| نصف لوغاريتمي | Sime - log |
| إحصاء | Statistics |
| استقلال إحصائي | Statistical Inference |
| مجال | Scope |
| خاض | Special |
| مجموعة | Set |
| حدود التصادفية | Stochastic terms |
| مفردة | Single |
| معادلات آنية | Simultaneous equations |
| مرحلة | Stage |
| توصيف | Specification |
| الخطأ المعياري | Standard error |

| | |
|---|---|
| انحراف معياري | Standard deviation |
| تباين العينة | Sample variance |
| خاضع إلى | Subject to |
| مربع البواقي | Squared Residuals |
| الارتباط المتسلسل | Serial correlation |
| وحدات معيارية | Standard Units |
| عددي (مفردة) | Scalar |
| شكل الانتشار | Scatter diagram |
| الانحدار الخطي البسيط | Simple Linear regression |
| مصفوفة الوحدة | Singular matrix |
| مصفوفة مربعة | Square matrix |
| التحويل الجذري | Square root transformation |
| معامل الانحدار الجزئي المعياري | Standard partial regression coefficion |
| مجموع | Sum |
| مجموع المربعات | SS |
| مصدر التباين | Source of variation |
| طريقة الاختيار التدريجي | Stepwise selection procedure |
| مصفوفة جزئية | Submatrices |
| طرح | Subtraction |
| مصفوفة متماثلة | Symmetric matrix |
| الكفاية | Sufficiency |
| تقدير الدورة الثانية | Second round estimate |
| التعديل الموسمي | Seasonal adjustment |
| دالة وحيدة القيمة | Single valuved function |
| المعادلات الهيكلية | Structural equations |
| هيكل السوق السلعية | Structure of goods market |
| هيكل السوق النقدية | Structure of money market |

T

| | |
|---|---|
| رمز يشير إلى اختبارt | t |

| | |
|---|---|
| حد | Term |
| فني | Technical |
| اختبار t | Test |
| تفاضل الكلي | Total differentiation |
| المصفوفة المحولة | Transpose matrix |
| الأسباب الفنية | Technological reasons |
| هدف | Target |
| اختبار من طرفين | Two - tailed |
| اختبار من جانبين | Two - sided |
| توزيع t | t- distribution |
| اختبار الفرضيات | Test of hypothesis |
| تحويلات | Trans formation |
| مبدلة المصفوفة | Transpose matrix |
| نقطة الانقلاب | Turning point |
| معلمات الإنتاج الفنية | Technical coefficients of production |
| قياسي نظري | Theoretical Econometric |
| مرحلة الاختبار | Testing stage |
| إجمالي مجموع المربعات | Total sum of Squares |
| t الجدولية | Tabulted (t) |

V

| | |
|---|---|
| التباين | Variance |
| متغير | Variable |
| متجه | Vector |
| قيمة | Value |
| التباين المفسر بواسطة الانجدار | Variance explained by regression |

W

| | |
|---|---|
| أوزان | Wieghts |
| عناصر الترجيح | Wieghting factors |
| الوسط المرجح | Weighting mean |

| | |
|---|---|
| طريقة المربعات الصغرى الموزونة | Wieghted least squares method |
| نموذج والارس في التوازن العام | Walrasian, model of general equilibrium |
| أجور | Wages |

## Y

| | |
|---|---|
| رمز يشير عادة إلى المتغير التابع | Y |
| محصول | Yield |

## Z

| | |
|---|---|
| رمز يشير إلى اختبار (Z) | Z |
| قيد الصفر وغير الصفر | Zero - NON zero |
| المتجه الصفري | Zero vector |
| نقطة الصفر | Zero point |
| المصفوفة الصفرية | Zero matrix |

# أهم المصادر العلمية المستخدمة

أ- المصادر باللغة الإنجليزية:

1. Alt; F;F., "Distributed lags"; Econometrica, Vo10, PP.113-128 1942.

2. Gagan; P. "The Monetary Dynamic of Hyper Inflation; in M Friedmon (ed, Studies in Quantity Theory of Money"; University of Chicago Press. Chicago 1956.

3. Chow; G., "Exonometrics"; International Student Edition, McGraw-Hill Company London, 1985.

4. Dutta M., "Econometric methods"; South - Western Company, Newark, 1986.

5. Durbinj. J. and Watson. G. "Testing for serial Correlation in least squares Regression" Biometricka; Vol38, PP. 159-177. 1951.

6. Fridmon. M.; "A Theory of the Consumption Function"; National Bureau of Economic Research; Princeton University press. 1957.

7. Goldberger. A. "Econometric Theory"; John Wiley & Sons, 1964.

8. D.Gujarati. D. "Basic Econometrics"; Bernard Baruch College Cit University of New York. 1978.

9. Johnston. J. "Econometric methods; NewYork, McGraw - Hill Book Company 1984.

10. Kamenta. J. "Elements of Econometrics"; John wiley and Sons Inc; Newyork 1971.

11. Kelejian. H. and Oates. W. "Introduction to econometrics", Principles and applications"; Harper international edition, 1974, London.

12. Koutsoyannis. A. "Theory of Econometrics"; Harper & Row, Publishers. Inc, New York, 1973.

13. Lange. O. "Introduction to Econometrics"; 4th edition, 1978, PWN-Pilish

Scientific publication, Warzaw, Poland.

14. R.Pindyck.R and Rubinfel. D. "Econometric Models and Economic Forecas" International Student Edition, McGraw - Hill book Company London, 3Ed. 1985.

15. Salvatory. D. "Statistics and Econometrics"; Schaum's outline Series in Econometrics, McGraw-Hill Book Company, 1976.

16. Silvery. S.D. "Multicollinearity and Imprecise Estimation"; Royal Statistic Soc, Seriese B. Vol.31. PP. 539-552, 1969.

17. Suits. D.B. "Use of Dummy Variables In Regression Equations"; Journal of American statistics Association; Vol. 52. No. 280, 1957.

18. Thell. H. "Principles of Econometrics"; John wiley & Sons Inc; New york 1971.

19. Thomas. R.L; "Modern Econometnis "An Introduction" Long man; London, 1997.

20. Tinbergen. J. "Long-run Foregin Trade Elasticity" Metroeconomica, Vol. 1, PP. 174-185. 1949.

21. Wallis. K. "Introductory Econometrics"; Aldine Publishing Company Chicago, 1972.

22. Wonnacott. R and Wonnacott. T. "Econometrics"; John Wiley and sons Inc. New York 1979.

23. Walters, A.A. "An Introduction to Econometnis; Macmillan, London, 1968.

ب- المصادر باللغة العربية:

١. الدكتور إبراهيم العيسوي. "القياس والتنبؤ في الاقتصاد"". دار النهضة العربية، القاهرة ١٩٧٨.

٢. الدكتور خاشع محمود الراوي. "المدخل إلى الإحصاء" وزارة التعليم العـالي والبحـث العلمـي - جامعة الموصل ١٩٨٤.

٣. الدكتور سعد الدين الشيال، "مقدمة في الاقتصاد القياسي" القاهرة ١٩٨٢.

٤. الدكتور عادل عبد الغني محبوب، "الاقتصاد القياسي" وزارة التعليم العـالي والبحـث العلمـي، مطبعة دار الكتب - جامعة الموصل - ١٩٨٢.

٥. الدكتور عصام عزيز شريف، "القياس الاقتصادي" دار الطليعة، بيروت ١٩٨١.

٦. الدكتور وليد إسماعيل السيفو. "مقدمـة في الاقتصـاد الريـاضي" ملزمـة أعـدها لطلبـة الصـف الثالث اقتصاد. كلية الإدارة والاقتصاد باللغة الإنكليزية.

٧. كوستيانس ونظرية الاقتصاد القيـاسي ""ترجمـة الـدكتور محمـد عبـد العـال وآخـرين - وزارة التعليم العالي والبحث العلمي ١٩٩٠. العراق.

٨- الـدكتور فاضـل أحمـد عـلي وممـدوح الدسـوقي وآخـرون: "مقدمـة في الاقتصـاد القيـاسي التطبيقي" جامعة قاريونس - ليبيا ١٩٩٦.

٩- الدكتور محمد لطفي فرحان "مبادئ الاقتصاد القياسي" جامعة الناتج، طرابلس، ليبيا ,١٩٩٨

١٠. الدكتور عبد القادر محمد عبد القادر عطية: "الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق" الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر، ١٩٩٨.

١١. الدكتور وليد إسماعيل السيفو "المدخل إلى الاقتصاد القياسي" جامعة الموصل، وزارة التعلـيم التعالي والبحث العلمي، ١٩٨٨.

# الإقتصاد القياسي التحليلي

## بين النظرية والتطبيق

f(d)


Dar Majdalawi Pub. & Dis.
Amman 11118 - Jordan
P.O.Box : 184257
Tel & Fax : 4611606 - 4622884



دار مجدلاوي للنشر والتوزيع
عمان - الرمز البريدي : ١١١١٨ - الاردن
ص.ب : ١٨٤٢٥٧ - تلفاكس : ٤٦١١٦٠٦ - ٤٦٢٢٨٨٤

www.majdalawibooks.com
e-mail: customer@majdalawibooks.com